

中华人民共和国地质矿产部

地质专报

七 普查勘探技术与方法

第1号

磁偶源频率测深法

河北省地质矿产局物探大队

地质出版社

中华人民共和国地质矿产部

地 质 专 报

七 普查勘探技术与方法 第1号

磁偶源频率测深法

河北省地质矿产局物探大队

地 质 出 版 社

内 容 提 要

磁偶源频率测深法是一种新型的物探方法。本书介绍了根据不同频率的视电阻率的变化规律来研究地电断面,从而达到水文地质、工程地质的勘察;寻找金属、非金属矿产;煤田、地热普查以及地质填图的目的。

全书共分七章,分别介绍了磁偶源频率测深法的基本原理;改正系数的由来及应用;PC-76型磁偶源频率测深仪的工作原理;野外工作方法与技术;资料的整理及解释方法以及本方法与直流电法对比的实例。同时附有K、K'改正系数数据,以利于推广应用。

中华人民共和国地质矿产部

地质专报

七 普查勘探技术与方法 第1号

磁偶源频率测深法

河北省地质矿产局物探大队

*

责任编辑:唐光后 王廷权

地质出版社出版

(北京西四)

地质出版社印刷厂印刷

(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本: $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ 印张: $13 \frac{1}{4}$ 插页: 一张 字数: 306,000

1985年12月北京第一版·1985年12月北京第一次印刷

印数: 1—1,670册 定价: 4.30元

统一书号: 13038·新143

前 言

磁偶源频率测深法 (FREQUENCY SOUNDING WITH MAGNETIC DIPOLE), 原名“地面电磁波法 (MELOS)”。该方法是法国地质调查局J. Duroux 在原大地电磁测深法基础上, 利用S. H. Wait 等人推导的垂直磁偶极子场理论公式, 经过数学变换建立在中区场测量的电磁频率测深法。

1974年我国地质总局 (今地质矿产部) 水文地质及电钻赴法考察组赴法考察时引进了该方法, 而后根据国家地质总局的指示, 我队承担了频率测深仪的研制和方法理论与方法技术研究的科研项目。在1979年上半年研制成功的PC-76型样机的基础上, 开始野外方法技术试验工作, 并于1981年上半年完成了七个地区的勘探地下水及金属矿产 (铁) 方面的找矿效果试验, 并做了一些方法理论的研究和方法技术试验工作。试验结果证明该方法与直流电法相比, 在一定条件下具有: 能穿透高阻屏蔽层、对低阻层反应灵敏、分层能力较好、受侧向影响较小、能适应高接地电阻条件下供电、减轻劳动强度等优点。但目前仍存在问题, 如: 仪器还比较复杂、适应能力差、记录计算繁杂、资料解释上还存在经验不足等问题, 有待进一步提高。该方法所具有的优良特性, 已展示了它有广阔的应用前景。

本科研成果于1982年2月通过地质部科技局的评审验收, 以后又陆续在工程地质、能源 (地热)、非金属矿产 (石膏) 等方面作了试验和生产工作, 部分成果已为生产部门所应用。本专报就是在原科研报告的基础上, 补充和删减部分内容编写而成。

本专报由刘振铎主编, 参加编写人员有: 刘振铎、刘宝利、王树青、张家琦同志编写了本专报的第一、二、四、五、六、七章; 沈培陵、申展、付兴、许二坤同志编写了第三章。

王行杰、马树庆、吴素芝、朱舜华、陈庆溶、王凤鸣、赵翠珍、王惠玲、安治昌、王爱萍等同志参加了图件的编制清绘。

在进行本科研项目 and 编写专报过程中, 承蒙武汉地质学院傅良魁、吴广耀、李四维老师给予指导; 并得到西安煤研所、原中国人民解放军水文部队、地质矿产部岩溶所、地质矿产部水文地质工程地质方法技术研究队、河北省地质矿产局第七地质大队、河北省水利勘察设计院、地质矿产部第一综合物探大队106分队、铁道部第三设计院第九纵队、上海勘察设计院等单位的大力协助, 在此一并致谢。

限于我们的理论与实践水平不高, 专报中所探讨的问题不论在深度上和广度上都很不够, 难免有谬误之处, 请批评指正。

本专报摘要由仇祥华译成英文; 目录由张肇元译成英文, 均由袁方校译。

目 录

绪言	1
第一章 磁偶源频率测深法的基本理论	3
第一节 电磁波的传播及场区的划分	3
第二节 两种均匀介质分界面上, 垂直磁偶极子场强矢量表达式	5
第三节 E_y 、 H_z 、 H_x 三个分量的性质	13
第四节 视电阻率的计算	15
第五节 磁偶源频率测深曲线类型及特征	16
第二章 改正系数 K 、 K' 的应用	25
第一节 精确式与近似式的差别	25
第二节 差别的改正	26
第三节 K 值改正的误差	29
第三章 PC-76型频率测深仪	31
第一节 发射机电路原理及单元线路分析	31
第二节 接收机电路原理及单元线路分析	37
第三节 仪器的主要技术指标	58
第四节 仪器的操作方法和使用注意事项	59
第五节 PC-76型仪器与法国SYSCAL-EM仪器的对比	61
第六节 PC-76型仪器作甚低频法的测量	62
第四章 野外工作方法与技术	64
第一节 观测方式和读取的分量	64
第二节 剖面及发射偶极子的布置	64
第三节 偶极距 r 的选择	66
第四节 发射线圈直径 D 的选择	68
第五节 H_x 接收线圈及 MN 电极的布置	70
第六节 H_z 接收线圈倾斜影响的试验	70
第七节 发射线圈的漏电试验	71
第八节 接收线圈的标定方法及 C 值的计算	71
第九节 记录点位置的讨论	72
第十节 观测精度	75
第五章 解释方法—特征点统计法	78
第六章 磁偶源频率测深法的试验及应用	83
第一节 PC法用于勘探地下水	83
第二节 PC法用于工程地质调查	90
第三节 PC法用于地热勘探	92

第四节	PC法在非金属矿区（石膏矿上）的试验	95
第五节	PC法在金属矿区（铁矿上）的试验	97
第七章	磁偶源频率测深法的特点	98
结束语		103
附录一	垂向磁偶极子在均匀各向异性半空间表面的谐波场	105
附录二	K 、 K' 改正系数的计算	107
附录三	附图册	111
附录四	K 、 K' 值改正表	144
参考文献		187
英文摘要		188

Contents

Introduction	1
Chapter I Principle Theory of the Frequency Sounding with a Magnetic Dipole	3
Section I Propagation of Electromagnetic Wave and Zoning of the Field	3
Section II Fundamental Theory Concerning the Electromagnetic Field Due to a Magnetic Dipole.....	5
Section III Characteristics of E_y , H_z , H_x Three Components.....	13
Section IV Calculation of Apparent Resistivity.....	15
Section V Types of Curves of Frequency Sounding with a Mag- netic Dipole and Their Characteristics.....	16
Chapter II Application of Correction Factors K and K'.....	25
Section I The Difference between Accurate Formula and App- roximate Formula	25
Section II Correction for the Difference.....	26
Section III Error in Correction for K	29
Chapter III Frequency Sounding Unit Model PC-76	31
Section I Circuitry of the Transmitter and Analysis of the Elementary Circuits	31
Section II Circuitry of the Receiver and Analysis of its Elemen- tary Circuits	37
Section III Main Technical Specification of the Unit.....	58
Section IV Procedure of Operation with the Unit and Points for Attention	59
Section V The Comparison of the Unit Model PC-76 with SYSCAL-EM Produced in France.....	61
Section VI VLF Measurement with the Unit Model PC-76.....	62
Chapter IV Field Procedure and Techniques.....	64
Section I Method of Observation and Read-out of Component.....	64
Section II Lay-out of Profiles and Transmitting Dipole.....	64
Section III Selection of Dipole Spacing r	66
Section IV Selection of Diameter of the Transmitting Loop.....	68
Section V Lay-out of Receiving Loop H_z and Electrodes MN	70
Section VI Experiment with the Influence of a Dipping Recie-	

ving Loop H_z	70
Section VII Leakage Test of the Transmitting Loop	71
Section VIII Calibration of Recieving Loop and Calculation of C.....	71
Section IX A Discussion on the Position of recording Point.....	72
Section X Accuracy of Measurement.....	75
Chapter V Method of Interpretation—Statistical Method Based on Charicteristic Points	78
Chapter VI Experiment with Frequency Sounding with a Magnetic Dipole and its Application.....	83
Section I Application of the Frequency Sounding Method Ex- ploration for Ground Water.....	83
Section II Application of the Frequency Sounding Method to Problems of Engineering Geology.....	90
Section III Application of the Frequency Sounding Method to Geothermal Exploration	92
Section IV A Test of the Frequency Sounding Method in Pro- specting for Nonmetal Ores—Gypsum.....	95
Section V A Test of the Frequency Sounding Method in Pro- specting for Metal Ores—Iron Ores.....	97
Chapter VII Some Characteristics of the Frequency Sounding Me- thod with a Magnetic Dipole.....	98
Conclusion	103
Appendix I The Harmonic-depending Field on the Half-Space Surface of Homogeneous Anisotropy Due to a Vertical Magnetic Dipole.....	105
Appendix II Calculation of Correction Factors K and K'.....	107
Appendix III Album of Figures	111
Appendix IV Corrected Table of Values K and K'	144
References	187
Abstract	188

绪 言

磁偶源频率测深法简称频测法 (PC法*)。它的理论研究早在五十年代初期就开始了,到了六十年代末期才得到应用和发展,由于它使用的频段较宽,因而可以实现不同深度的探测。它与直流电测深法相比有许多优点,是值得推广的一种新方法新技术。

本专报以科研报告的形式阐述了以下科研成果:

一、方法理论研究

首先较系统地学习了赴法考察报告中的MELOS资料,并对下面问题作了重点研究:

1. 核对并推导了垂直磁偶极子场强的数学表达式,查阅了1954年Wait关于迴线法中的垂直磁偶极子场强公式的推导,后又经我队王树青同志推导,证实该公式是正确的。

2. 编制了 K 改正系数计算表。为了提高视电阻率测量精度,根据公式编制成电算程序,计算出 K 、 K' 、 K_1 、 K_2 、 K_3 、 K_4 、 K_5 、 K_6 数值表。

3. 进行了记录点的研究。根据 γr 与 H_x/H_z 的关系和垂直磁偶极子横电型 (TE) 场的特点,粗略地计算了记录点与接收点的偏移距,为合理地使用 γr 和控制偏移距提供了理论根据。

4. 进行了解释方法的研究。目前磁偶源频率测深法量板正在编制,测深曲线还无法做定量解释。经过一年来的摸索研究,根据电磁波在穿透地层的衰减原理,提出了“特征点统计法”,该方法经过几个工区的试用,效果较好,虽然其理论上还不够严密,但比较实用简便。

二、方法技术研究

1. 求出了 C 值的计算公式

C 值的计算公式是由视电阻率 ρ_a 计算公式推导出来的,是将接收线圈的磁电转换的格值 C' ($\mu V/m\gamma$) 和 MN 极距计算在内的一个综合系数,此系数是野外计算视电阻率值的重要参数。

2. 对接收线圈标定方法; H_x 、 E_y 接收元件相对发射点的方位影响; H_z 接收元件倾斜度的影响;偶极距 r 的选择; D 的选择;发射线圈形状、直径与 r 的关系;不同发射方位的影响等项,做了试验研究,获得了不少成果。

三、研制成功PC-76型频率测深仪

该仪器具有较高的灵敏度和精度,有一定的抗干扰能力,数字显示直观清晰。该仪器的研制成功为方法技术,找矿效果的试验研究提供了重要的手段。

四、磁偶源频率测深法的找矿效果

几年来,用磁偶源频率测深法在水文地质 (各种类型的地下水普查如:平原地区的淡水,山前冲积扇水,第三系古河道水,岩溶水,山区溶隙、裂隙水等),工程地质,金属与非金属矿产,能源 (地热) 等方面进行了大量的试验研究,取得了良好的地质效果。

* PC分别为“频”(pín)、“测”(cè) 两个字的汉语拼音字头。

与此同时，部份成果已为生产部门所应用，取得了一定的经济效益。

五、磁偶源频率测深法的主要特点

磁偶源频率测深法，有较强的分层能力，特别是对低阻层反映灵敏；能够穿透高阻层的屏蔽；能克服高接地电阻；受地形影响和侧向影响较小。理论、方法技术的研究及仪器的改进，仍在进一步探讨和提高。

第一章 磁偶源频率测深法 的基本理论

用一个频率为零点几赫至几万赫的人工场源向地层中发送电磁波，在地层中传播时随着深度的增加，电磁波的能量（或电磁波的场强振幅）不断衰减，在远区其衰减服从公式：

$$\left| \frac{E_h}{E_0} \right| = e^{-\frac{2\pi h}{\lambda_1}} \quad (1)$$

式中： $|E_0|$ ——地面的场强振幅；
 $|E_h|$ ——深度 h 处的场强振幅；
 λ_1 ——电磁波在地层中的波长。

当深度 $h = \frac{\lambda_1}{2\pi}$ 时， $\left| \frac{E_h}{E_0} \right| = \frac{1}{e}$ ，通常将深度 $h = \frac{\lambda_1}{2\pi}$ 定义为电磁波的有效穿透深度（也称集肤深度）。从（1）式知，电磁波的穿透深度与 λ_1 有关，在均匀半空间介质中 λ_1 为：

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{10^7 \rho_1}{f}} \quad (\text{米}) \quad (2)$$

λ_1 与地层电阻率 ρ_1 的平方根成正比，与电磁波的频率 f 的平方根成反比。在（2）式中如地层电阻率为常量，那么只要改变电磁波的频率 f ，就能改变波长 λ_1 ，从而也就改变了电磁波的穿透深度 h 。因此，用人工控制场源，由高频到低频向地层中发送电磁波也就实现了由浅到深地探测（穿透），这就是电磁频率测深的基本原理。这里还要说明一点，在一般情况下，除了频率高低影响穿透深度外，场源与观测点之间的距离（ r ）也影响穿透深度。

第一节 电磁波的传播及场区的划分

向一个平铺在地面上的水平线圈供以一定频率的交变电流，它就会向周围空间辐射电磁波。其传播的途径有三条：一条是向空间辐射，这种波称为天波；另一条是沿地面传播，称为地面波；还有一条向地层中传播，称为地层波，三种波的传播见图1·1。

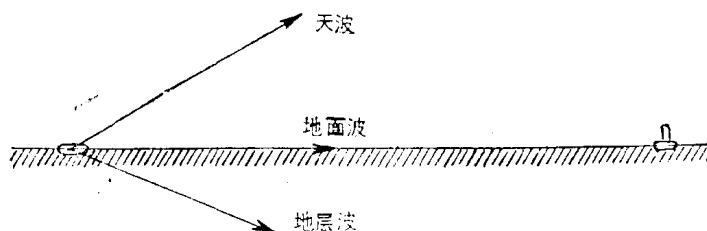


图 1·1

* 详见附录一。

在频率测深中所使用的频率较低，接收器的高度接近于地面。故不考虑天波，只研究地面波和地层波对接收器的影响。假设一均匀半空间， $\rho_1 = 100$ 欧姆·米， $f = 100$ 赫，在地层中传播的地层波 S_1 的波长用 $\lambda_1 = \sqrt{\frac{10^7 \rho_1}{f}}$ 计算，得 $\lambda_1 = 3.16$ 公里，在空气中传播的 S_0 波，其波长用 $\lambda_0 = \frac{C}{f}$ 计算，则 $\lambda_0 = 3000$ 公里。可见二者的波长是不同的，即在相同的时间内 S_1 波落后于 S_0 波，且其波速相差很大，见图1.2。

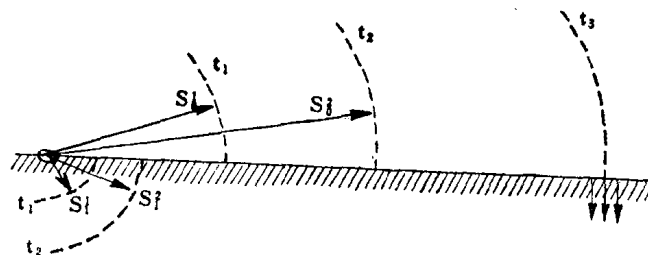


图 1.2

由于波速的差异和波在传播过程中的能量衰减，接收点距场源的远近所观测的 S_0 与 S_1 是不同的。即：

1. 由场强振幅衰减公式 $|E_h| = |E_0| e^{-\frac{2\pi h}{\lambda_1}}$ 可知在离开场源以后地层中 S_1 波要比空气中的 S_0 波衰减快得多。因此，在远离场源的接收点，电磁波只有自地面向地中垂直透射的 S_0 波，其波径垂直于地表。 S_1 波早已衰减得很小，可以忽略。
2. 在靠近场源的接收点，不但 S_0 波能到达， S_1 波也能到达（未衰减完），此处波径方向是两个波径的合成，而且愈靠近场源其波径倾角愈小，见图1.3。

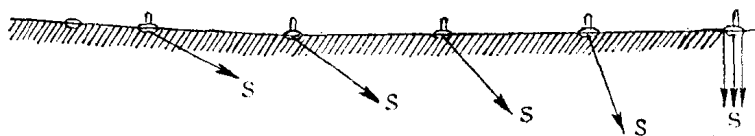


图 1.3

场区的划分：

1. 远区

观测点远离场源的场区，物理学上将 $\gamma r \gg 1$ 或 $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ 的区域称为远区，式中 γ 为圆波数 ($\gamma = |\sqrt{i\mu_0\omega\sigma}|$ ，其中 ω 为角频率， μ_0 为真空磁导率， σ 为地层的电导率， $i = \sqrt{-1}$)， r 为接收点至场源的距离。

远区场系辐射场，区内的电磁波垂直地表入射，不受地层波的影响。在实际工作中，当 r 大于等于 $6 \sim 8$ 倍 H 时，可认为满足远区的要求， H 为集肤深度。远区场中各参量与地层电阻率的关系最密切。

2. 近区

当 $\gamma r \ll 1$ 或 $r \ll \frac{\lambda}{2\pi}$ 时称为近区。此区自有场是主要的，场中各参量与地层电阻率关系较小，甚至无关。

3. 中区

介于远区与近区之间的场区称为中区。区内电磁波倾斜透射，地层波不能忽略。此区 r 等于 2~6 倍 H ，在这个场区中，高频观测点处于远区，低频处于近区，对于中间频段则处于远区与中区之间。本方法的观测就是在此区内进行。

以某工区的野外实测资料 102/S26 为例（见表 1.1）。

$r = 400$ 米

表 1.1

f	H_x/H_z	ρ	$\gamma \cdot r$	$\frac{\lambda_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{f} 10^7}$
35840	11.23	22.6	35	12.63
17920	6.117	44.6	21	25.1
8960	4.536	32.3	13.5	30.2
4480	2.645	53.3	8.46	59.8
2240	2.006	60.7	7.15	82.8
1120	1.596	31.7	6.03	84.6
560	1.143	17.2	4.44	88.2
280	0.82	16.9	3.17	123.64
140	0.554	20.1	2.17	190.7
70	0.333	20.8	1.42	274.35
35	0.189	25.4	0.97	428.96

由实测各频点的 H_x/H_z 与相对应的 $\gamma \cdot r$ 和 $\lambda_1/2\pi$ 看出：

对于 $f = 35840 \sim 35$ 赫频率范围，当 $r = 400$ 米时，在高频段 $35840 \sim 8960$ 赫符合 $r \gg \frac{\lambda_1}{2\pi}$ ， $\gamma \cdot r \gg 1$ 则处于远区。4480~35 赫不符合 $r \gg \frac{\lambda_1}{2\pi}$ ，也不符合 $r \ll \frac{\lambda_1}{2\pi}$ 及 $\gamma \cdot r \gg 1$ ，因此，上述频段处于中区。

第二节 两种均匀介质分界面上， 垂直磁偶极子场强矢量表达式

如果我们采用 MKS 电磁单位制，在均匀介质中，麦克斯韦方程具有如下形式：

$$\text{rot} \mathbf{H} = i\omega \epsilon' \mathbf{E} \quad (1.2.1)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -i\mu \omega \mathbf{H} \quad (1.2.2)$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 0 \quad (1.2.4)$$

式中， $\epsilon' = \epsilon \left(1 - \frac{i\sigma}{\omega \epsilon}\right)$ 是复数。 σ 、 ϵ 、 μ 分别表示介质电导率、介电常数和磁导率。首先

引入磁矢势 $\mathbf{F}$, 使

$$\mathbf{E} = -\text{rot} \mathbf{F} \quad (1.2.5)$$

根据麦克斯韦方程和矢量分析不难得到:

$$\nabla^2 \mathbf{F} + \gamma^2 \mathbf{F} = 0 \quad (1.2.6)$$

方程 (1.2.6) 就是谐变场中的赫姆霍兹方程。其中 γ 为复数; $\gamma^2 = \omega^2 \epsilon' \mu = \omega^2 \mu \epsilon - i \sigma \mu \omega$, 若令 $k^2 = i \sigma \mu \omega - \epsilon \mu \omega^2$

则必有: $\gamma^2 = -k^2$, 并且

$$i \mu \omega \mathbf{H} = \text{grad} \text{div} \mathbf{F} - k^2 \mathbf{F} \quad (1.2.7)$$

式 (1.2.5) 及式 (1.2.7) 就是磁矢势 $\mathbf{F}$ 与电场强矢量 $\mathbf{E}$ 及磁场强度 $\mathbf{H}$ 间的关系式。

在垂直磁偶极子场中, 由于对称性, 仅存在 z 方向的矢势, 即在柱坐标系中:

$$F = F_z, \quad \text{而} \quad F_\rho = F_\phi = 0$$

依 (1.2.5) 及 (1.2.7) 式就有:

$$E_z = \frac{\partial F}{\partial \rho} \quad (1.2.8)$$

$$i \mu \omega H_z = \left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F \quad (1.2.9)$$

$$i \mu \omega H_\rho = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho \partial z} \quad (1.2.10)$$

(1.2.8)、(1.2.9)、(1.2.10) 就是垂直磁偶极子场强矢量与矢势的关系式。

赫姆霍兹方程在柱坐标系中解的一般形式为:

$$F(\rho, \phi, z) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \{ (A \cdot e^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + B \cdot e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}) \cos n\phi + (C \cdot e^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + D \cdot e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}) \sin n\phi \} J_n(\lambda \rho) d\lambda \quad (1.2.11)$$

式中 A, B, C, D 均为与坐标无关的常数, 但可以是 λ, n 的函数, 它们由边界条件定出。

关于矢势的边界条件, 我们假定 z 轴垂直于介质界面, 即沿界面的法线方向。在直角坐标系中, xoy 平面就是界面的切平面。那末, 在介质参数为 $\epsilon_1, \mu_2, \sigma_1$ 和 $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ 的介质分界面上, 我们有下列边界条件:

$$\frac{1}{\mu_1} \text{div} \mathbf{F}_1 = \frac{1}{\mu_2} \text{div} \mathbf{F}_2 \quad (1.2.12)$$

$$\epsilon'_1 F_{x_1} = \epsilon'_2 F_{x_2} \quad (1.2.13)$$

$$\epsilon'_1 F_{y_1} = \epsilon'_2 F_{y_2} \quad (1.2.14)$$

$$F_{z_1} = F_{z_2} \quad (1.2.15)$$

$$\frac{\partial F_{x_1}}{\partial z} = \frac{\partial F_{x_2}}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_{y_1}}{\partial z} = \frac{\partial F_{y_2}}{\partial z} \quad (1.2.16)$$

在我们的问题中, 这两种均匀介质为大地与空气。空气介电常数为 ϵ_2 , 电导率为 σ_2 , 大地介电常数为 ϵ_1 , 电导率为 σ_1 , 我们假设这两种介质具有同一磁导率 μ 。

偶极子位于介质分界面上。先假定偶极子位于地面以上高 h 处。偶极子中通以谐变电

流 I ，建立一谐变电场。设空气波数为 k_2 ，大地波数为 k_1 。选取柱坐标系 (ρ, ϕ, z) 坐标原点取在偶极子中心，偶极子轴与 z 轴一致， z 轴向下为正，见图1·4。

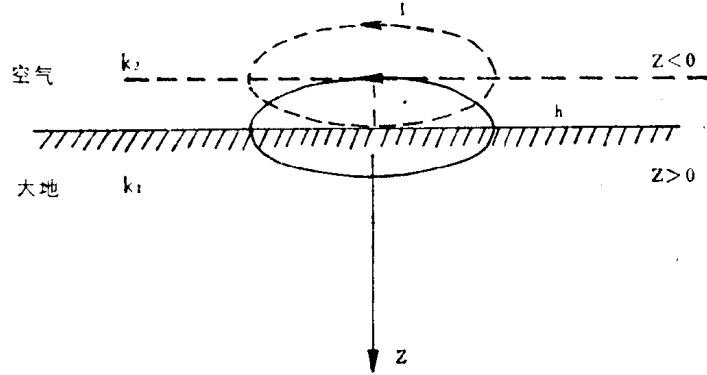


图 1·4

上述问题满足谐变场中赫姆霍兹方程，在柱坐标系中它的一般解见 (1·2·11) 式。

在我们的问题中，场沿 z 轴对称分布，故矢势 $\mathbf{F}$ 仅有沿 z 的分量 F_z ，对于平行于 z 轴的分量 n 为 0，故一般解应写为：

$$F_z(\rho, \phi, z) = \int_0^\infty (A \cdot e^{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} + B \cdot e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z}) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (1.2.17)$$

对于 $z < 0$ 的情况，为使 $z \rightarrow -\infty$ 时有解，系数 B 应取零，故

$$F_z(\rho, \phi, z) = \int_0^\infty A \cdot e^{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} \cdot J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z < 0) \quad (1.2.18)$$

对于 $z > 0$ 的情况，为使 $z \rightarrow \infty$ 时有解，系数 A 应取零，故

$$F_z(\rho, \phi, z) = \int_0^\infty B \cdot e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z > 0) \quad (1.2.19)$$

为了强调界面对场的影响，对于 $z < 0$ 的情况 (1·2·18) 式可以改写为：

$$F_z = M \cdot \frac{e^{ik_2 r}}{r} + \int_0^\infty \alpha \cdot e^{u_2 z} \cdot J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z < 0) \quad (1.2.20)$$

式中前一项表示了均匀无限空间任一点矢势沿 z 的分量。后一项表示了界面对场的影响。

式 (1·2·19) 可以改写为：

$$F_z = \int_0^\infty \beta \cdot e^{-u_1 z} \cdot J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z > 0) \quad (1.2.21)$$

这里， F_1 ， F_2 表示了 $z > 0$ 及 $z < 0$ 时的矢势 F_z ； M 表示磁偶极矩，在 MKS 单位制中等于 $i\mu\omega Ids/4\pi$ ； r 表示观察点到偶极中心的距离， $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ ； $u_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ ， $u_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}$ ； α ， β 表示待定系数。下面，从式 (1·2·20) (1·2·21) 出发，根据边界条件，求出待定系数 α ， β 。

由边界条件 (1·2·15) 式得：

$$F_1 = F_2 \quad (1.2.22)$$

由边界条件 (1.2.12) 式得:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}_1 = \operatorname{div} \mathbf{F}_2 \quad (1.2.23)$$

由索莫菲-傅立叶公式:

$$\frac{e^{ik_2 r}}{r} = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \cdot \frac{e^{\pm \sqrt{\lambda^2 - k^2} z}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot \lambda d\lambda \quad \begin{cases} z < 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad (1.2.24)$$

由于预先假定偶极子置地面以上高 h 处, 坐标原点取在偶极中心, 这时 $0 < z \leq h$ 所以

$$\frac{e^{ik_2 r}}{r} = \int_0^\infty J_0(\lambda \rho) \frac{e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \lambda d\lambda \quad (z > 0) \quad (1.2.25)$$

将 (1.2.25) 式代入 (1.2.20) 式, 便得到 $0 < z \leq h$ 带状区域内矢势 $\mathbf{F}_2$ 的表达式:

$$\mathbf{F}_2 = \int_0^\infty \left(\frac{M \cdot \lambda}{u_2} e^{-u_2 z} + \alpha e^{u_2 z} \right) J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (0 < z \leq h) \quad (1.2.26)$$

依边界条件 (1.2.22) 式, 比较被积函数, 则有:

$$\frac{M \lambda}{u_2} e^{-u_2 z} + \alpha e^{u_2 z} = \beta e^{-u_1 z} \quad (1.2.27)$$

分别对 F_1, F_2 求散度, 并依边界条件 (1.2.23) 式, 比较被积函数, 则有:

$$-M \lambda e^{-u_2 z} + \alpha u_2 e^{u_2 z} = -\beta u_1 e^{-u_1 z} \quad (1.2.28)$$

方程 (1.2.27) (1.2.28) 便组成关于待定系数 α, β 的方程组, 以 $z = h$ 代入方程组中, 解之, 得:

$$\begin{cases} \alpha = M \cdot \frac{\lambda}{u_2} \cdot \frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2} e^{-2u_2 h} \\ \beta = M \cdot \frac{2\lambda}{u_1 + u_2} e^{-(u_2 - u_1)h} \end{cases}$$

将 α, β 代入 (1.2.20)、(1.2.21) 中, 并注意 (1.2.20) 式中因为 $z < 0$ 故 $\frac{e^{ik_2 r}}{r} =$

$\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_2} e^{u_2 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda$ 成立, 得:

$$\mathbf{F}_1 = M \int_0^\infty \frac{2\lambda}{u_1 + u_2} e^{-(u_2 - u_1)h - u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z > 0)$$

$$\mathbf{F}_2 = M \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_2} \left(1 + \frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2} e^{-2u_2 h} \right) e^{u_2 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z < 0)$$

若将偶极子置地面上, $h=0$, 则有:

$$\mathbf{F}_1 = 2M \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1 + u_2} e^{-u_1 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z > 0) \quad (1.2.29)$$

$$\mathbf{F}_2 = 2M \int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1 + u_2} e^{u_2 z} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (z < 0) \quad (1.2.30)$$

现在讨论 $z = 0$ 的情形, 此时 (1.2.29)、(1.2.30) 统一归并为:

$$F = 2M \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{u_1 + u_2} J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (1.2.31)$$

计算 (1.2.31) 式的积分, 用 $u_1 - u_2$ 去乘被积函数的分子、分母, 并注意到 $u_1^2 - u_2^2 = k_1^2 - k_2^2$, 就有:

$$F = \frac{2M}{k_1^2 - k_2^2} \int_0^{\infty} (u_1 - u_2) \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda \quad (1.2.32)$$

经过简单的变换 (1.2.32) 式可以改写为:

$$F = \frac{2M}{k_1^2 - k_2^2} \left[k_1^2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + u_1} - k_2^2 \int_0^{\infty} \frac{\lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + u_2} \right] \quad (1.2.33)$$

现在的问题就归结为计算形如下式

$$\int_0^{\infty} \frac{\lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda}{\lambda + u} \quad \text{的积分。}$$

根据索莫菲积分:

$$\int_0^{\infty} \lambda u^{-1} J_0(\lambda \rho) e^{-zu} d\lambda = \frac{e^{-k(\rho^2 + z^2)^{1/2}}}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \quad (1.2.34)$$

令 (1.2.34) 式等于 P , 则 (1.2.34) 式左端对 z 二次求导得:

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \int_0^{\infty} \lambda u J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

右端对 z 二次求导得:

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -\frac{1}{\rho^3} (1 + k\rho) e^{-k\rho}$$

因此, 我们有:

$$\int_0^{\infty} \lambda u J_0(\lambda \rho) d\lambda = -\frac{1}{\rho^3} (1 + k\rho) e^{-k\rho} \quad (1.2.35)$$

根据李普希兹积分:

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) e^{-z\lambda} d\lambda = (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.2.36)$$

令 (1.2.36) 式等于 Q , 对 (1.2.36) 式左端二次求导得:

$$\left. \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \int_0^{\infty} \lambda^2 J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

对 (1.2.36) 式右端二次求导得:

$$\left. \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \right|_{z=0} = -\frac{1}{\rho^3}$$

显然,

$$\int_0^{\infty} -\lambda J_0(\lambda \rho) \lambda d\lambda = \frac{1}{\rho^3} \quad (1.2.37)$$

将 (1.2.35) (1.2.37) 两式相加: