

赵晓冬 赵静一 编著

# 模糊思维与广义设计

理论和模型及其应用

机械工业出版社

# 模糊思维与广义设计

## ——理论·模型·应用

赵晓冬 编著  
赵静一



机械工业出版社

D098/20

本书融模糊逻辑思维理论及模糊优化设计方法与经济管理问题及工程技术设计为一体,形成了一部具有一定特色的内容体系。全书论述了模糊原理、模糊演绎推理、模糊语言值逻辑及系统故障诊断方法、模糊优化设计和广义模糊优化设计理论和方法,给出了经济运行和企业管理中的若干模糊模型,讲解了机械设计中的模糊可靠性问题,介绍了模糊理论在城市评价、产品质量评价、机械系统可靠性设计及预计、液压系统故障诊断等方面的若干应用。

本书可供具有一定数学修养的经济管理和工程技术人员阅读使用,亦可作为高校研究生和本科生相关专业的教学参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

模糊思维与广义设计:理论·模型·应用 / 赵晓冬, 赵静一编著. —北京:机械工业出版社,1998.10  
ISBN 7-111-06666-9

I. 模… II. ①赵… ②赵… III. 模糊数学-系统可靠性 IV. 0159

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 22182 号

出版人:马九荣(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)  
责任编辑:李宜春 版式设计:冉晓华 责任校对:罗利华  
封面设计:郭景云 责任印制:侯新民  
北京市昌平振南印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行  
1998 年 8 月第 1 版·1998 年 8 月第 1 次印刷  
787mm×1092mm  $\frac{1}{32}$ ·9  $\frac{1}{8}$ 印张·200 千字  
0 001—1 000 册  
定价:20.00 元  
凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

# 前 言

自从 L. A. Zadeh 于 1965 年提出模糊集合概念以来,国内外有关模糊理论自身的研究和模糊理论在其他领域中的应用日益深化和丰富。目前,模糊理论的基本思想已渗透到社会科学、自然科学、技术科学和思维科学的许多方面。

从本书所介绍的模糊集合的运算扩张理论、模糊逻辑、模糊语言值推理和模糊优化设计理论的实用性和启发性上讲,它是较侧重于思维科学的书籍;从穿插于各个章节之间的有关经济管理中的模型和例子看待本书时,它是较多地涉及到经济管理问题的书籍;当扩展到第五章和第七章时,会发现它较合理地将模糊理论结合到了机械工程设计之中。由此可见,我们可以将本书作为一部介绍模糊思维与广义设计理论及其在思维科学、经济管理和工技技术中的应用的书籍。

本书中各章节的编排,各种理论和方法的介绍,以及书中给出的模型和引入的实例均考虑到了内容的系统性、叙述的通俗性、推导的逻辑性、方法的科学性和应用的有效性。在本书构成中,既给出了笔者的一些研究结果,又适当介绍了国内外学者的工作成就并在参考文献中列入了他们的文献;在此,我们向这些曾使我们深受教益的专家学者们致以崇高敬意。另外,研究生上官倩倩负责整理并誊写了第六章内容,研究生马保海负责整理并誊写了第七章内容,我们也借此致谢。

赵晓冬 赵静一

1998年4月28日 于秦皇岛

# 目 录

## 前言

<b>第一章 模糊集合的运算和模糊分解理论</b> .....	1
第一节 模糊集合 .....	1
第二节 隶属函数的类型 .....	4
第三节 模糊运算 .....	14
第四节 模糊分解 .....	20
<b>第二章 模糊映射扩张和模糊运算扩张</b> .....	28
第一节 普通映射和逆映射 .....	28
第二节 模糊映射扩张 .....	32
第三节 模糊映射扩张的基本性质 .....	37
第四节 映射扩张与扩张分解 .....	39
第五节 模糊运算扩张 .....	41
<b>第三章 模糊逻辑</b> .....	45
第一节 模糊语气词及其算子 .....	45
第二节 广义模糊化算子 .....	58
第三节 普通逻辑演算和推理 .....	70
第四节 模糊命题和模糊判断句 .....	81
第五节 模糊推理句和模糊推理规则 .....	83
第六节 二元模糊推理句和二元模糊条件句 .....	97
第七节 二元模糊演绎推理规则 .....	110
第八节 模糊似然推理 .....	113
第九节 关系方程与真值域 .....	122
<b>第四章 模糊语言值逻辑与模糊故障诊断</b> .....	132
第一节 模糊数及其运算 .....	132

第二节	真和假及其相关的模糊语言值 .....	142
第三节	模糊语言值命题和语言值逻辑 .....	147
第四节	故障诊断中的模糊语言值逻辑诊断模型 .....	157
<b>第五章</b>	<b>模糊优化设计理论及其应用 .....</b>	<b>163</b>
第一节	传统设计方法 .....	163
第二节	模糊优化设计模型 .....	164
第三节	对称型模糊优化设计 .....	165
第四节	对称型模糊优化设计的解法基础 .....	171
第五节	对称型模糊优化设计的迭代解法 .....	177
第六节	非对称型一般模糊优化设计问题 .....	184
第七节	一般模糊约束条件下的非对称型模型的解法 .....	187
第八节	广义模糊优化设计方法中的数学模型 .....	202
<b>第六章</b>	<b>经济和管理中的模糊模型及其应用 .....</b>	<b>213</b>
第一节	公共选择模糊模型 .....	214
第二节	最佳分配模糊模型 .....	217
第三节	双向决策模糊模型 .....	222
第四节	经济管理中的故障诊断模糊模型 .....	227
第五节	城市整体发展多目标多层次评价模型 .....	230
第六节	机械产品质量和可靠性的模糊综合评价 .....	244
<b>第七章</b>	<b>机械工程可靠性研究中的模糊模型及其应用 .....</b>	<b>253</b>
第一节	液压系统中的可靠性和模糊可靠性 .....	253
第二节	液压系统故障的模糊诊断方法 .....	259
第三节	机械可靠性的模糊设计 .....	269
第四节	机械系统可靠性的模糊预计 .....	276
<b>参考文献</b>	<b>.....</b>	<b>283</b>

## 第一章 模糊集合的运算和模糊分解理论

本章的主要任务是引入模糊集合概念,用一些例子说明模糊集合运算及其含义,在第二节中介绍了隶属函数的基本类型——折线型隶属函数(如半矩形、矩形、三角形、半梯形、梯形)和曲线型隶属函数(如S型、柯西型、 $k$ 次抛物线型、 $\Gamma$ 型、岭型、正态分布型),这些不同类型的函数可依实际问题的差异取定。第三节中给出了关于任意一个论域上的模糊现象(或模糊集合)间的三类运算——逻辑运算、代数运算和有界运算,在遇到不同类型的问题时可相机选择某类运算。在第四节中,为了使读者较清晰地看到模糊集合的分解过程和表达式,认真研究了模糊集合的水平集合的基本性质,通过这些性质以及水平集的数乘运算给出了模糊集合的分解形式。

### 第一节 模糊集合

在本书中,用 $X, Y, Z$ 等表示所涉及的对象之全体构成的集合,在模糊理论中被称为论域。当 $X$ 取为若干个苹果构成的集合时,论域 $X$ 上的现象 $A$ =富士苹果、 $B$ =国产苹果具有这样一个特性:对任意的 $x \in X$ ,不是 $x \in A$ (或 $x \in B$ )就是 $x \in A'$ (或 $x \in B'$ ),其中 $A'$ 和 $B'$ 分别表示 $A$ 和 $B$ 在 $X$ 中的补集合, $A$ 和 $B$ 实质上就是富士苹果和国产苹果在 $X$ 上的外延——即 $X$ 的两个子集合; $X$ 上具有这种特性的现象被称为 $X$ 上的普通现象,它可以用 $X$ 上的子集反映出来,这个子集就是该现象的外延。但是,这种特性并非 $X$ 上的现象所共有

的。如果取  $X$  上的现象  $C=$ 酸苹果、 $D=$ 大红苹果时,从  $X$  中随意地取出一个苹果  $x$  时,很难确定地说  $x$  是否就是酸苹果或大红苹果,只能说它是某种程度的酸苹果或大红苹果。

上述由一些苹果构成的论域  $X$  上的现象  $C$  和  $D$  与  $X$  上的普通现象  $A$  和  $B$  之间的根本区别在于  $X$  中的对象  $x$  是否具有现象  $C$  和  $D$  是用区间  $[0,1]$  中的某个程度来反映的, $C$  和  $D$  没有外延构成的子集。因为  $x$  具有  $C$  的程度随  $x \in X$  的不同可能对应不同的值  $C(x) \in [0,1]$ ,所以  $C=$ 酸苹果可以被看作是一个由  $X$  到  $[0,1]$  的对应

$$x \xrightarrow{\text{酸苹果}} x \text{ 是酸苹果的程度 } C(x)$$

一般称  $C(x_0)$  为  $x_0$  对  $C$  的隶属度,而称  $C(x)$  为  $C$  的隶属函数,有时为了和普通现象的外延——集合的称呼相应,也将  $C(x)$  称为  $C$  的模糊集而类似于  $C$  和  $D$  的现象便被称为模糊现象了。

为了表述的简化需要,用  $A, B, C, D$  等符号表示论域  $X$  上的模糊现象,并且同时用这些符号表示相应的隶属函数或模糊集合。当  $X$  是有限个对象构成的论域时,采用例 1.1 中使用的方法。

**[例 1.1]** 论域  $X = \{\text{张三, 李四, 王五, 赵六}\}$ ,  $X$  中四个人的身高依次为 180cm, 165cm, 175cm 和 195cm,  $X$  上的模糊现象  $A=$ 高个子,则  $A$  的模糊集合可表示为

$$A = \frac{0.7}{\text{张三}} + \frac{0.3}{\text{李四}} + \frac{0.5}{\text{王五}} + \frac{0.9}{\text{赵六}}$$

式中“0.7/张三”表示张三具有现象“高个子”的程度为 0.7,其余三项类推。如果  $X$  中四个人的体重分别是 81kg, 70kg, 68kg 和 100kg,则按照保健医学中标准体重公式

$$\text{标准体重(kg)} = \text{身高(cm)} - 100$$



可估算出  $X$  上模糊现象  $B$  = 体重正常的模糊集合为

$$B = \frac{0.5}{\text{张三}} + \frac{0.125}{\text{李四}} + \frac{0.0625}{\text{王五}} + \frac{0.03125}{\text{赵六}}$$

估算公式取作

$$B(x) = 2^{-|x \text{的体重} - x \text{的身高所相应的标准体重}|}$$

比如

$$B(\text{张三}) = 2^{-|81 - (180 - 100)|} = 2^{-1} = 0.5$$

$$B(\text{赵六}) = 2^{-|100 - (195 - 100)|} = 2^{-5} = 0.03125$$

上述表达模糊集合  $A$  和  $B$  的方法是 L. A. Zadeh. 曾采用的, 为了方便计算可将  $A$  和  $B$  用矢量形式表示为

$$A = (0.7, 0.3, 0.5, 0.9)$$

$$B = (0.5, 0.125, 0.0625, 0.03125)$$

当  $X$  为无限可列集合时, 例 1.1 的表示方法依然有效, 但当  $X$  为不可数无穷多集合时就不能再使用了, 这时要根据具体问题给出相应的隶属函数表达式。在第二节中将介绍若干常用的隶属函数类型, 本节只以下面的例子做一说明。

[例 1.2] 《海外星云》杂志 1996 年第 18 期和《读者》1996 年第 10 期有文章谈到人的头发时指出, 一般人大约有 100 000 根头发, 红发人有 90 000 根头发, 金发人有 140 000 根头发。用  $X_1$ 、 $X_2$  和  $X_3$  分别表示一般人、红发人和金发人的头发论域  $[0, 100\ 000]$ 、 $[0, 90\ 000]$  和  $[0, 140\ 000]$  时, 现象  $A_i$  = 秃子显然是  $X_1$ 、 $X_2$  和  $X_3$  上的模糊集合, 它们的隶属函数分别为

$$A_1(x) = \frac{100\ 000 - x}{100\ 000} \quad x \in X_1$$

$$A_2(x) = \frac{90\ 000 - x}{90\ 000} \quad x \in X_2$$

$$A_3(x) = \frac{140\ 000 - x}{140\ 000} \quad x \in X_3$$

(本例中构造隶属函数时采用的是直线方程,其优点是计算简单,其缺点是从纯秃到有某种程度的非秃的速率大于0,这一点似乎并不切合实际。在下节中给出选用的隶属函数形式,如S型曲线。)

## 第二节 隶属函数的类型

上节的两个例子分别说明了论域  $X$  为有限和实数区间时隶属函数的表达式,本节主要针对  $X$  是实数空间时的几种重要的隶属函数类型给出构造格式并对其应用范围加以说明。

### 一、折线型隶属函数

这类隶属函数主要由直线方程表示,按照它们的函数图像的形状又可分为半矩形、矩形、三角形、半梯形和梯形分布。

#### (一) 半矩形隶属函数 $A_a$

$$A_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{当 } x < a \\ 0 & \text{当 } x \geq a \end{cases}$$

它反映的是普通现象,其外延是  $(-\infty, a)$ 。当  $X$  表示考试成绩时,  $A =$  不及格的隶属函数可取作  $A_{50}(x)$ 。见图 1-1a

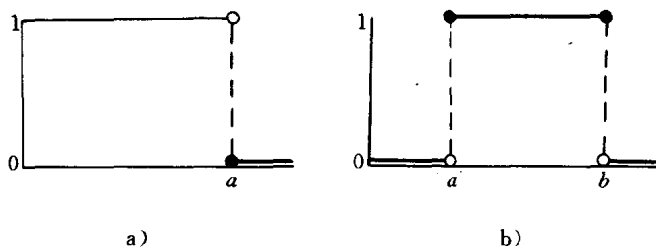


图 1-1 半矩形和矩形隶属函数

#### (二) 矩形隶属函数 $A_a^b$

$$A_a^b(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & a \leq x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

$A_a^b$  反映的是外延为  $[a, b]$  的普通现象, 它也可以用半矩形隶属函数表示为  $(A_a^a \cap A_b^b) \cup \{b\}$ 。见图 1-1b

### (三) 三角形隶属函数

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a-l \\ \frac{1}{l}(x-a+l) & a-l < x < a \\ 1 & x = a \\ \frac{1}{l}(a+l-x) & a < x < a+l \\ 0 & x \geq a+l \end{cases}$$

这种隶属函数较适用于将普通现象或标准范围边界模糊化。见图 1-2a。

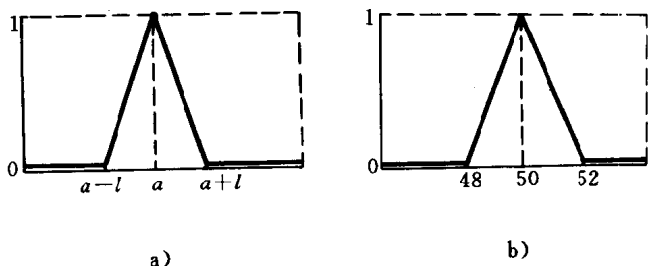


图 1-2 三角形隶属函数

**[例 1.3]** 对机件加工时, 标准值为 50, 标准允许范围是  $[48, 52]$  时, 采用下面的三角形隶属函数后可将加工精度标准允许范围边界模糊化

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x < 48 \\ \frac{1}{2}(x-48) & 48 \leq x < 50 \\ \frac{1}{2}(52-x) & 50 \leq x \leq 52 \\ 0 & x > 52 \end{cases}$$

它的图像见图 1-2b。

#### (四) 半梯形隶属函数

$$A_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

和

$$A_2(x) = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ \frac{a_2-x}{a_2-a_1} & a < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

这两种形式的图形见图 1-3a 和 b, 它们适用于由某种计量值为论域或所界定的现象, 如下面的例 1.4。

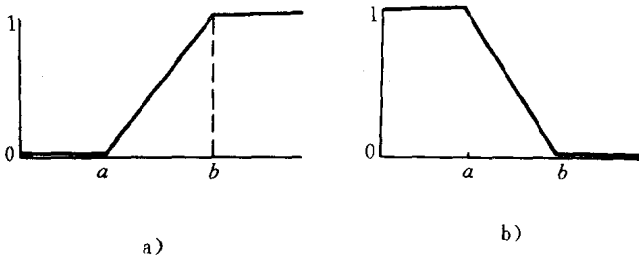


图 1-3 梯形隶属函数

**[例 1.4]** 假设衡量某产品质量是按某种指标衡量, 产

品在该指标下的值小于 10 个单位时为次品、大于 20 个单位时为合格品。取指标取值范围  $X=[0,40]$  为论域时,用半梯形隶属函数构造的  $X$  的现象“次品”和“合格品”的隶属函数如下

$$\text{次品}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{10}(20-x) & 10 < x < 20 \\ 0 & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

$$\text{合格品}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 10 \\ \frac{1}{10}(x-10) & 10 < x < 20 \\ 1 & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

它们的图形为图 1-4。

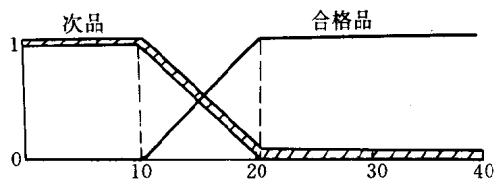


图 1-4 “次品”与“合格品”的图示

#### (五) 梯形隶属函数

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{c-a}(x-a) & a < x \leq c \\ 1 & c < x < d \\ \frac{1}{d-b}(x-b) & d \leq x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

其图形为图 1-5,它适用于将标准区间的边界进行模糊化的问题,比如例 1.5 中的抗压问题。

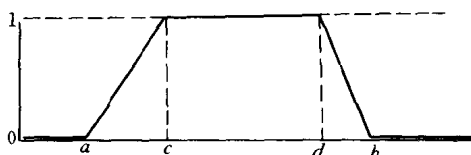


图 1-5 梯形隶属函数

## [例 1.5]

设  $X=[0,300]$  为岩石的抗压强度论域, 单位是 MPa, 设  $X$  上有 5 个模糊现象  $A_1$  = 抗压性很差、 $A_2$  =

差、 $A_3$  = 一般、 $A_4$  = 好、 $A_5$  = 很好。这 5 个现象的特征是, 它们依次在下列 5 个区间内是绝对现象:  $[0, 10]$ 、 $[20, 40]$ 、 $[60, 90]$ 、 $[110, 180]$  和  $[220, 300]$ , 而对于任一现象而言其绝对区间之外的点的状况便可用半梯形(如  $A_1$  和  $A_5$ )和梯形隶属函数来表示了, 省去它们的代数式(留给读者)而仅用图 1-6 说明。

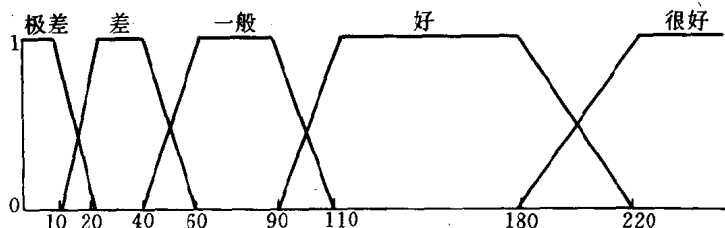


图 1-6 岩石抗压各现象图示

## 二、曲线型隶属函数

与折线型隶属函数不同的是这类函数中含有非直线段的部分, 在许多场合都或多或少地避免了折线具有固定斜率的缺欠。

## (一) S 型隶属函数

S 型隶属函数的图形像一个拉扁了的英文字母 S, 它的

特点是在两端是普通的而中段是用两支抛物线段模糊的,可以采用两种形式

$$A_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a < x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

和

$$A_2(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ 1 - 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & a < x < \frac{a+b}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{a+b}{2} \\ 2\left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & \frac{a+b}{2} < x < b \\ 0 & x \geq b \end{cases}$$

$A_1$  和  $A_2$  的图形见图 1-7a 和 b。

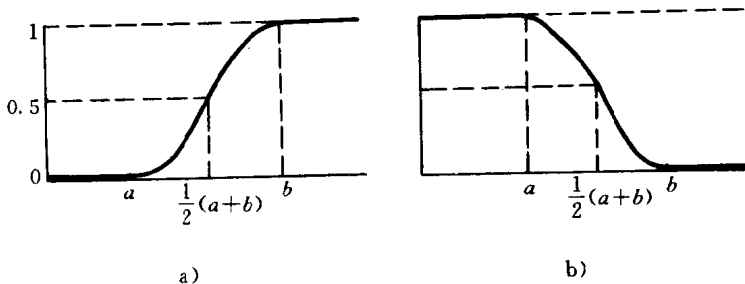


图 1-7 S型隶属函数图示

[例 1.6] 某行业中工人工龄少于 5 年的为青年工人、

工龄大于 20 年的为老工人, 求  $A$  = 青年工人和  $B$  = 老工人这两个模糊现象在工龄论域  $X = [0, 40]$  上的隶属函数。由于工龄大于 5 年后开始逐渐成为熟练工人, 如果采用梯形隶属函数则在  $x = 5$  处的斜率为  $1/(20-5) = 1/15$ , 说明工龄超过 5 年后立即以  $1/15$  的速度趋于成熟, 这个速度显然不合理。如果采用  $S$  型函数, 它在  $x = 5$  的斜率为 0, 而在  $x$  大于 5 时其成熟的速度(斜率)是逐渐放大的, 所以采用下面的  $S$  型函数得

$$A(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 5 \\ 1 - 2\left(\frac{x-5}{15}\right)^2 & 5 < x < 12\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = 12\frac{1}{2} \\ 2\left(\frac{x-20}{15}\right)^2 & 12\frac{1}{2} < x < 20 \\ 0 & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq 5 \\ 2\left(\frac{x-5}{15}\right)^2 & 5 < x < 12\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & x = 12\frac{1}{2} \\ 1 - 2\left(\frac{x-20}{15}\right)^2 & 12\frac{1}{2} < x < 20 \\ 1 & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$$

青年工人和老工人的图形如图 1-8a 和 b。

## (二) 柯西型隶属函数

$$A(x) = \frac{1}{1 + a(x-a)^\beta}$$

式中  $a > 0$ ,  $\beta$  为偶数,  $a$  为实数。



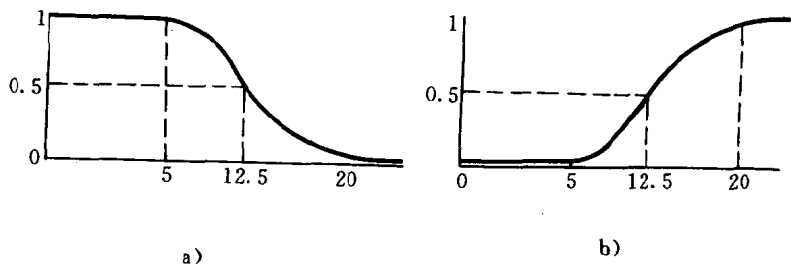


图 1-8 青年工人和老工人的隶属函数

**【例 1.7】** 在论域  $X = (-\infty, +\infty)$  上现象  $A =$  “约等于 5” 的隶属函数可以取为

$$A(x) = \frac{1}{1 + (x-5)^2}$$

柯西型隶属函数的图像如图 1-9。

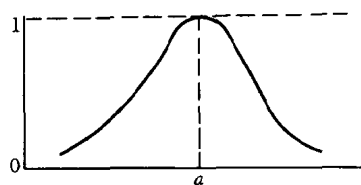


图 1-9 柯西型隶属函数的图

(三) 半柯西型隶属函数

$$A(x) = \begin{cases} 1 & x \leq a \\ \frac{1}{1 + a(x-a)^\beta} & x > a \end{cases}$$

和

$$B(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{1}{1 + a(x-a)^\beta} & x > a \end{cases}$$

式中  $a > 0, a$  为实数,  $\beta$  为偶数。它们的图形如图 1-10a 和 b。

**【例 1.8】** 在年龄论域  $X = [0, 200]$  上, 模糊现象  $A =$  青年和  $B =$  老年可以定义为下面用两种不同形式的半柯西型函