



# 应用塑性力学

崔世杰 张清杰 编著

河南科学技术出版社

0344  
C97

# 应用塑性力学

崔世杰 张清杰 编著



河南科学技术出版社

内 容 简 介

本书共分三部分：第一部分为前八章，介绍了弹-塑性问题的基本特征和塑性理论的核心内容——屈服条件、本构关系和强化规律，以及一些简单的弹-塑性问题；第二部分为第九章，系统地阐述了非线性问题的有限元数值分析方法；第三部分则在后五章中分别给出了一维弹-塑性问题、梁弯曲问题、二维弹-塑性问题和板的弯曲问题的弹-塑性有限元程序设计，并提供了相应的带有详细注释说明的计算机程序。

本书可供力学、建筑结构工程、机械设计、船舶与海洋工程以及金属压力加工等专业的高年级本科生、研究生、教师以及科研人员和工程设计人员参考。

豫新登字 02 号

应用塑性力学

崔世杰、张清杰 编著

责任编辑 封延阳

河南科学技术出版社出版

华中理工大学印刷厂印刷

河南省新华书店发行

787×1092 毫米 16 开本 29 印张 671 千字

1992 年 6 月第 1 版 1992 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—1000 册

ISBN 7—5349—0913—9/T·185

定 价：14.80 元

## 序

塑性理论与有限元的结合,大大拓展了塑性力学的应用范围,使得人们有可能借助计算机对复杂的工程结构按塑性进行设计。然而,塑性问题本身的复杂性(本构关系的非线性、变形路径的不可逆性和应力-应变的非单值对应关系等)使得从塑性理论、数值方法到设计出适用的弹-塑性分析程序这个过渡并不是一件简单的事情,其中还有很多问题需要解决。目前在塑性力学领域,无论从基本理论还是在数值方法方面都已出版了不少优秀著作,但令人感到不足的是完整系统地介绍塑性力学的理论和弹-塑性程序设计,从而能使人们用不太多的时间来完成由理论到应用这一过渡的书籍还很少见到。

《应用塑性力学》一书的作者在这一方面做出了一些有益的尝试。该书在集中介绍塑性力学基本理论之后自然过渡到非线性有限元分析方法,之后着重阐述了弹-塑性程序设计中的关键性问题(如弹-塑性区的划分,过渡区、塑性区及卸载区的应力计算等),系统地叙述了程序设计的实施过程,并提供了典型的梁、板结构弹-塑性分析程序和详细的注释说明。该书的这一特点对于从事结构弹-塑性设计和研究的工程技术人员、科研工作者和高等院校教师来说,可以明显减少用于开发弹-塑性分析软件上的时间和精力。读者既能利用书中提供的程序对梁、板结构进行弹-塑性设计,又可以根据需要,将这些程序稍加改动移植到自己的研究工作中去。另一方面,该书内容的这种取材对于要求在有限的学时内不仅学习塑性力学基本理论,又要掌握非线性有限元分析方法和弹-塑性程序设计内容的工科院校本科生和研究生来说,无疑是一本非常合适的参考书。

该书的作者在试图缩短塑性理论与应用之间的距离方面做出了很大的努力。我相信,这本《应用塑性力学》的出版,对于从事塑性力学学习、教学、研究与设计的广大读者来说,是一件十分有益的事情。

钟 伟 芳

## 前 言

这是一本取材不同于已有塑性力学著作的塑性力学书籍。该书试图在缩短塑性力学基本理论、有限元分析方法、弹-塑性程序设计和工程应用这四个环节之间的距离,将它们有机地溶为一体方面做出一种新的尝试。

目前在我国,塑性力学有限单元法已成为高等院校中固体力学专业、机械类力学专业本科生和有关专业研究生必修的一门课程。在工程应用方面,该方法亦已成为结构工程师们对复杂结构进行弹-塑性设计计算的一种强有力的分析工具。基于这一形势,在近几年国内出版的塑性力学和有限单元法的专著中,大都不同程度地对塑性力学的有限单元分析方法做了一些介绍,只是这些介绍多限于方法的一般性论述,很少就具体问题加以讨论,更少涉及到方法的具体实施过程和程序设计方面的问题。

从事过有限元程序设计的人们都有这样一种共同的体会,即熟悉有限元分析方法和在计算机上实施与实现这种方法之间仍有一个巨大的鸿沟,对于结构的塑性分析更是如此。正是由于这一原因,从事塑性力学有限元教学的教师和学习这一课程的学生们感到需要这样一种参考书,它除了系统地阐述塑性力学有限单元方法的基本理论之外,还能够详细地介绍这一方法在程序设计中的具体实施过程,特别是还能够对一些典型的弹-塑性问题提供带有详细注释说明的计算机程序,以帮助他们在有限的学时内有效地完成这一难度较大的课程的讲授和学习任务。也正是由于这一原因,从事实际工程结构设计的结构工程师们希望能有这样一本参考书,它能够简明扼要地讲清楚塑性力学的基本理论,避免复杂数学推导地介绍塑性力学和有限单元方法,并对一些常见的工程结构构件提供带有详细注释说明的弹-塑性分析程序,以使他们在繁忙的工作中花费不多的时间走完从理论到方法再到应用这样一段较长的路程,迅速掌握弹-塑性问题有限元分析这一有力工具,在设计工作中取为已用。然而遗憾的是,目前在我国,能满足这两大方面需求的书籍还很缺乏。本书的目的也正是试图在这一方面做出一些努力。

基于这种基本的指导思想,该书的内容安排大致是这样的:前面用近三分之一的篇幅集中介绍塑性力学的基本理论和一些典型的弹-塑性问题的理论分析方法,紧接着对非线性有限元分析方法做了系统的介绍,并以大量的篇幅从一维问题到二维问题、从梁的弯曲问题到板的弯曲问题由浅入深地详尽阐述了这些弹-塑性问题的有限元程序设计,并相应提供了完整的带有详细注释说明的计算机分析程序。

我们试图在缩小塑性力学的理论和应用之间的距离方面做出一些尝试。然而,书稿完成了,抚卷自思,这个目标到底达到了多少?会不会对读者有一点裨益?心中不禁怅然。如果本书对读者在教学、学习和工作方面能有点滴之帮助,作者将深感快慰;更由于作者水平有限,如果读者能够不吝建议和指正,我们将倍加感激!

最后,对河南科学技术出版社为本书的出版所给予的大力支持致以我们诚挚的谢意!

作 者

1989年2月26日于华中理工大学

# 目 录

|     |                                 |    |
|-----|---------------------------------|----|
| 1   | 金属材料的基本塑性性质及三杆桁架的弹-塑性平衡问题 ..... | 1  |
| 1.1 | 金属材料的单向拉伸应力-应变曲线及其简化 .....      | 1  |
| 1.2 | 金属材料的基本塑性特征 .....               | 5  |
| 1.3 | 单向应力状态下金属材料的本构方程 .....          | 9  |
| 1.4 | 三杆桁架的弹-塑性平衡问题 .....             | 12 |
| 1.5 | 三杆桁架在卸载后的残余应力和残余变形 .....        | 14 |
| 1.6 | 加载路径的影响 .....                   | 15 |
| 2   | 应力状态和应变状态分析及布里奇曼试验 .....        | 20 |
| 2.1 | 应力状态分析及有关的方程 .....              | 20 |
| 2.2 | 应力空间, $\pi$ 平面 .....            | 27 |
| 2.3 | 应变状态分析及有关方程 .....               | 30 |
| 2.4 | 布里奇曼(Bridgman)试验和体积弹性定理 .....   | 34 |
| 3   | 屈服条件 .....                      | 36 |
| 3.1 | 概述 .....                        | 36 |
| 3.2 | 初始屈服条件, 初始屈服面的一般性讨论 .....       | 36 |
| 3.3 | 两个常用的(初始)屈服条件 .....             | 38 |
| 3.4 | 后继屈服条件, 强化规律 .....              | 50 |
| 3.5 | 德鲁克尔(Drucker)强化公设 .....         | 58 |
| 4   | 塑性应力-应变关系——增量理论 .....           | 63 |
| 4.1 | 概述 .....                        | 63 |
| 4.2 | 加载与卸载准则 .....                   | 64 |
| 4.3 | 理想弹-塑性材料的应力-应变关系 .....          | 65 |
| 4.4 | 强化材料塑性流动规律的一般形式 .....           | 73 |
| 4.5 | 强化材料的应力-应变关系 .....              | 75 |
| 5   | 塑性应力-应变关系——全量理论 .....           | 81 |
| 5.1 | 增量理论在简单加载条件下的积分 .....           | 81 |

|      |                                   |     |
|------|-----------------------------------|-----|
| 5.2  | 全量理论的一般性讨论                        | 84  |
| 5.3  | 简单加载定理                            | 88  |
| 5.4  | 卸载问题                              | 90  |
| 6    | 复合应力状态下的简单弹-塑性问题                  | 92  |
| 6.1  | 概述                                | 92  |
| 6.2  | 薄壁圆筒在拉伸和扭转联合作用下的弹-塑性问题            | 94  |
| 6.3  | 环形薄板和有圆孔的大薄板在均匀内压作用下的弹-塑性问题       | 105 |
| 6.4  | 理想弹-塑性材料厚壁圆筒在均匀内压作用下的弹-塑性问题       | 114 |
| 6.5  | 强化材料厚壁圆筒在均匀内压作用下的应力和变形            | 122 |
| 7    | 梁的弹-塑性平面弯曲                        | 125 |
| 7.1  | 基本假设和问题的特征                        | 125 |
| 7.2  | 理想弹-塑性梁的平面弯曲                      | 129 |
| 7.3  | 强化材料梁的弹-塑性平面弯曲                    | 143 |
| 8    | 直杆的弹-塑性扭转                         | 147 |
| 8.1  | 自由扭转的基本方程                         | 147 |
| 8.2  | 理想弹-塑性直杆的全塑性扭转                    | 150 |
| 8.3  | 理想弹-塑性杆件的弹-塑性扭转                   | 153 |
| 8.4  | 强化材料杆件的扭转                         | 159 |
| 9    | 非线性有限元分析方法                        | 164 |
| 9.1  | 概述                                | 164 |
| 9.2  | 线弹性问题的有限元分析概要                     | 166 |
| 9.3  | 几何非线性问题的基本方程                      | 168 |
| 9.4  | 非线性方程的求解方法                        | 171 |
| 9.5  | 材料非线性问题的基本方程                      | 179 |
| 9.6  | 弹-塑性刚度矩阵及单元应力的计算                  | 181 |
| 9.7  | 双重非线性问题的有限元数值分析方法                 | 186 |
| 10   | 一维弹-塑性问题的有限元分析及其计算程序              | 189 |
| 10.1 | 概述                                | 189 |
| 10.2 | 一维弹-塑性问题的基本理论                     | 190 |
| 10.3 | 基本方程的求解,切线刚度矩阵的计算                 | 194 |
| 10.4 | 求解一维弹-塑性问题的程序结构,主程序 UNIDIM        | 195 |
| 10.5 | 数据输入子例行程序 DATA                    | 198 |
| 10.6 | 选择算法子例行程序 NONAL 和置初值子例行程序 INITIAL | 202 |

|       |                                    |            |
|-------|------------------------------------|------------|
| 10.7  | 载荷增量子例行程序 INCLOD .....             | 205        |
| 10.8  | 方程的组合与求解子例行程序 .....                | 206        |
| 10.9  | 输出结果子例行程序 RESULT .....             | 213        |
| 10.10 | 单元刚度矩阵的计算子例行程序 STIFF .....         | 214        |
| 10.11 | 等效节点力计算子例行程序 REFOR .....           | 215        |
| 10.12 | 检查求解收敛性子例行程序 CONUND .....          | 220        |
| 10.13 | 计算实例 .....                         | 222        |
| 11    | <b>梁的弹-塑性平面弯曲有限元分析及其计算程序 .....</b> | <b>224</b> |
| 11.1  | 概述 .....                           | 224        |
| 11.2  | 欧拉-贝努利梁理论和铁摩辛柯梁理论 .....            | 225        |
| 11.3  | 虚功方程的有限元离散化 .....                  | 230        |
| 11.4  | 弹-塑性不分层梁的有限元分析 .....               | 233        |
| 11.5  | 弹-塑性不分层梁分析的计算程序 .....              | 240        |
| 11.6  | 弹-塑性不分层梁的计算实例 .....                | 253        |
| 11.7  | 弹-塑性分层梁的有限元分析 .....                | 255        |
| 11.8  | 弹-塑性分层梁的计算程序 .....                 | 258        |
| 11.9  | 弹-塑性分层梁的计算实例 .....                 | 264        |
| 12    | <b>二维弹-塑性问题的有限元分析 .....</b>        | <b>266</b> |
| 12.1  | 概述 .....                           | 266        |
| 12.2  | 二维弹-塑性问题的虚功方程 .....                | 267        |
| 12.3  | 二维弹-塑性问题基本理论 .....                 | 272        |
| 12.4  | 二维问题的有限元离散化及弹-塑性理论的矩阵表示 .....      | 276        |
| 12.5  | 基本方程的求解,切线刚度矩阵的计算 .....            | 289        |
| 13    | <b>二维弹-塑性问题的计算程序 .....</b>         | <b>290</b> |
| 13.1  | 概述 .....                           | 290        |
| 13.2  | 二维弹-塑性问题的计算过程及程序结构 .....           | 292        |
| 13.3  | 二维线弹性分析的标准程序 .....                 | 296        |
| 13.4  | 弹-塑性有限元分析的标准程序 .....               | 325        |
| 13.5  | 二维弹-塑性分析的计算程序 .....                | 333        |
| 13.6  | 计算实例 .....                         | 352        |
| 14    | <b>板的弹-塑性弯曲有限元分析及计算程序 .....</b>    | <b>355</b> |
| 14.1  | 概述 .....                           | 355        |
| 14.2  | 明德林(Mindlin)板的线弹性有限元分析基本理论 .....   | 356        |
| 14.3  | 非线性明德林板的基本方程及其有限元离散化 .....         | 358        |

|                   |                                  |            |
|-------------------|----------------------------------|------------|
| 14.4              | 非线性方程的求解.....                    | 362        |
| 14.5              | 板的弹-塑性弯曲非分层法计算程序 .....           | 366        |
| 14.6              | 明德林板分层法计算程序.....                 | 398        |
| 14.7              | 计算实例.....                        | 414        |
| <b>附录 A</b>       | <b>变量(数组)名表汇编.....</b>           | <b>417</b> |
| <b>附录 B</b>       | <b>输入数据的填写方式与输入/输出文件实例 .....</b> | <b>423</b> |
| 附录 B1             | 一维弹-塑性问题的数据输入与输出 .....           | 423        |
| 附录 B2             | 弹-塑性不分层梁分析的数据准备与输入/输出文件 .....    | 430        |
| 附录 B3             | 弹-塑分层梁分析的数据准备和输入/输出文件 .....      | 434        |
| 附录 B4             | 二维弹-塑性问题的数据输入与输出结果 .....         | 438        |
| 附录 B5             | 板的平面弯曲问题的数据输入和输出结果 .....         | 477        |
| <b>参考文献</b> ..... |                                  | <b>457</b> |

# 1 金属材料的基本塑性性质及三杆桁架的弹-塑性平衡问题

本章将根据金属试件的单向拉伸试验结果,讨论金属材料进入塑性变形状态后的一些基本特征。同时通过三杆桁架这种最简单的结构,介绍弹-塑性平衡问题的分析方法,及其与弹性平衡问题的区别和特点。

## 1.1 金属材料的单向拉伸应力-应变曲线及其简化

金属材料的单向拉伸应力-应变曲线在一般的材料力学书籍中均有介绍。由于它是塑性力学中的一条基本实验曲线,在结构的塑性问题分析中起着重要的作用,因此,我们有必要首先对它作一个较为深入的讨论。

### 1.1.1 单向拉伸应力-应变曲线

图 1-1 是常温静载作用下低碳钢一类金属材料单向拉伸时的应力-应变曲线。图中的  $OA$  为直线段,应力-应变关系呈线性。过  $A$  点后直到  $B$  点,曲线呈现微弯曲,应力与应变之间为非线性关系。但在该段内材料仍是弹性的,因为在  $AB$  间的任意一点卸载时,变形仍能完全恢复。 $B$  点所对应的应力称为弹性极限。事实上, $A$ 、 $B$  两点相距很近,测出较为困难。过  $B$  点后,曲线出现跳跃现象,直到  $D$  点。这一阶段称为塑性流动阶段。 $E$  点为塑性流动阶段的最高点,称为流动上限; $C$  点为最

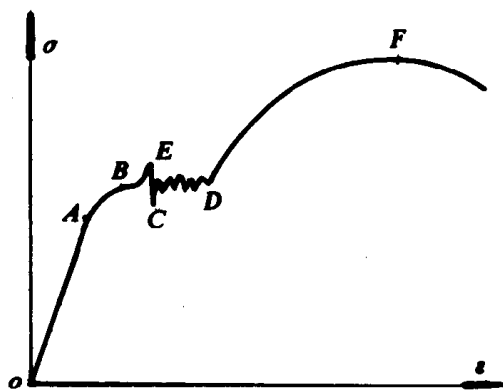


图 1-1 低碳钢材料单向拉伸曲线

低点,称为流动下限。实验资料表明, $C$  点是比较稳定的,因此,通常取  $C$  点所对应的应力为流动极限,以  $\sigma_s$  表示。对于光滑的试件,此时,可以看到在与轴线成  $45^\circ$  方向上有滑移线漂移。过  $D$  点后,曲线单调上升,直到  $F$  点。这一阶段称为材料的强化阶段(之所以称之为强化阶段,是因为在该阶段重复加载时材料的屈服极限将升高。这一特征将在后面予以讨论)。在  $F$  点附近,试件出现颈缩。在  $F$  点之后,曲线单调下降,试件处于不稳定状态。无论试件的应力水平是处于流动阶段、强化阶段,还是过  $F$  点之后的不稳定阶段,它们的一个共同特征是:在这些阶段中的任意一点卸载,试件的变形都不能完全恢复,也就是说,试件将保留一定的永久伸长,这一部分变形称为塑性变形。变形的不可恢复性是塑性的基本特征。

在实际应用时,常对图 1-1 进行一些简化。即把流动阶段简化成一水平线  $CD$ ,如图 1-2 所示,其中的  $D$  点为流动阶段的终点。该点所对应的应变,记为  $\varepsilon_s^*$ 。

还有一类金属材料,没有明显的屈服平台,如图 1-3 所示。对于这类材料,取永久变形(塑性变形)为 0.2% 时所对应的应力作为屈服极限,以  $\sigma_{0.2}$  表示。 $\sigma_{0.2}$  称为名义屈服极限。

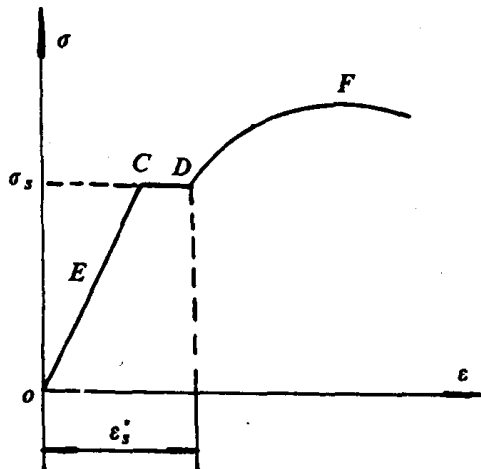


图 1-2 简化的单向拉伸曲线

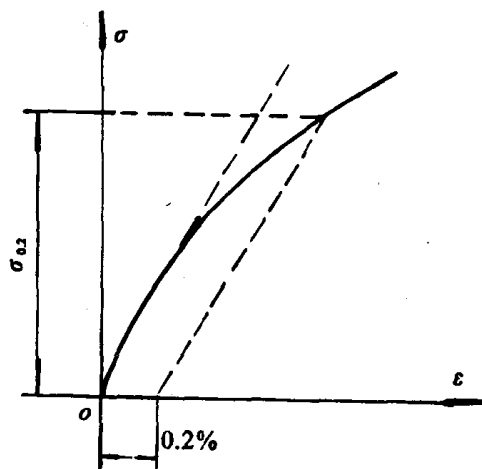


图 1-3 另一类金属材料单向拉伸时的应力-应变关系

以上讨论的是单向拉伸时的应力-应变曲线。在单向压缩的情况下,只要保证试件不失稳,也有类似的曲线。压缩时弹性极限和拉伸时的弹性极限接近相等。

### 1.1.2 应力-应变曲线的数学表达

在塑性理论中,为了便于求解,根据材料的简单拉伸实验曲线,建立应力-应变关系的某些数学公式是十分必要的。有许多学者从事这方面的研究,他们各自建立了不同形式的表达式。事实上,由图 1-2 可见,在弹性阶段,有  $\sigma = E\varepsilon$ ;在流动阶段,有  $\sigma = \sigma_s$ 。因此,这里所要处理的,主要是强化应力-应变关系的表达式。下面介绍几种常见的关系式。

#### 1.1.2.1 用伊留辛的 $\omega(\varepsilon)$ 函数表达应力-应变关系

图 1-4 为一单向拉伸试验曲线。 $M$  点的应力用  $\sigma_M$  表示,  $\sigma_M = \overline{MC} = \sigma$ 。该点的应变用  $\varepsilon_M$  表示,  $\varepsilon_M = \overline{OC} = \varepsilon$ 。由图示几何关系不难得到

$$\begin{aligned}\sigma_M = \sigma &= \overline{BC} - \overline{BM} = \overline{BC} \left(1 - \frac{\overline{BD} - \overline{DM}}{\overline{BC}}\right) \\ &= \text{tg} \alpha \cdot \varepsilon \left(1 - \frac{\text{tg} \alpha \cdot \overline{AD} - \text{tg} \beta \cdot \overline{AD}}{\varepsilon \cdot \text{tg} \alpha}\right) \\ &= E \cdot \varepsilon \left[1 - \frac{(E - E_1) \varepsilon - \varepsilon_s}{E \varepsilon}\right] \\ &= E \cdot \varepsilon \left[1 - \frac{(E - E_1)}{E} (1 - \varepsilon_s / \varepsilon)\right] \\ &= E \cdot \varepsilon [1 - \lambda (1 - \varepsilon_s / \varepsilon)] \\ &= E \cdot \varepsilon [1 - \omega(\varepsilon)]\end{aligned}\quad (1-1)$$

式中,  $E = \text{tg} \alpha$  为弹性模量;  $E_1 = \text{tg} \beta$  为硬化模量;  $\lambda = \frac{E - E_1}{E}$  称为强化参数;

$\omega(\varepsilon) = \lambda (1 - \varepsilon_s / \varepsilon)$  称为伊留辛函数。

事实上,考虑弹性阶段,式 1-1 也可描述整条拉伸应力-应变曲线:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s, \quad \omega(\varepsilon) = 0 \\ E\varepsilon[1 - \omega(\varepsilon)] & \varepsilon \geq \varepsilon_s, \quad \omega(\varepsilon) = \lambda(1 - \varepsilon_s/\varepsilon) \end{cases}$$

#### 1.1.2.2 用幂函数表达应力-应变关系

对于某些材料,其单向拉伸应力-应变曲线可用幂函数近似表示为

$$\sigma = \sigma_s(\varepsilon/\varepsilon_s)^m \quad (1-2)$$

其中, $m$  为材料常数。在纯弹性情况下, $m=1$ ;对于流动阶段或理想塑性材料, $m=0$ ;对一般强化材料, $0 < m < 1$ 。当  $0 < m < 1$  时,由于式 1-2 所描述的材料不存在弹性阶段,因此,该模型适合于应变较大的塑性问题。

#### 1.1.2.3 用特性函数 $\phi(\varepsilon)$ 表示应力-应变关系

用特性函数  $\phi(\varepsilon)$  描述单向拉伸实验曲线时,应力-应变关系可表述为

$$\sigma = \phi(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad (1-3)$$

其中, $\phi(\varepsilon)$  是材料的特性函数,基本上只取决于材料的性质,而与应力状态无关。

除上述三种关系式外,还有一些其他不同形式的表达式。在这些表达式中,采用了对数应变(用  $\epsilon$  表示)的形式,如刘德威克(P. Ludwik)提出: $\sigma = \sigma_s + H\epsilon^n$ ,其中  $H, n$  是材料常数;佛奥斯(E. Voce)提出: $\sigma = a + (b-a)(1 - e^{-n\epsilon})$ ,对于给定材料, $a, b, n$  为常数;斯韦弗特提出: $\sigma = c(a + \epsilon)^n$ ,其中  $a, c, n$  为材料常数,等等。限于篇幅,这里不一一列举了。

#### 1.1.3 关于材料的基本假设

在上面关于单向拉伸应力-应变曲线的讨论中,实际上我们已经对所考虑的材料进行了理想化,即引进了若干基本假设。

##### 1.1.3.1 关于材料基本性质的假设

我们假定材料是非粘性的,即在应力-应变关系中,不存在时间效应。例如,不考虑应变率效应对  $\sigma-\varepsilon$  曲线的影响,也不考虑蠕变效应,同时假定材料具有无限的韧性,即具有无限变形的可能,不会出现断裂。

##### 1.1.3.2 关于稳定材料的假设

这一假设即认为所考虑的材料是稳定材料,其拉伸应力-应变曲线满足不等式

$$E \geq E_c \geq E_t \geq 0 \quad (1-4)$$

这里, $E_c = \sigma/\varepsilon$  为割线模量; $E_t = d\sigma/d\varepsilon$  为切线模量。

#### 1.1.4 应力-应变曲线的简化

虽然对材料引进了上述的基本假设,使得单向拉伸应力-应变曲线得到很大程度上的简化,但当把这些曲线应用到实际的塑性力学计算中时,其分析仍然是很复杂的。一方面,

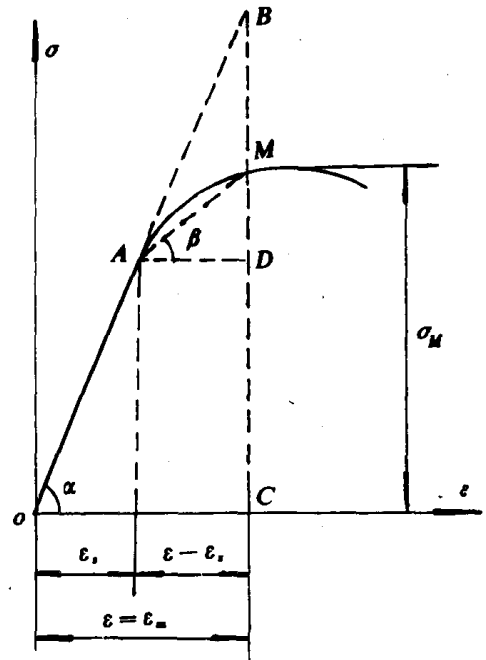


图 1-4 金属材料的单向拉伸试验曲线

当  $\sigma > \sigma_s$  时, 应力-应变呈非线性关系; 另一方面, 即使在整个加载过程中不考虑卸载, 也要区分弹性变形阶段和塑性变形阶段。为了使塑性力学问题的求解成为可能并得到简化, 除了对材料作出上述基本假设之外, 还常常对拉伸应力-应变曲线作进一步的简化。一般的简化模型有下列几种。

#### 1.1.4.1 弹性线性强化模型

对于一般的合金钢、铝合金等强化材料, 可用图 1-5a 所示的两段折线来近似实际的拉伸曲线。其数学公式可表示为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_s \\ \sigma_s + E'(\varepsilon - \varepsilon_s) & \text{当 } \varepsilon > \varepsilon_s \end{cases} \quad (1-5)$$

其中,  $E'$  为塑性阶段直线段的斜率。

这种模型在应变量大不大时可用来简化弹-塑性计算。

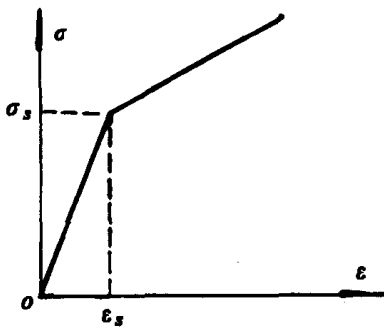


图 1-5a 弹性线性强化模型的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线

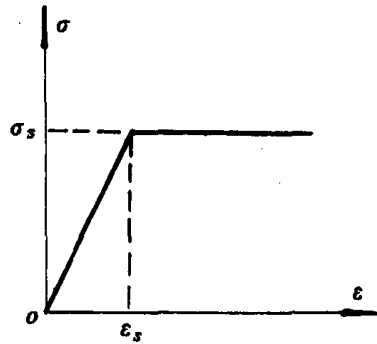


图 1-5b 理想弹-塑性模型的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线

#### 1.1.4.2 理想弹-塑性模型

对于低碳钢材料,  $E = 2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ , 当  $\sigma_s \approx 2100 \text{ kgf/cm}^2$  时, 与之对应的应变  $\varepsilon_s = 0.1\%$ 。此后的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线为一水平的屈服阶段。实验资料表明, 在屈服阶段终了时的应变  $\varepsilon$  约为  $\varepsilon_s$  的 10 倍, 然后出现强化阶段。因此, 当应变量大不大时可以不计后面的强化阶段, 而采用图 1-5b 所示的理想弹-塑性模型。该模型可用数学公式表示为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_s \\ \sigma_s & \text{当 } \varepsilon > \varepsilon_s \end{cases} \quad (1-6)$$

#### 1.1.4.3 理想刚塑性模型

这种模型的特征是完全忽略了弹性应变, 只考虑塑性变形(图 1-6)。对于所考虑的弹-塑性问题, 当其弹性变形比塑性变形小很多(例如在估计结构的极限承载能力)时, 可用这种模型简化问题的分析。

#### 1.1.4.4 三参量模型与兰伯-奥斯古(Ramberg-Osgood)模型

这个模型可以包含材料的弹性变形阶段, 其数学表达式为

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \text{当 } \varepsilon \leq \varepsilon_s \\ Ae^n + B & \text{当 } \varepsilon > \varepsilon_s \end{cases} \quad (1-7)$$

其中, 常数  $A, B$  由  $\varepsilon = \varepsilon_s$  处  $\sigma$  与  $d\sigma/d\varepsilon$  的连续性条件决定;  $n$  由强化的曲线来确定。兰伯-奥斯古模型用得较多, 它可以写成如下形式:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} \right)^m \right] \quad m > 1 \quad (1-8)$$

当  $\sigma$  较小时, 右边括号内的第二项可以略去, 这就是弹性阶段的变化规律; 而当  $\sigma$  较大时, 则接近幂次强化规律。由于整条曲线采用了统一的表达式, 因此, 计算时也就不存在弹-塑性交界面的确定问题。当  $\sigma = \sigma_s$  时,  $\varepsilon = 2\varepsilon_s = 2 \frac{\sigma_s}{E}$  为不同  $m$  值的曲线共同通过的点, 如图 1-7 所示。

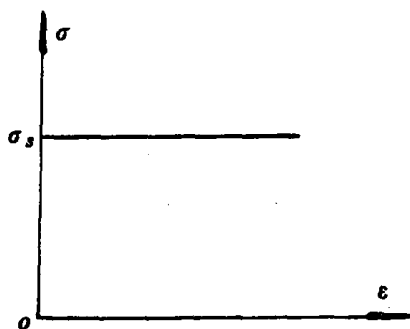


图 1-6 理想刚塑性模型的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线

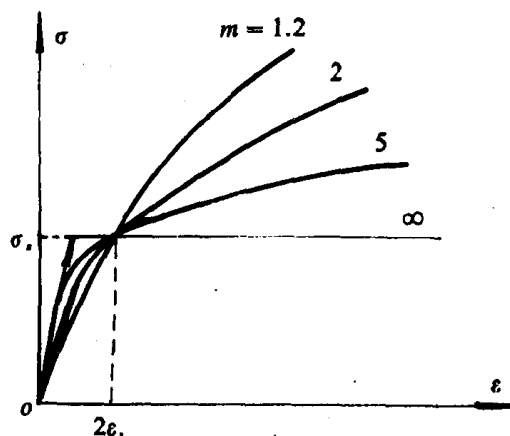


图 1-7 兰伯-奥斯古模型的  $\sigma$ - $\varepsilon$  曲线

## 1.2 金属材料的基本塑性特征

在上一节中, 我们讨论了金属材料的单向拉伸应力-应变曲线。可以看出, 当应力水平超过屈服极限  $\sigma_s$  后, 材料进入塑性变形状态。然而, 如果没有卸载, 材料的塑性特征尚不能表现出来, 因为应力与应变仍为单值对应, 只不过是非线性关系, 就象非线性弹性变形中应力与应变非线性单值对应关系一样。因此弹性和塑性的基本区别不在于它的应力-应变关系是否为线性, 而在于卸载时, 是否保留一个永久变形, 即塑性变形。

本节我们根据单向拉伸的实验结果(试件经过重复加载和卸载), 讨论金属材料的一些基本塑性特征。这些特征决定了塑性本构方程及塑性力学问题的求解方法与弹性本构方程及弹性问题的求解方法有着根本的不同。

### 1.2.1 卸载路径的不可逆性和塑性变形

图 1-8 是金属材料单向拉伸时的应力-应变曲线。当应力水平位于初始弹性范围(图中  $OA$  段)时, 在任意一点卸载, 应力点沿原加载路径返回, 加载路径与卸载路径重合。当外力完全卸去时, 变形完全恢复。

当应力水平大于  $\sigma_s$  时, 材料进入塑性变形阶段。这时在任意一点(例如  $B$  点)卸载时, 应力点不再沿原来加载路径返回, 而是沿  $\overline{BC}$  返回( $\overline{BC}$  近似地与  $\overline{OA}$  平行)。当外载全部卸去后, 应力点返回到  $C$  点, 试件变形不能完全恢复, 而保留一个永久的残余变形  $\varepsilon_p$ 。该变形即称为塑性变形。卸载路径的不可逆性和塑性变形是金属材料的基本塑性特征之一。

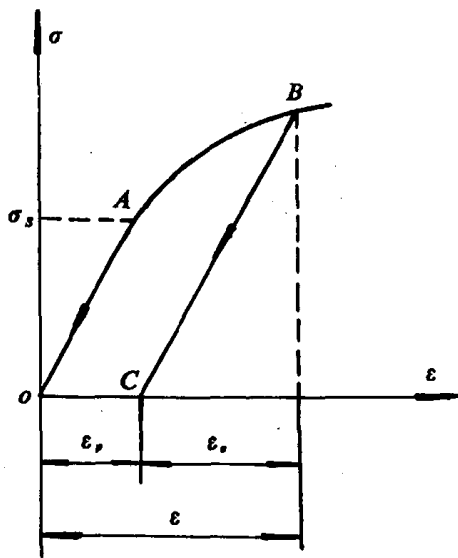


图 1-8 卸载路径的不可逆性

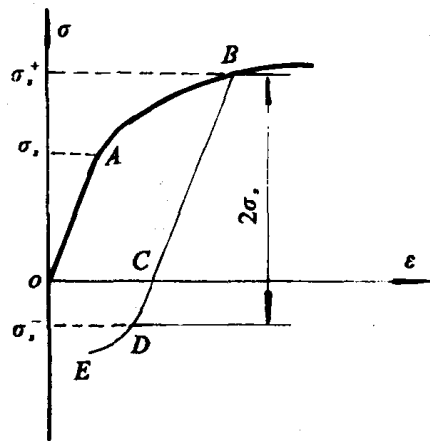


图 1-9 鲍辛格效应

### 1.2.2 鲍辛格(Bauschinger)效应

将试件拉伸到超过弹性极限后卸载,然后再反向加载使其受压(图 1-9 中从 B 点开始卸载到 C 点,然后反向加载到 E 点)。实验表明,对多晶体材料,压缩比例极限要比拉伸比例极限低得多,即压缩曲线比原来的拉伸曲线更早地发生弯曲(图 1-9 中,拉伸曲线从 A 点开始弯曲,而压缩曲线从 D 点就开始弯曲)。材料表现出的这种现象,即受力经卸载后再依反方向加载而引起塑性变形提早到来的现象,称为鲍辛格效应,简称为鲍氏效应。这一效应与第一次加载后再卸载从而在材料内部产生的残余应力有关。很明显,鲍氏效应与材料的各向异性相伴随,因为金属在产生塑性变形之前,材料内部的晶粒紊乱地排列(各向同性),当金属受载而产生塑性变形之后,材料内部的每一晶粒的结晶方向逐渐转向在载荷诱导下的公共轴方向,这样就产生了一个优势方向,从而塑性变形使材料成为各向异性。这时,金属材料的屈服应力会随着测试的方向不同而不同。库克(G·Cook)测出,黄铜在强烈冷辗后,在垂直于辗压方向上的屈服应力比辗压方向上的屈服应力可高出 10% 以上。此外,塑性变形与过程有关,即使第一次加载时塑性变形与过程无关,此后再加载,就与过程有关了。

考虑鲍氏效应,会给塑性力学问题的处理带来很多困难。因此,在实际的塑性问题计算中,常常忽略这一效应。实际上,各向异性也常被略去。因为包括应力-应变曲线在内的实验测定,往往不多于一个应力反复,且鲍氏效应和残余应力经过退火之后,几乎能够完全消除。但是,在应力连续反复的塑性变形过程中,鲍氏效应是不能忽视的。

在考虑鲍氏效应时,通常认为  $\overline{BD} = 2\overline{OA}$ 。

### 1.2.3 相继屈服点与强化现象

如图 1-9 所示,从 B 点开始卸载时,应力点沿卸载路径  $\overline{BC}$  返回。卸载路径  $\overline{BC}$  为一直线段,在此直线上,增量应力与增量应变之间呈线性关系,即:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (1-9)$$

式 1-9 为增量形式的虎克定律。当应力继续减小,以至变为压应力时,应力-应变仍可保持一段直线关系,直到  $\sigma = \sigma_s^-$  (图中的 D 点)后,试件又反向地进入塑性状态(压缩塑性状

态)。显然,只要应力在下列范围内:

$$\sigma_s^- \leq \sigma \leq \sigma_s^+ \quad (1-10)$$

应力增量和应变增量都保持为直线关系(式 1-9)。这个应力变化范围称为相继弹性范围(因为在这个范围内没有新的塑性变形产生),它的边界  $\sigma_s^+$ ,  $\sigma_s^-$  则称为相继屈服点。初始屈服点(A 点)和相继屈服点统称为屈服点,它们是应力弹性变化范围的界限。材料在经历塑性变形之后,相继屈服点升高( $\sigma_s^+ > \sigma_s$ ),这种现象称为材料强化。显然,无论在任何情况下,应力只可能或是位于弹性范围之内,或是位于弹性范围的边界(屈服点)上,否则不能维持平衡。

由图 1-10 不难看出,相继屈服点  $\sigma_s^+$ (或  $\sigma_s^-$ )与加载路径(应力历史)有关。例如,卸载到 C 点后再加载,即沿 CB 路径加载,相继屈服点为  $\sigma_{sb}$ 。只有当应力水平  $\sigma > \sigma_{sb}$  时,材料才能产生新的塑性变形。而如果沿  $B'C'$  路径加载,相继屈服点则为  $\sigma_{sb'}$  ( $\sigma_{sb'} > \sigma_{sb}$ )。同样,只有当应力水平  $\sigma > \sigma_{sb'}$  时,材料才能产生新的塑性变形。

#### 1.2.4 塑性变形与加载路径有关

塑性变形与加载路径(或应力历史)有关,不同的加载路径对应着不同的塑性变形。这一点可从图 1-11 上清楚地看出。例如,沿着路径  $A_1B_1$  加载到应力水平  $\sigma_{CK}$  时,塑性变形为

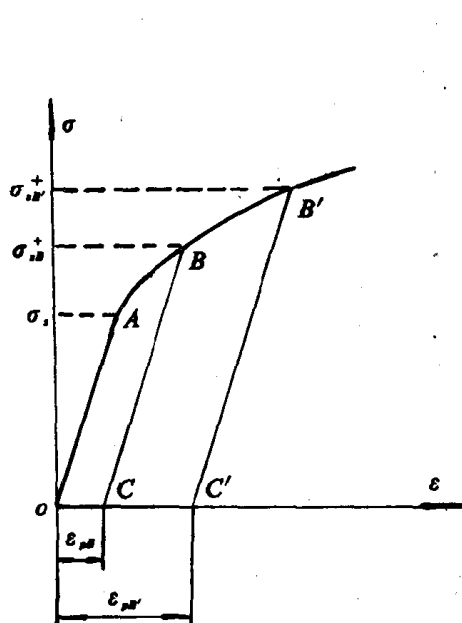


图 1-10 相继屈服点与加载路径有关

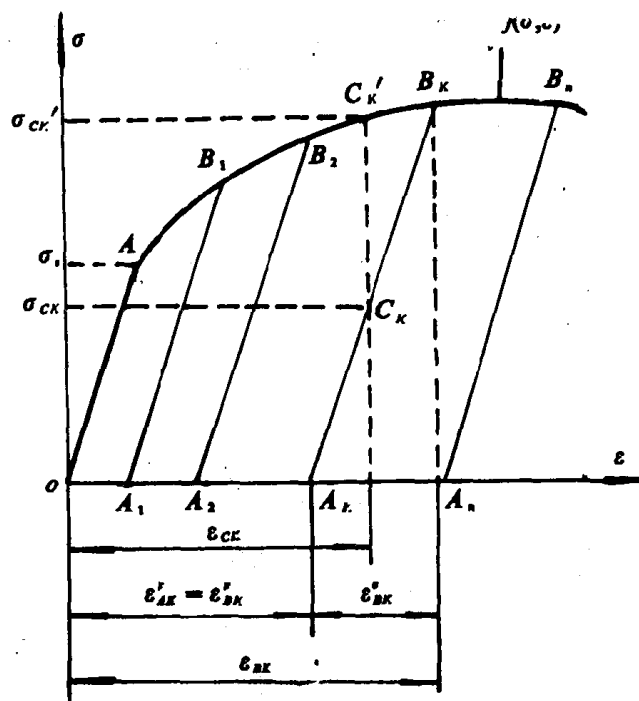


图 1-11 塑性变形依赖于加载路径

$\epsilon_{A_1}^p$ ; 沿着路径  $A_2B_2$  也加载到同一应力水平时,塑性变形为  $\epsilon_{A_2}^p$ ; 沿着  $A_nB_n$  加载到同一应力水平时,塑性变形为  $\epsilon_{A_n}^p$ 。因此,某一状态的塑性变形与该状态的应力水平以及达到该应力水平的加载路径有关。由此不难理解,弹性力学中“对应于某一应力状态的变形量是多大”的提法在塑性力学中是没有意义的。在这里,正确的提法应是“沿着指定的加载路径达到某一状态的塑性变形是多大”。

### 1.2.5 全量应力-应变之间的多值对应关系

材料经历过塑性变形(即卸载过程)后,全量应力、应变之间已没有单值对应的关系,这一点也可从图 1-11 上清楚地看出。例如, $\varepsilon_{CK}$ 对应着  $\sigma_{CK}$ 、 $\sigma_{CK'}$ ,甚至更多的应力水平(如果有更多的卸载路径与  $\overline{C_K C_K'}$  相交的话);反过来,应力水平  $\sigma_{CK}$  则又对应着  $\varepsilon_{A_2}^e$ 、 $\varepsilon_{AK}^e$  等等。事实上,全量应变总可以分解成全量塑性应变和全量弹性应变两部分。全量弹性应变部分与应力仍然是单值对应的,多值性是由于全量塑性应变部分引起的(因为它与加载路径有关)。譬如, $\varepsilon_{BK} = \varepsilon_{BK}^e + \varepsilon_{BK}^p$ ,  $\varepsilon_{BK}^e$  为弹性应变,  $\varepsilon_{BK}^p$  为塑性应变。 $\varepsilon_{BK}^e$  唯一对应着应力水平  $\sigma_{BK}$ (反过来,应力水平  $\sigma_{BK}$  对应的弹性应变也是唯一的,即  $\varepsilon_{BK}^e$ ),但塑性应变  $\varepsilon_{BK}^p$  则可以对应着  $\overline{A_K B_K}$  上的无穷多个应力水平。

### 1.2.6 塑性力学问题的求解特征

前面已指出,材料经历过塑性变形之后,由于塑性变形与加载路径有关,应力-应变之间不再存在单值对应的关系。但这并不意味着塑性应力和应变状态就不能唯一确定了。事实上,只要给定加载路径,应力与应变之间仍有确定的关系。例如,对下面三种加载路径(见图 1-11),可以分别写出应力应变关系如下:

加载路径 I  $O \rightarrow B_1 \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow C_K'$ , 沿此路径的应力-应变关系为

$$\sigma = \begin{cases} f(\varepsilon) & \text{当应力点位于 } OAB_1 \text{ 曲线段上时;} \\ E(\varepsilon - \varepsilon_{A_1}^p) = E[\varepsilon - (\varepsilon_{B_1} - \sigma_{B_1}/E)] & \text{当应力点位于 } A_1B_1 \text{ 直线段上时;} \\ f(\varepsilon) & \text{当应力点位于 } B_1B_2C_K' \text{ 曲线段上时。} \end{cases}$$

加载路径 II  $O \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow C_K'$ , 沿此路径的应力-应变关系为

$$\sigma = \begin{cases} f(\varepsilon) & \text{当应力点位于 } OAB_2 \text{ 曲线段上时;} \\ E(\varepsilon - \varepsilon_{A_2}^p) = E[\varepsilon - (\varepsilon_{B_2} - \sigma_{B_2}/E)] & \text{当应力点位于 } A_2B_2 \text{ 直线段上时;} \\ f(\varepsilon) & \text{当应力点位于 } B_2C_K' \text{ 曲线段上时。} \end{cases}$$

加载路径 III  $O \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow C_K'$ , 沿此路径的应力-应变关系为

$$\sigma = f(\varepsilon)$$

由此看出,对于给定的加载路径,其上任一状态的全量应力-应变都有确定的对应关系。既然如此,对于给定加载路径上的任一状态,塑性力学问题的求解能否象弹性力学问题的求解一样,用全量形式的应力-应变关系进行呢?一般来说,这是不可能的。因为:

(1)对于实际受载结构,在某一外载荷  $P$  作用下,结构中的各点都处于与该载荷水平相对应的应力、应变状态。比如结构中的任意一点  $A(x, y, z)$ ,与载荷水平  $P$  相对应的应力、应变状态为  $(\sigma_{AP}, \varepsilon_{AP})$ 。在载荷  $P$  的作用过程中,虽然点  $A(x, y, z)$  是沿着一条确定的加载路径达到了状态  $(\sigma_{AP}, \varepsilon_{AP})$ ,但这个确定的路径又是一条什么样的路径?是没有经历过卸载而直接达到状态  $(\sigma_{AP}, \varepsilon_{AP})$ ,还是经过一次卸载又加载到状态  $(\sigma_{AP}, \varepsilon_{AP})$ ,或者是经过重复加载、卸载最终达到状态  $(\sigma_{AP}, \varepsilon_{AP})$ ?所有这些,在求解之前是不知道的。所以,尽管该点的加载路径是确定的,但在求解之前,具体形式并不知道,因此,还是写不出沿该路径上任一状态的全量应力-应变关系。

(2)对于一个实际的受载结构,一般说来,结构中的各点都处于不同的应力应变状态,并且各点达到相应状态的路径也互异。由于整个结构是一个由无穷多个质点构成的连续体,因此,与载荷水平相对应的各点状态的加载路径将有无穷多个。即便这无穷多个路径