数学分析

下 册

复旦大学数学系主编

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是1960年复旦大学数学系編著"数学分析"試用本的修訂本。修訂是根据两年来試用經驗并参照讀者所提出的一些意見改写的，較初版有了較多的补充和闡述，并附有适量的习題。

本书分上下两册，上册計极限論、微分学两篇，下册包括积分学、无穷級数和广义积分两篇，可作綜合大学数学系数学分析教材，亦可作高等院校有关专业的参考书。

数 学 分 析 (下册)

复旦大学数学系主编

陈传璋　金福临　胡家赣　朱学炎　欧阳光中　编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 14.625　字数 349,000

1960年5月第1版　1962年12月第2版　1979年9月第6次印刷

印数 110,001—180,300

书号：13119·357　定价：1.65元

目　录

（下　册）

第三篇　积　分　学

第一章　不定积分 ……………………………………………326

§1　不定积分与它的簡单計算方法……………………………326

§2　不定积分的計算……………………………………………330

习題 ……………………………………………………………353

第二章　定积分概念 …………………………………………358

§1　定积分問題的提出及定积分的定义………………………358

§2　积分存在的充分必要条件…………………………………362

§3　可积函数类…………………………………………………370

§4　可积函数的性质……………………………………………373

§5　定积分的計算………………………………………………378

§6　橢圓积分 ……………………………………………………388

习題……………………………………………………………392

第三章　定积分的应用和定积分的近似計算 ………………396

§1　曲綫的弧长…………………………………………………396

§2　平面图形的面积……………………………………………404

§3　体积…………………………………………………………411

§4　旋轉体的側面积……………………………………………415

§5　重心…………………………………………………………418

§6　定积分的近似計算…………………………………………422

习題……………………………………………………………427

第四章　含参变量的积分…………………………………… 431

习題 ……………………………………………………………437

第五章 各种不同形式积分(二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分)的定义及性质 ……………439
§1 二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分的概念……………439
§2 积分存在的充要条件……………444
§3 各种积分的性质……………447
习題……………449
第六章 各种积分的計算及应用 ……………451
§1 二重积分的計算……………451
§2 三重积分的計算……………475
§3 第一类曲綫积分的計算……………490
§4 第一类曲面积分的計算……………493
§5 二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分在物理上的应用……………500
§6 第二类曲綫积分及第二类曲面积分……………507
习題……………538
第七章 各种积分間的联系和場論 ……………545
§1 格林公式……………545
§2 奥斯特洛格拉德斯基公式……………549
§3 斯托克司公式……………553
§4 曲綫积分和道路的无关性……………557
§5 場論……………564
习題……………578

第四篇 无穷級数和广义积分

第一章 数項級数 ……………584
§1 預备知識 上限和下限……………584
§2 級数的收斂性及其基本性质……………588
§3 正項級数……………594
§4 任意項級数的收斂判別法……………602

§5 絕对收斂級数和条件收斂級数的性质……611
§6 无穷乘积……619
习题……625

第二章 函数項級数……629
§1 函数序列和函数項級数的收斂和一致收斂……629
§2 一致收斂級数的性质……638
§3 一致收斂級数的判别法……643
习题……649

第三章 幂級数……652
§1 幂級数的收斂半徑和它的性质……652
§2 函数的幂級数展开式……657
§3 幂級数在近似計算中的应用……664
习题……666

第四章 广义积分……669
§1 无穷限的积分……669
§2 无穷限积分的收斂性判别法……675
§3 无界函数的积分……681
§4 广义重积分……687
习题……692

第五章 含参变量的广义积分……696
§1 含参变量广义积分的一致收斂性……696
§2 一致收斂积分的性质……701
§3 例题……707
§4 欧拉积分[Beta 函数 $B(p, q)$ 与 Gamma 函数 $\Gamma(s)$]……711
习题……718

第六章 富里埃級数……721
§1 三角級数和富里埃級数……721
§2 一般正交函数系……727
§3 狄利克来积分和黎曼引理……733
§4 富里埃級数的收斂性定理(狄尼判别法及其推論)……739

§5 狄利克来引理、狄利克来—約当判别法……742
§6 函数 $f(x)$ 的富里埃級数展开……746
§7 富里埃級数的逐項积分与逐項微分……753
§8 平方平均迫近……757
§9 算术平均求和概念与費埃尔定理……761
§10 三角函数系的封閉性……767
§11 富里埃积分……769
习題……780

第三篇　积　分　学

本篇将討論一种在理論上和实踐上极为重要的数学工具——积分。为了使讀者能够理解积分本质，掌握它和运用它，所以在处理材料时，不是形式地按照定积分、二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、……等次序孤立地进行叙述，而是按照它們之間的內在联系，以統一的观点有重点地叙述。积分的本质是一个具有特殊結构的和式的极限，在各种积分中，这种和式的极限只是表現形式不同而已。因此在叙述时，我們首先把定积分概念讲深讲透，然后将二重积分、三重积分、第一类曲綫积分、第一类曲面积分抓住其本质統一叙述。这样，就可把格林公式，奥斯特洛格拉得斯基公式及斯托克司公式統一起来，加以比較，体現了一个基本思想：函数在区域上的积分值，可以用它的"原函数"在边界上的值或积分来表示。

在本篇中，每个重要概念引入时，都将指出它的实际背景，然后提高到理論上来分析它們的本质，同时插入大量实例，使得讀者能够比較好地掌握教材内容，学会解决实际問題的方法。

第一章 不定积分

§1 不定积分与它的简单計算方法

在上一篇中討論了导数与微分，它是由給定的函数求出其导数或微分。但是，在科学、技术的許多問題中，常常需要解决相反的問題，就是要由一个函数的已知导数，求出这个函数。例如在上一篇中，我們假定已知物体的运动方程 $s=s(t)$，用微分法求得其速度 $v=\frac{ds}{dt}$，然后找出其加速度 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$。但是实际上，往往还需要解决反面的問題：已給定加速度 a 是时間 t 的函数，而要求确定速度 v 及其所經过的路程，这样就需要由已知的函数 $a=a(t)$ 还原出一个函数 $v=v(t)$，而它的导数就是 $a(t)$，然后从求得的 $v(t)$ 再求出函数 $s=s(t)$，而它的导数就是 $v(t)$。

一般地，我們給出如下的定义：

定义 若在某一区間上，$F'(x)=f(x)$，則在这个区間上，函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数。

显然，从定义可知，一个函数的原函数不是唯一的，因为 $[F(x)+C]'=F'(x)=f(x)$ （C 为任意常数），所以若函数 $F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的原函数，則 $F(x)+C$ （C 为任意常数）也是 $f(x)$ 的原函数。反过来，由第二篇第二章拉格朗日定理的推論可知，如果两个函数 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，那末它們至多相差一个常数項，所以 $F(x)-G(x)=C$，因此函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $F(x)+C$。

称函数 $f(x)$ 的原函数的一般表达式为 $f(x)$ 的不定积分，記

为 $\int f(x)\,dx$。由上所述可見，求不定积分的运算就是求导数的逆运算。

回到一开始提出来的那个力学問題上，我們現在可以把它表示为

$$v=\int a(t)\,dt$$

及

$$s=\int v(t)\,dt.$$

如果討論的是等加速运动，在重力作用下，就有(g 为重力加速度)

$$v=\int g\,dt=gt+C_1$$

及

$$s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 C_1 与 C_2 均为任意常数。我們不难通过求导数来驗証这些等式的正确性。但是，如果需要完全确定的解决，还需要知道在某一时刻的速度以及在此时刻的路程。例如，已知 $t=t_0$ 时

$$v=v_0,\ s=s_0,$$

那末就可以定出

$$C_1=v_0-gt_0$$

及

$$C_2=s_0+\frac{1}{2}gt_0^2-v_0t_0,$$

从而得到

$$v=g(t-t_0)+v_0$$

及

$$s=\frac{1}{2}g(t-t_0)^2+v_0(t-t_0)+s_0.$$

习惯上称 t_0, s_0 及 v_0 分别是 t, s 及 v 的初始值。

作为导数的逆运算，很容易求得初等函数的不定积分，下面是最簡单的不定积分表：

1. $\int 0\,dx=C$;

2. $\int k\,dx=kx+C$ (k 为常数)；

3. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$;

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$;

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

7. $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$;

8. $\int \csc^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x + C$;

9. $\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C$;

10. $\int e^x dx = e^x + C$;

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C$;

13. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

14. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$;

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$;

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

借助于积分法則可以把上面得到的积分表所适用的范圍加以扩充。最簡单的积分法則有以下三个：

一、若 a 是常数 $(a \neq 0)$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数存在，則

$$\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

即常数因子可以提到积分号外面来。

二、 $$\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$$

即函数之和(差)的不定积分等于两者的不定积分之和(差)。

三、若 $$\int f(t)\,dt=F(t)+C,$$

则 $$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

它們都不难从不定积分的定义証得。亦就是将等号右端求导，証明求导后所得的函数等于左端积分号下的函数。

利用这些簡单的法則及簡单积分表可以求得一些函数的不定积分。

[例 1] $$\int(6x^2-3x+5)\,dx$$
$$=6\int x^2\,dx-3\int x\,dx+5\int dx=2x^3-\frac{3}{2}x^2+5x+C.$$

[例 2] $$\int\frac{dx}{2x-1}=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C.$$

[例 3] $$\int\frac{(e^x-1)(e^{3x}+2)}{e^x}\,dx$$
$$=\int(e^{3x}-e^{2x}-2e^{-x}+2)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{-x}+2x+C.$$

在不定积分中，皆含有一个任意常数 C，它的几何意义是：如果我們已經知道曲綫的斜率 $m(x)$，即曲綫在每一点 x 处的切綫的斜率 $m(x)$，現在要求这个曲綫 $y=F(x)$，也就是說，这个曲綫应滿足 $F'(x)=m(x)$. 由不定积分的定义，此曲綫的方程可求得，設 $F(x)$为 $m(x)$的一个原函数，有

$$y=\int m(x)\,dx=F(x)+C,$$

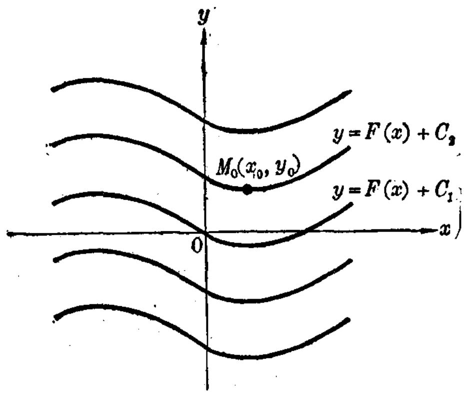

图 3-1-1

于是所得到的曲綫不是一条,而是相平行的一簇曲綫(图3-1-1)。如果加上条件:要求此曲綫經过某一固定点 $M_0(x_0, y_0)$,那么卽可定出此常数 C:

$$C=y_0-F(x_0),$$

于是曲綫便被唯一确定了。

§2 不定积分的計算

从上一节看到,虽然利用积分法則及簡单的积分表可以求出不少函数的原函数,但是实际上遇到的积分仅凭这一些方法还不能完全解决。例如

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx$$

就无法求出。为了求得更一般的不定积分的計算,还需要引进更多的方法和技巧,下面我們先介紹不定积分的换元法和分部积分法,然后討論有理分式的部分分式法以及可有理化的积分等等。这样,就可以解决更多的不定积分的計算問題。

一、换元法

实际上,上节所讲的法則三是将要証明的换元法的很特殊的

情况,这里将推广到一般的情形。

例如要計算积分

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx,$$

可以設想,由于

$$\sin x \, dx = -d \cos x,$$

那么上面的积分就可化为

$$\int \cos^2 x \sin x \, dx = -\int \cos^2 x \, d \cos x,$$

作代换 $t=\cos x$,上式右端即为 $-\int t^2 dt$,可直接利用簡单积分表求得其原函数为 $-\frac{t^3}{3}$,再代回变量 x,即得原函数为 $-\frac{1}{3}\cos^3 x$。

下面对一般情形給以理論上的証明。

定理 1 設 $f(x)$, $\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 都是連續函数,且

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

則

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C.$$

【証明】 我們所要証明的就是

$$F(\varphi(t)) + C$$

的导数即为

$$f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

現証明如下:

由假設

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

所以

$$F'(x) = f(x),$$

于是把 $F(\varphi(t))$ 視为复合函数

$$u = F(x),\ x = \varphi(t).$$

再利用复合函数求导法則可得

$$\frac{d}{dt}[F(\varphi(t))]=\frac{dF(x)}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=F'(x)\cdot\varphi'(t)=F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

这就証明了我們的定理。

[例 1] $$\int\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx=\int\operatorname{arc\,tg} x\, d(\operatorname{arc\,tg} x)$$
$$=\frac{1}{2}[\operatorname{arc\,tg} x]^2+C.$$

[例 2] $$\int\sin^3 x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$=\int(\cos^2 x-1)\,d\cos x$$
$$=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$$

[例 3] $$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln|\ln x|+C.$$

[例 4] $$\int\operatorname{tg} x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}$$
$$=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C.$$

[例 5] $$\int\sec t\,dt=\int\frac{dt}{\cos t}=\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}=\int\frac{d\sin t}{1-\sin^2 t}$$
$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin t}+\frac{1}{1-\sin t}\right)d\sin t$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}+C$$
$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(1+\sin t)^2}{\cos^2 t}+C$$
$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C.$$

它也可以由下法得出，即

$$\int\sec t\,dt=\int\frac{d(\sec t+\operatorname{tg} t)}{\sec t+\operatorname{tg} t}=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C.$$

看来虽然簡明，但不及上法自然。

定理2 設 $f(x)$ 連續，$x=\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 均为連續，$x=\varphi(t)$ 的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 存在且可导，并且

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(t)+C, \tag{1}$$

則

$$\int f(x)dx=F(\varphi^{-1}(x))+C, \tag{2}$$

式中 $\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数。

【証明】 将第(2)式右端求导同时注意到第(1)式，得：

$$\frac{d}{dx}[F(\varphi^{-1}(x))+C]=F'(t)\cdot[\varphi^{-1}(x)]'$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(x).$$

这样便証明了(2)式。

[例6] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

作代换 $x=a\sin t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{a\cos t}{a\cos t}dt=\int dt=t+C=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C.$$

[例7] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

作代换 $x=a\operatorname{tg}t$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2t\,dt}{a\sec t}=\int\sec t\,dt$$

$$=\ln|\sec t+\operatorname{tg}t|+C_1$$

$$=\ln\left[\operatorname{tg}t+\frac{1}{a}\sqrt{a^2+a^2\operatorname{tg}^2t}\right]+C_1$$

$$=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}+C_1$$

$$=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C,$$

其中 $C=C_1-\ln a$。

[例 8] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

作代换 $x=a\sec t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}&=\int\frac{a\sec t\operatorname{tg}t}{a\operatorname{tg}t}dt\\&=\ln|\operatorname{tg}t+\sec t|+C_1\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C,\end{aligned}$$

其中 $C=C_1-\ln a$。

[例 9] 求

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$$

作代换 $x=\frac{1}{t}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}&=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}\\&=-\sqrt{t^2+1}+C=-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C\\&=-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.\end{aligned}$$

[例 10] 求

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

作代换 $x=t^6$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}&=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3}{t+1}dt\\&=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\&=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C\\&=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C.\end{aligned}$$

二、分部积分法

試討論可微函数 $u(x)$ 及 $v(x)$，利用巳知的等式

$$(uv)'=u'v+uv',$$

或

$$uv'=(uv)'-u'v,$$

設 $u'v$ 或 uv' 中至少有一个具有原函数，則两边作不定积分的运算，卽得

$$\int uv'\,dx=\int (uv)'\,dx-\int vu'\,dx,$$

卽

$$\int uv'\,dx=uv-\int vu'\,dx$$

或

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

最后这个等式就称为分部积分公式。也称部分积分公式。一般說，适当的选擇 u, v 可使等式右边的积分要容易計算些。

[例 11] 求

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\int x\,d(\operatorname{arc\,tg} x)\\&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\int\frac{x}{1+x^2}\,dx\\&=x\cdot\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.\end{aligned}$$

[例 12] 求

$$\int x^2\sin x\,dx.$$

利用分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx&=\int x^2d(-\cos x)\\&=-x^2\cos x-\int(-\cos x)\,dx^2\\&=-x^2\cos x+\int 2x\cos x\,dx.\end{aligned}$$