高等学校试用教材

高等数学

下册

（第一分册）

西安交通大学高等数学教研室编

人民教育出版社

目　　录

第九章 行列式与向量代数

这一章我们介绍数学中两个重要的概念：行列式与向量. 它们不仅是学习多元函数微积分不可缺少的基础，而且也是数学其他各分支以及力学,电学等其他各门自然科学中常用的工具.

§1 行列式与线性方程组

1-1 二元线性方程组与二阶行列式

行列式的提出和应用,都与线性方程组密切相关,我们首先从大家熟悉的二元线性方程组引出二阶行列式. 考虑二元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=h_1 \\ a_2x+b_2y=h_2 \end{cases} \tag{9-1}$$

使用消去法,从方程组(9-1)中消去 y, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=h_1b_2-h_2b_1 \tag{9-2}$$

消去 x, 得

$$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1h_2-a_2h_1 \tag{9-3}$$

如果 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$, 那末就得到方程组(9-1)唯一的一组解:

$$x=\frac{h_1b_2-h_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1h_2-a_2h_1}{a_1b_2-a_2b_1} \tag{9-4}$$

解(9-4)中,分母和分子的表达式:

$$a_1b_2-a_2b_1,\ h_1b_2-h_2b_1,\ a_1h_2-a_2h_1$$

在形式上是类似的，我们引用一种新的符号把它们写成更简明的形式.

定义 设有四个数 a_1, a_2, b_1, b_2 排成一个方阵:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}$$

数值 $a_1b_2-a_2b_1$ 称为对应于这方阵的**二阶行列式**, 记作

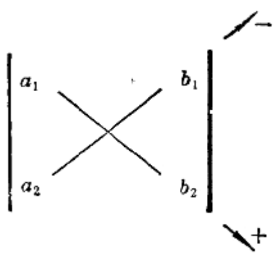
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

这就是说

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1}$$

这些数: a_1, a_2, b_1, b_2 各称为行列式的**元素**, 横排称为**行**, 竖排称为**列**.

按照定义, 要算出一个二阶行列式, 只须在对角方向先把左上角与右下角的元素相乘, 得到 a_1b_2, 再把左下角与右上角的元素相乘, 得到 a_2b_1, 然后由前者减去后者. 这个计算过程, 有时称为行列式的展开, 可以图解如下, 以便记忆:



例 1 $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=4(-6)-2(-3)=-24+6=-18.$

现在我们利用行列式来表出方程组(9-1)的解. 记

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}$$

当 $D\neq 0$ 时，则由(9-4)，解可写为下列形式

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \tag{9-5}$$

D 称为(9-1)的**系数行列式**，它是由(9-1)中 x, y 的系数按原来位置组成的. D_x 和 D_y 也很好记忆，用常数项分别换去 D 的第一列和第二列即可得到.

例 2 求解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y=8 \\ 3x+y=1 \end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-3(-3)=2+9=11$

$$D_x=\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=8\cdot 1-1(-3)=8+3=11$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot 1-3\cdot 8=2-24=-22$$

由(9-5)式，$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{11}{11}=1$, $y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-22}{11}=-2$.

练　习　1-1

1. 计算下列各二阶行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

2. 利用二阶行列式，求下列方程组的解:

(1) $\begin{cases} 3x-2y+13=0 \\ 8y+5x-1=0 \end{cases}$　　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 2x^2-3y^2=5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-4y+7z=0 \\ 2x+3y+6z=0 \end{cases}$　　　(4) $\begin{cases} 2x-y=0 \\ -4x+2y=0 \end{cases}$

3. 利用二阶行列式的定义证明二阶行列式的以下简单性质:

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a_1+c_1 & b_1 \\ a_2+c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$

1-2 三阶行列式

用二阶行列式来表示二元线性方程组的解,形式简洁,便于记忆,我们希望把它推广到三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=h_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=h_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=h_3 \end{cases} \tag{9-6}$$

为此,首先要把行列式概念从二阶推广到三阶.

定义 设有九个数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 排成一个方阵:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

数值 $a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ 称为对应于这方阵的三阶行列式,记作

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{9-7}$$

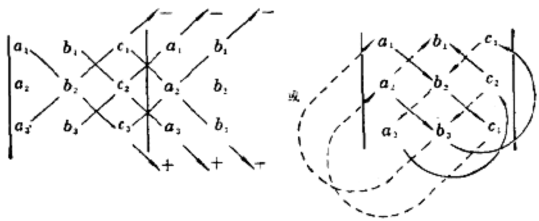
即 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \tag{9-8}$$

按照这个定义,由九个元素排成三行三列的三阶行列式有展

开式:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - \\ - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2} \tag{9-9}$$

要得到这个展开式，我们也有很简便的记忆方法，图解如下:



(a) (b)

这就是说，在(a)中先在行列式的右侧重复添上第一，二两列，然后把各对角线上的元素相乘并分别添上所指出的正负号，一起相加。此法不易出错，但在实际演算中每次写出也有不便之处，因此我们再介绍一种记忆法如(b)：实线上三个元素相乘都带正号，虚线上三个元素相乘都带负号，然后一起相加。

例 1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (27+2+4)-(3+6+12)=12$

由三阶行列式定义(9-8)可见，它可以用二阶行列式的线性式来表示，因此二阶行列式跟三阶行列式有着密切的关系。为了进一步说明它们的内在联系，我们要给这些二阶行列式一些特殊的名称。

如果从三阶行列式 (9-7) 中把以某一元素为交叉点的一行与一列去掉，那末，由剩下来的元素不变动位置而组成的二阶行列式称为原行列式对应于这一元素的**余子式**。例如对应于 b_3 的余子式是

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

如果在对应于某一元素的余子式的前面，再依照这元素所在的行数 i 与列数 j 之和 $i+j$ 是偶数或奇数，相应地添上正号或负号，即乘以$(-1)^{i+j}$，那末所得到的结果称为对应于这一元素的**代数余子式**. 当元素用小写字母表示时，对应的代数余子式通常就记作同一字母的大写. 例如，对应于元素 b_3 的代数余子式是

$$B_3=-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

这样，如果我们把三阶行列式(9-7)简记作 D，定义(9-8)便可写成

$$D=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1$$

其中 A_1, B_1, C_1 分别是对应于 a_1, b_1, c_1 的代数余子式. 这就是说，取第一行各元素与其对应代数余子式的乘积之和，结果就是原来的行列式.

根据代数余子式的定义及展开式(9-9)，立即可以推得下面两个关于三阶行列式的重要性质:

1° 任何一行(或一列)元素与其对应代数余子式的乘积之和等于原来的行列式.

2° 任何一行(或一列)元素与另一行(或另一列)元素的对应代数余子式的乘积之和等于零.

例如，

$$\begin{aligned} b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 &= -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= -a_2b_1c_3+a_3b_1c_2+a_1b_2c_3-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1 \\ &= D \end{aligned}$$

$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3$$

$$=b_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$$

由 1°，我们可以把任何行列式写成某一行(或一列)元素与其对应的代数余子式的乘积之和．这叫做按某一行(或一列)展开．

现在，我们利用三阶行列式来解方程组(9-6)．

$$\text{记}\quad D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad D_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}$$

依次以代数余子式 A_1，A_2, A_3 乘(9-6)中的三个方程，然后相加得

$$\begin{aligned}(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x&+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y\\&+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z\\=h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3&\end{aligned}$$

由 1°，可知上式 x 的系数等于 D，由 2°，可知 y 和 z 的系数都是零．而右端就是把 D 中的第一列的元素 a_1, a_2, a_3 换成 h_1，h_2, h_3 所得的行列式，即 D_x，于是

$$D\cdot x=D_x \tag{9-10}$$

类似地，以代数余子式 B_1, B_2, B_3 或 C_1, C_2, C_3 乘(9-6)中的三个方程后相加，可得

$$D\cdot y=D_y\ \text{或}\ D\cdot z=D_z \tag{9-11}$$

如果 $D\neq0$，那末

$$\boxed{x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}} \tag{9-12}$$

比较二元方程组的解(9-5)和三元方程组的解(9-12)，可以发现它们非常类似：当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一的一组解(9-5)或(9-12)．这种解线性方程组的方法称为**克兰姆**[①]**法则**.

例 2 求解方程组

$$\begin{cases}2x+y-z=0\\x-y+z=6\\x+2y+z=3\end{cases}$$

解 这方程组的系数行列式是

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1&1\\2&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}$$

$$=-6-3+0=-9\neq 0$$

由克兰姆法则，可知有唯一的一组解.

$$D_x=\begin{vmatrix}0&1&-1\\6&-1&1\\3&2&1\end{vmatrix}=-18,\quad D_y=\begin{vmatrix}2&0&-1\\1&6&1\\1&3&1\end{vmatrix}=9$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&-1&6\\1&2&3\end{vmatrix}=-27$$

故 $x=\frac{D_x}{D}=\frac{-18}{-9}=2,\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{9}{-9}=-1,\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-27}{-9}=3.$

如果 $D=0$，而 D_x, D_y, D_z 中至少有一个不为零，由(9-10)或(9-11)知方程组(9-6)无解；如果 $D=0$，且 $D_x=D_y=D_z=0$，则有无穷多组解.

---

① 克兰姆(G·Cramer, 1704—1752)，瑞士数学家.

例 3 求解方程组

$$\begin{cases}2x-y+z=1\\4x-2y-z=-1\\-6x+3y+4z=4\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&-2&-1\\-6&3&4\end{vmatrix}=0,\quad D_x=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&-2&-1\\4&3&4\end{vmatrix}=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2&1&1\\4&-1&-1\\-6&4&4\end{vmatrix}=0,\quad D_z=\begin{vmatrix}2&-1&1\\4&-2&-1\\-6&3&4\end{vmatrix}=0$$

故此方程组有无穷多组解. 下面我们来求这无穷多组解.

第一式乘 2 减去第二式, 得 $3z=3$, $z=1$, 代入方程组, 得到一个二元一次方程 $2x-y=0$, 令 $x=k$, 则 $y=2k$, 故解为 $x=k, y=2k$, $z=1$ (其中 k 为任意常数).

练　习　1-2

1. 计算下列各行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix}2&4&3\\-3&5&2\\1&1&-6\end{vmatrix}$　　　(2) $\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&3\\1&4&1\end{vmatrix}$

2. 设有三阶行列式 $\begin{vmatrix}2&0&-1\\3&4&2\\-7&5&6\end{vmatrix}$, 求出元素 4 和 5 的余子式和代数余子式.

3. 解下列方程:

(1) $\begin{vmatrix}x^2&4&9\\x&2&3\\1&1&1\end{vmatrix}=0$　　　(2) $\begin{vmatrix}x&2&x\\5&12&3\\2&5&1\end{vmatrix}=0$

4. 按适当的行(或列)展开,计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 10 & 1 & 9 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

5. 用行列式解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 3x+2y+z=12 \\ x-z=-2 \\ y+z=5 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ 4x-2y-z=-1 \\ -6x+3y+4z=0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x+2y+4z=4 \\ 3x+3y+6z=6 \end{cases}$

1-3　三阶行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题,但直接按定义计算很麻烦.从三阶行列式来看,按定义它有六项,而每一项要作两次乘法,计算它就要作 $6\times2=12$ 次乘法,相当费时. 为了简化行列式的计算及对行列式有更深入的了解,必须对行列式的性质作进一步的探讨. 下面我们就来讨论三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

的主要性质. 实际上, 在 1-2 中我们已经介绍了三阶行列式的两个性质.

1° 顺次对调 D 的行与列, 那末对调后所得的行列式的值与 D 的值相等. 即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

我们只须把左端的行列式展开, 即可验证它与展开式 (9-9) 完全

一样.

由此可知，关于行列式的其他性质，如果已对行(或列)成立，也就对列(或行)成立.

2° 对调D的任何两行(或两列)，那末对调后所得的行列式的绝对值与D的绝对值相等而符号相反. 例如，对调第一列与第三列的结果是

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因为把左端的行列式按第三列展开,得

$$a_1\begin{vmatrix} c_2 & b_2 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 + a_3b_2c_1 - a_1b_2c_3 - a_2b_3c_1 - a_3b_1c_2$$

与(9-9)式比较,各项符号都相反.

3° 如果在D中有一行(或一列)的元素全是零，那末D等于零. 这是显而易见的，因为根据1-2 性质 1°, D可对这全是零的一行(或一列)展开.

4° 如果以数k乘D的任何一行(或一列)的各元素，那末所得的行列式的值等于k乘D的值. 例如,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因为把左端的行列式按第二行展开,得

$$ka_2A_2 + kb_2B_2 + kc_2C_2 = k(a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2) = kD$$

5° 如果在D中有两行(或两列)的对应元素彼此成比例，那末D等于零. 例如,$a_i = kc_i\,(i=1,2,3)$, 易证

$$D=\begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

因为由性质 4° 可知

$$D=k\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

在这个行列式中，第一列与第三列完全相同，因而把这两列对调后，行列式不变．但根据 2°，对调两列，行列式又应当变号．因此，$D=-D$，即 $2D=0$，于是得 $D=0$．

6° 如果在 D 中有某一行(或一列)的各元素都是两项之和，那么 D 等于另外两个三阶行列式之和，这两个行列式的各行(或列)的元素都与 D 相同，只有所说的某一行(或一列)的元素各取原来两项之和中的一项．例如，$a_i=a_i'+a_i''(i=1,2,3)$，易证

$$\begin{vmatrix} a_1'+a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'+a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'+a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

因为把等式两端的行列式都按第一列展开就得到下列等式：

$$\begin{aligned}&(a_1'+a_1'')A_1+(a_2'+a_2'')A_2+(a_3'+a_3'')A_3\\&=(a_1'A_1+a_2'A_2+a_3'A_3)+(a_1''A_1+a_2''A_2+a_3''A_3)\end{aligned}$$

7° 把 D 的某一行(或一列)元素乘以同一个数后加到另外一行(或一列)的对应元素上去，那末所得的行列式的值与 D 的值相等．例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & ka_1+b_1 & c_1 \\ a_2 & ka_2+b_2 & c_2 \\ a_3 & ka_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

这可以从性质 6° 与 5° 推知．

应用上述各项性质，行列式的计算就可以简化.

例 1

$$\begin{vmatrix}2&3&4\\1&2&5\\4&7&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&4\\1&0&5\\4&-1&6\end{vmatrix}\text{（把第一列乘上}-2\text{后加到第二列上去）}$$

$$=\begin{vmatrix}2&-1&-6\\1&0&0\\4&-1&-14\end{vmatrix}\text{（把第一列乘上}-5\text{后加到第三列上去）}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&-6\\-1&-14\end{vmatrix}\text{（按第二行展开）}$$

$$=-8$$

在利用行列式的性质简化行列式的计算时，通常是象例 1 那样，让同一行(或一列)中的零元素增多. 然后按这一行(或列)展开.

例 2

$$\begin{vmatrix}1&x&x^2\\1&y&y^2\\1&z&z^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&x&x^2\\0&y-x&y^2-x^2\\1&z&z^2\end{vmatrix}\text{（把第一行乘上}-1\text{后加到第二行上去）}$$

$$=\begin{vmatrix}1&x&x^2\\0&y-x&y^2-x^2\\0&z-x&z^2-x^2\end{vmatrix}\text{（把第一行乘上}-1\text{后加到第三行上去）}$$

$$=\begin{vmatrix}y-x&y^2-x^2\\z-x&z^2-x^2\end{vmatrix}\text{（按第一列展开）}$$

$$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1&y+x\\1&z+x\end{vmatrix}\text{（分别提出第一行和第二行的公因式）}$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y)=(x-y)(y-z)(z-x)$$

在一些特殊情形，可以利用行列式的性质，把行列式变形后直