周源泉 翁朝曦 著

可靠性评定

科学出版社

可靠性评定

周源泉　翁朝曦　著

科学出版社

1990

内 容 简 介

本书是作者根据自己的研究成果与实践经验，并吸收国内外可靠性评定的科研成果而撰写的一部学术专著.

书中着重介绍各种类型的单元与系统的可靠性评定方法．采用经典、Bayes及Fiducial（信赖)三种方法介绍各种评定技术． 主要内容包括：概率分布及区间估计理论，单元可靠性和可用性评定，机械可靠性与环境因子评定，系统可靠性与可用性评定．书中对工程实际中应用极广的小样本、大系统的可靠性评定方法作了详尽的论述．每章末列出了主要的参考文献，书末附有可靠性评定中常用的数值表和名词索引，以便于读者查阅和使用.

本书可供产品设计师、可靠性质量管理工程师在从事产品可靠性评定、设计、验收等工作中参考，也可作为高等院校理工科高年级大学生及研究生的参考书．对于需要学习可靠性评定知识的广大读者则是一本较系统的入门书.

可 靠 性 评 定
周源泉 翁朝曦 著
责任编辑 唐正必
科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100707
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1990年3月第 一 版 开本：787×1092 1/16
1990年3月第一次印刷 印张：27
印数：0001—2 140 字数：621 000
ISBN 7-03-001584-3/TN · 76
定价：21.70 元

序

对航天事业来说，产品的可靠性和质量是至关重要的大问题. 震惊全世界的美国“挑战者”号航天飞机的失事直截了当地说明了这个事实. 因此，在航天工程中，可靠性已成为最重要的技术指标之一. 可靠性和质量与产品设计、生产、管理密切相关. 可靠性工作贯穿于产品的概念设计、方案设计、技术设计、生产、试验、操作使用直至退役的全寿命过程. 事实证明，只有在工程的每一阶段都扎扎实实地做好可靠性工作，才能保证整个工程的顺利进行，避免浪费，并取得预期效果.

可靠性不仅对尖端产品十分重要，对一般产品也不可忽视. 若没有相当的可靠性，任何产品都会失去市场竞争能力. 因此，对产品的可靠性进行定量控制，对产品质量进行可靠性评定等问题，已受到各产业部门的重视.

对于大批量较单纯的小型产品(如元器件等)的可靠性指标的考核与评定方法已为人们所掌握. 但是，对于大型复杂系统或比较昂贵的小批量产品的考核与评定，由于不能象对元器件那样作长时间或大批量的试验，不少工程技术人员和决策者感到束手无策. 有的系统虽然花了巨大代价进行试验，但往往由于找不到适当的可靠性评定方法而使试验获得的结果无法利用.针对这些情况，航空航天部一院 702 所周源泉、翁朝曦两位同志撰写了《可靠性评定》一书，介绍各种典型的可靠性评定方法. 这些方法是在航天工程的大量实践中，参考国内外有关资料，结合我国的实际，不断创新、改进而发展起来的. 它们不仅适用于航天工程，在不少民用产品中也已得到了成功的应用.

希望通过这本书，将这些方法推广到更多的工程领域中去，使可靠性评定工作在更广阔的范围中得到应用，为国民经济服务.

梁思礼

1988 年 12 月

作　者　序

1965 年以来，钱学森教授多次提出，系统可靠性综合评定是可靠性工程的最重要的研究方向之一，解决这个问题既是工程实践的迫切需要，又有着十分重要的理论意义．二十多年来的实践已充分证明这一论断是正确的．

作者多年来从事航天与民用复杂系统可靠性工程的开发实践与理论研究，现将多年来的实践经验与理论成果总结起来，并消化吸收国内外的有用成果，写成本书奉献给读者．

本书试图用经典、Bayes、Fiducial (信赖)三个学派的观点，来处理在可靠性评定、设计、验收等实践中提出的各种问题，并加以比较．书中的许多方法是在工程实用中不断得到检验、修正，并逐步完善的．希望它能成为读者解决有关问题的可信而方便的方法．

本书分为三部分．一是基础理论部分，包括第一、第二两章，介绍本书所用的各种概率分布及区间估计理论．二是单元可靠性、可用性评定与环境因子，包括第三至六章、第七章的一部分及第八章，它们既具有相对的独立性，又都围绕着系统可靠性、可用性评定而展开．三是系统可靠性与可用性评定，包括第七章的一部分，第九、第十章．为便于读者查阅，各章末列出了主要的参考文献，书末列出了可靠性评定中常用的数表．

本书的前身曾作为多期可靠性工程学习班的讲义，也曾作为研究生的教材．现在的内容是在此基础上根据工程实践的需要与专家们的建议，进行了全面的修订与补充而成的．阅读本书需要微积分、概率统计及可靠性工程的基础知识．

在长期的实践与研究中，作者一贯得到魏宗舒、张尧庭、成平、茆诗松等教授的指导与帮助．张尧庭教授审阅本书初稿，提出了许多宝贵意见，我部科技委副主任梁思礼总工程师还为本书撰写了序．在此，谨向他们表示衷心的感谢！因作者水平所限，错误与不足之处在所难免，诚请专家及读者批评指正．

目　　录

绪　　论

一、可靠性评定的意义

可靠性评定是根据产品的可靠性结构(即系统与单元间的可靠性关系)、寿命模型及试验信息,利用概率统计方法,给出产品可靠性特征量的区间估计,如可靠性下限、MTBF下限、失效率上限、环境因子上限、可靠性安全系数上限、变差系数上限等.

可靠性评定工作可在产品研制的任一阶段进行，因此能及时地为产品研制阶段的转样(模样→初样→试样→正样→批生产)提供依据．在产品定型时进行可靠性评定，是可靠性工作中不可缺少的环节,有着十分重要的意义．可靠性评定的意义如下:

(1) 科学而先进的可靠性评定方法，为充分利用各种试验信息奠定了理论基础．这对减少试验经费,缩短研制周期,对合理安排试验项目，协调系统中各单元的试验量等有重要的作用.

(2) 为系统的运筹使用提供条件,例如卫星发射机冗余数量的确定,需要给出单台发射机的可靠性、重量、经费等.

(3) 通过评定,检验产品是否达到了可靠性要求,并验证可靠性设计的合理性，如可靠性分配的合理性,冗余设计的合理性,选用元器件、原材料及加工工艺的合理性,等等.

(4) 评定工作会促进可靠性与环境工作的结合．在可靠性评定中，要定量地计算不同环境对可靠性的影响，要验证产品的抗环境设计的合理性，验证改善产品微环境的效果.

(5) 通过评定,可指出产品的薄弱环节,为改进设计和制造工艺指明方向，从而加速产品研制的可靠性增长过程.

(6) 通过评定,了解有关元器件、原材料、整机乃至系统的可靠性水平,这为制定新产品的可靠性计划提供了依据.

(7) 评定工作需要进行数据记录、分析及反馈,从而加强了数据网的建设.

由此可见,可靠性评定全面地促进了产品的研制、生产及使用的可靠性管理工作.

二、系统可靠性评定问题的提出及发展

复杂系统,如大型电站、大型客机、通讯网、铁路网、计算机网、雷达网、各种控制系统等,尤其是人造卫星、大型火箭等的实际使用试验,要耗费巨资,且周期很长，所以全系统的实际使用试验次数一般很少．为了在很少的全系统使用试验后，使复杂系统能达到高可靠与高性能的要求,国外在50年代的中、后期总结出了*金字塔式的试验程序*(如图1所示),即对较“低级”的产品进行大量模拟试验以发现问题,并改进设计与工艺,为较“高级”产品的高可靠性奠定基础,“级”越高,则试验量越少．当系统做完模拟试验后，即使复杂系统还未作使用试验，但对其可靠性已有了相当的了解了．故对复杂系统再做少量使用

试验，就能对其可靠性作出保证．与之相应，要求发展一种金字塔式的评定复杂系统可靠性的统计方法，以充分利用各级产品的模拟试验数据，否则，单靠少量的复杂系统的使用试验数据来评定高可靠性是行不通的．例如，对于成败型试验，取置信度 $\gamma = 0.8$，验证其可靠性下限为 $R_L = 0.9$，则要作 16 次无失败的试验．若其中有一次失败，则要试验 26 次．对于如卫星发射等这样大的试验量显然是不现实的．因此，金字塔式可靠性评定方法已成为复杂系统设计人员的不可缺少的手段．美国和苏联等国家对此大力进行了研究．

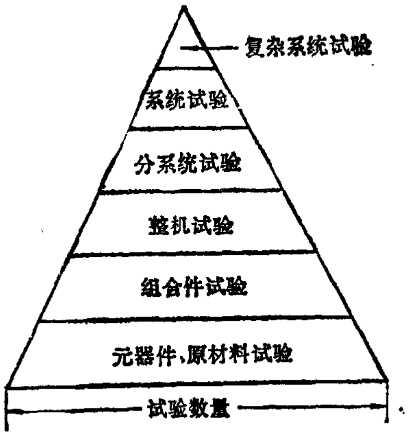

图 1 金字塔式的试验程序

Buehler (1957) 首先讨论了二项并联系统不可靠性的置信上限问题．之后，各国学者用概率统计分析及蒙特卡洛 (Monte Carlo) 的模拟手法，用经典方法，Bayes 方法及 Fiducial (信赖)方法，采用精确限及近似限，对各类系统的可靠性区间估计问题，作了大量的研究．美国、苏联出版的一些可靠性著作，如 Mann 等 (1974)，Martz & Waller (1982)，Springer (1979)，Епифанов (1979)，Волков 等 (1977)，Кринецкий 等 (1975)，Ушаков 等 (1985)，均以相当篇幅介绍了这方面的研究成果．

我国自 1964 年起，在钱学森教授的大力倡导下，开始了可靠性评定的理论研究与实践，由起初的少数人发展到目前有高校、科学院、工程设计所参加的科研队伍，并取得了不少成果．可靠性评定已逐渐发展成为可靠性数学的一个独立分支．在这个分支下，形成了若干大型课题．这些课题的广度、深度正在不断地扩展着，正在为四化大业作出贡献．

三、可靠性评定的主要方向

1. 系统可靠性评定与多级综合

系统可靠性评定的典型问题是，二项串联系统的可靠性下限，这个问题可以在以下三个方面扩展：

(1) 可靠性结构模型由串联扩展为并联、串并联、并串联、$k/N(G)$、旁联系统、直至逻辑复杂的 coherent 及 noncoherent 系统等．

(2) 单元的数据由二项分布扩展为指数分布、正态分布、对数正态分布、weibull 分布及实际问题中可能遇到的其它分布．

(3) 系统由"单元-系统"的两级系统扩展为"元器件-组合件-整机-分系统-系统-复杂系统"的多级系统，而且各级系统都取得了试验信息．这样的各级都由试验数据确定．数据有多种分布，含有多级结构的复杂系统的可靠性下限问题，正是我们要讨论的最一般的模型．

这个问题也叫做系统可靠性的多级综合问题，是可靠性评定中最关键的、也是最复杂的问题．多级综合不仅有重要的理论意义，而且有很大的实用价值．钱学森教授对此十分重视，1981 年他曾指出，这是可靠性理论的三大课题之一(这将在第九、十章中详细介

绍).

2. 单元可靠性评定

系统的基础是单元,同时,系统也可看作是一个单元. 因此,要研究系统的综合问题,首先要研究单元可靠性评定. 单元可靠性评定包括二项、负二项、超几何、指数、poisson、二参数指数、正态、对数正态、Weibull、Γ 单元等的可靠性评定. 单元可靠性评定有两个特点: 一是寿命试验数据往往是截尾样本,而不是完全样本,因此使问题变得更复杂困难;二是估计的对象不仅仅是分布参数的本身,而且还包括这些参数的某个函数,这样,问题就变得更多样更深入. 这些将在第三至五章中论述.

3. 机械可靠性

可靠性起源于对电子产品的研究.对机械产品的可靠性问题研究起步较晚,70 年代有人还认为机械可靠性正处于摇篮时期. 而目前,机械可靠性已发展成为可靠性工程的一个重要分支,已引起许多学者及工程师的兴趣. 它所应用的应力强度模型已被推广为广义的应力强度问题,如电、磁、热及各种性能可靠性的问题. 因此,它在机械结构可靠性之外的可靠性设计及评定中得到了广泛应用,甚至有人将可靠性定义为产品强度大于所受应力的概率. 机械可靠性主要有四类问题:

(1) 寿命问题,如确定翻修期等.

(2) 机械结构可靠性设计问题. 这是指在给定机械结构可靠性要求时,由强度、载荷的试验信息所确定的结构可靠性安全系数的上限.

(3) 机械结构可靠性估计问题,即由应力强度的信息及试验信息确定机械结构可靠性下限.

(4) 机械结构的选材问题,这就是根据材料的强度数据确定其变差系数的上限,作为材料优劣的标准.

关于强度、载荷均服从正态分布情况的研究已取得了结果. 而对强度、载荷的其它分布,这四类问题尚未全部解决,需进一步研究(详见第六章).

4. 单元及系统的可用性评定

当单元或系统发生故障后,如果可进行维修,使之恢复功能,则产品的质量特征既涉及失效特征又涉及维修特征,综合两者的质量指标即是可用性. 可修单元及系统的优劣常用稳态可用性来衡量. 一般常见的维修分布有指数分布,Γ 分布及对数正态分布等. 这样,和各种失效分布组合起来就形成了各种各样的可用性问题. 目前,有关单元的可用性评定问题,主要讨论 Γ 失效/Γ 维修、指数失效/对数正态维修的情况,系统则主要讨论由指数失效/指数维修的单元组成的系统的可用性评定问题. 这方面的研究可说方兴未艾,至于更深入的研究可见 Martz & Waller (1982). 关于单元、系统可用性评定的简要介绍见第七章.

5. 环境因子

不同环境下信息的折合问题是可靠性评定的关键问题之一,也是可靠性预测、可靠性

分配、可靠性验收中必须认真考虑的因素. 环境因子为可靠性与环境工作者所注目.国外对指数寿命型环境因子问题研究较多. 在实践中,还提出了不同环境下,产品特征服从其它分布的环境因子问题,如成败型环境因子,正态型环境因子, Weibull 型环境因子等. 这一方面要进行理论研究,给出各种分布类型的环境因子公式,更主要的是积累各种环境条件下的失效试验信息. 更深入一步的问题是系统环境因子问题,这将在第八章介绍.

6. Bayes 方法与先验分布

二十多年来, Bayes 方法已广泛用于可靠性分析, 介绍用 Bayes 方法分析可靠性问题的文献大量涌现,这是因为 Bayes 方法便于利用先验信息,能节省经费和时间,效果好,而且分析方法程式化,易于工程人员掌握. 由于这些原因, Bayes 方法特别受到科技学术界的重视. 例如, 1975 年美国召开了专门的学术会议讨论 Bayes 可靠性分析方法,发表了两卷会议录(见 Tsokos & Shimi, 1977), 1982 年则出版了第一本 Bayes 可靠性分析的专著(见 Martz & Waller, 1982).

Bayes 方法的关键是选择先验分布.目前,应用较多的有以下四类: 无信息先验分布(noninformative prior distribution), 共轭型先验分布 (conjugated prior distribution), 用 EB (经验 Bayes) 方法确定先验分布,由专家经验确定先验分布. 本书主要介绍前两种先验分布(详见第二章). 关于 EB (经验 Bayes) 方法,可参阅 Maritz (1970).

由于 Bayes 方法发展很快,颇有与经典方法并驾齐驱之势,在本书中,许多实际问题都用 Bayes 方法处理,并与经典方法作比较,以显示 Bayes 方法的特色.

7. Fiducial 方法的应用研究

区间估计方法中,除经典方法及 Bayes 方法外,还有 R. A. Fisher 提出的 Fiducial 方法.虽然 Fiducial 方法尚不完善,但它对可靠性评定的方法有了不少发展.这种方法避免了先验分布的选择,而且还具有 Bayes 方法的某些优点,即参数具有某个分布,称之为 Fiducial 分布.采用 Fiducial 分布可使某些问题的处理简化.在本书中也将介绍 Fiducial 方法, 并将其与经典方法及 Bayes 方法进行比较, 以利于工程人员选择使用. 关于 Fiducial 方法的基本概念将在第二章中讨论.

8. 可靠性增长

新产品的研制通常要经过模样→初样→试样→正样, 之后再转入批生产. 在研制试验中,不可避免地会出现各种问题与故障. 因此要寻找出问题或故障的原因,并采取相应的措施,例如,改进设计方案和制造工艺,或采用优质材料及高可靠元器件,以提高产品的可靠性,称之为可靠性增长. 所以, 产品的研制试验过程也就是产品的可靠性增长过程. 在这过程中根据多阶段的试验信息,分析及预测产品当前达到的及未来的可靠性,乃是产品研制中迫切需要解决的课题. 由于这个课题具有重要的实际意义, 已引起了很大的重视. 例如美国在 1972 年、1974 年和 1978 年曾三次召开可靠性增长的专门会议,并发表了会议录 ADA019372, ADA027053 及 IES Environmental Reliability project Group (1978), Reliability Growth Management, Testing and Modelling,并且制订了可靠性增长的标准及手册,如 MIL-STD-2068 (1977), MIL-STD-1635 (1978), MIL-HDBK-189

(1981)，IEC TC-56 的 164 号文件（1983）及 195 号文件（1984），MIL-STD-781D (1986)，MIL-HDBK-781（1987）等．可靠性增长课题正逐渐成为可靠性工程的一个重要的方向．钱学森教授称可靠性增长为变动统计学，它与系统可靠性多级综合等问题并列为可靠性理论研究的三大课题．关于可靠性增长的详细论述可见周源泉、翁朝曦(1990)著的《可靠性增长——管理、试验与分析》一书．

参 考 文 献

ADA019372 (1972), Reliability Growth Symposium.

ADA027053 (1974), AMSAA (Army Material System Analysis Activity) Reliability Growth Symposium (2nd.).

Buehler, R. J. (1957), Confidence Interval for the Product of Two Binomial Parameters, *JASA*, 52, 482—493.

IEC TC-56 (Secretariat) 164 (Draft, 1982), Reliability Improvement and Growth in Equipment and Component Parts.

IEC TC-56 (Secretariat) 195 (Draft, 1984), Reliability Improvement and Growth Programmes.

IES Environmental Reliability Project Group (Seminar Proceedings, 1978), Reliability Growth Management, Testing and Modelling.

Mann, N. R., Schafer, R. E. & Singpurwalla, N. D. (1974), Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data, Wiley.

Maritz, J. S. (1970), Empirical Bayes Methods, Methuen., London.

Martz, H. F. & Waller, R. A. (1982), Bayesian Reliability Analysis, Wiley.

MIL-HDBK-189 (1981), Handbook for Reliability Growth Management.

MIL-STD-1635 (1978), Reliability Growth Testing.

MIL-STD-781D (1986), Reliability Test for Engineering Development, Qualification and Production.

MIL-HDBK-781 (1987), Reliability Test Methods, Plans and Environments for Engineering Development, Qualification and Production.

Springer, M. D. (1979), The Algebra of Random Variables, Wiley.

Tsokos, C. P. & Shimi, I. N. (1977), The Theory and Applications of Reliability, vol. I & II, AP.

Волков, Е. Б., Судаков, Р. С., Шаликин, Т. А. (华棣、顾明初译，1977)，火箭发动机可靠性理论基础，国防工业出版社.

Епифанов, А. Д. (张燕林译，1979)，控制系统的可靠性，国防工业出版社.

Кринецкий, Е. И., Алесадровская, Л. Н. (1975), Летные испытания систем управления летательными аппаратами, Машиностроение, Москва.

Ушаков, И. А. (1985), Надежность мехнических систем, (справочник), радио и связь, Москва.

童珣洲等(徐维新、糜茂林译，1985)，可靠性和有效性评审程序手册，宇航出版社.

周源泉，翁朝曦(1990)，可靠性增长——管理、试验与分析，科学出版社.

第一章　常用的失效分布及有关的分布

1.1 引　　言

对产品进行可靠性分析时，首先要选择产品的失效分布．通常采用两种互相补充的方法，一种方法是根据失效数据，采用数理统计的方法进行分布拟合优度检验．由于非对称概率密度函数之间的重要区别在尾部，当样本量较小时，数据稀疏，其右端尾部的实际观测值特别少，故用此法区别不对称的失效分布是困难的．另一方法是考虑引起失效的物理过程或产品的耗损、老化性质．其途径之一是求助于失效率函数的概念，它使得人们有可能从物理概念上去区分不同的失效分布．

继介绍失效率函数之后，本章将对一些具有重要理论及实用价值的失效概率分布及与之有关的分布进行研究，讨论这些分布的主要性质、各种分布间的关系，给出有关分布的分布函数、分位数的精确算法．为了工程应用方便，对若干常用分布的分布函数及分位数，还给出了近似算法．

本章所述的各种概率分布，在以后各章中会经常用到，它们是阅读本书必须具备的基础知识．对这些概率分布十分熟悉的读者，可以跳过本章，直接阅读以后各章．

1.2 失效率函数

失效率函数的概念可阐述如下：

产品失效时间T的分布函数为$F(t)\triangleq P\{T\leqslant t\}$，其失效密度函数为$f(t)=dF(t)/dt$，$t$ 时刻产品的可靠性函数为 $R(t)=1-F(t)$，则失效率函数定义为

$$\lambda(t)=f(t)/R(t). \tag{1.1}$$

作为时间的函数，失效率函数简称为失效率．其概率解释为：$\lambda(t)\Delta t$ 表示年龄为 t 的产品，在区间 $(t,\ t+\Delta t)$ 内将失效的概率，即

$$\begin{aligned}\lambda(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<T\leqslant t+\Delta t|T>t\}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{(t<T\leqslant t+\Delta t)\cap(T>t)\}}{P\{T>t\}\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<T\leqslant t+\Delta t\}}{R(t)\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)\Delta t}\\&=f(t)/R(t).\end{aligned}$$

根据物理上的考虑，对特定产品可选择 $\lambda(t)$ 的函数形式．一旦这样做了，就可得到 $\lambda(t)$ 的微分方程，从而求得

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right],$$
$$F(t) = 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right]$$

与

$$f(t) = \lambda(t)\exp\left[-\int_0^t \lambda(u)du\right].$$

对可修产品，其失效时间用随机过程处理时，过程的强度即失效率 $\lambda(t)$，此时，应当用失效次数 $N(t)$ 对总试验时间 t 的导数来表示，即

$$\lambda(t) = dN(t)/dt. \tag{1.2}$$

这在可靠性增长分析中有着十分重要的作用.

为了选择 $\lambda(t)$ 的函数形式，通常认为产品有三种失效类型：

(1) 早期失效，其 $\lambda(t)$ 为下降函数；

(2) 随机失效，其 $\lambda(t)$ 近似为常数；

(3) 耗损失效，其 $\lambda(t)$ 为上升函数.

在可靠性工程中常用指数分布描述随机失效，用正态分布描述耗损失效，而用 Weibull 或 Γ 分布则可全面描述早期失效以及随机、耗损各类失效. 但是，要利用这些分布进行统计分析，必须取得较充分的寿命试验数据，并判定数据属何种分布，在不少情况下，由于数据不足及物理分析困难，无法判定产品寿命属于何种分布，此时可将数据作为成败型数据分析。为便于这些分析，下面以二项分布、正态分布、指数分布和 Weibull 分布为主导分布，对常用的失效分布及有关的分布进行较详细的讨论.

1.3 二项分布及有关的分布

1.3.1 二项分布

当产品被分为合格品与不合格品，或试验结果仅分为成功、失败两种状态时，若产品的批量足够大，从中随机且独立地抽出 n 个样品，则其中的次品数 X 是一随机变量，X 恰为 x 的概率为

$$P\{X = x\} = \binom{n}{x} R^{n-x}(1-R)^x,\ x = 0, 1, \cdots, n,$$

式中，R 为产品的可靠性或合格品率；

$$\binom{n}{x} = n!/[x!(n-x)!]$$

为牛顿二项式系数. 因为 $P\{X = x\}$ 恰好是牛顿二项展开式的诸项：

$$[R + (1-R)]^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} R^{n-x}(1-R)^x,$$

故称 X 为二项分布随机变量，它常用于产品的抽样检验、一次性使用的产品(如火工品、火箭等)的可靠性分析和对 $k/N(G)$ 表决系统的可靠性计算.

二项分布的均值与方差分别为

$$EX = n(1-R),$$
$$DX = nR(1-R). \tag{1.3}$$

1.3.2 超几何分布

一批产品有N件，其中有次品D件。若从这批产品中随机抽取n件，则其中所含的次品数X等于x的概率为

$$P\{X=x\}=\frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}},\ x=\max\{0,\ n+D-N\},\cdots,\ \min\{D,\ n\},$$

称X服从超几何分布。其均值、方差分别为

$$E(X)=n\frac{D}{N},$$

$$D(X)=\frac{N-n}{N-1}n\frac{D}{N}\frac{(N-D)}{N}. \tag{1.4}$$

1.3.3 负二项分布

对于批量很大的产品，预定试验次数 n，其失败次数(或成功次数)是二项分布随机变量。在有些情况下是预定成功次数 s（或失败次数 f)，它所需的试验次数X是负二项分布随机变量，负二项分布也称 Pascal 分布。

对预先规定成功次数为s的情况，最后一次试验必定是成功的，而前$x-1$次试验中恰有$s-1$次成功，这两个事件的联合概率即X的概率分布:

$$P\{X=x\}=\binom{x-1}{s-1}R^s(1-R)^{x-s},\ x=s,\ s+1,\cdots.$$

其均值与方差分别为

$$E(X)=s/R,$$

$$D(X)=s(1-R)/R^2. \tag{1.5}$$

负二项分布还可用另一种形式表示，令 $Y=X-s$，Y 即失败次数随机变量，显然，

$$P\{Y=y\}=\binom{s+y-1}{y}R^s(1-R)^y.$$

因

$$\binom{-s}{y}=\frac{(-s)(-s-1)\cdots(-s-y+1)}{y!}=(-1)^y\binom{s+y-1}{y},$$

故

$$P\{Y=y\}=\binom{-s}{y}R^s(-p)^y.$$

式中 $p=1-R$。因 $R^s(1-p)^{-s}=R^s\sum_{y=0}^{\infty}\binom{-s}{y}(-p)^y$ 的每一项即为$P\{Y=y\}$，故称Y服从负二项分布。

对预定失败数f的情况，所需的试验次数X服从下述负二项分布:

$$P\{X=x\}=\binom{x-1}{f-1}R^{x-f}(1-R)^f,\ x=f,\ f+1,\ \cdots,$$

其均值与方差分别为

$$E(X)=f/(1-R),$$
$$D(X)=fR/(1-R)^2.$$

1.3.4 β 分布

若随机变量X具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(s,f)}x^{s-1}(1-x)^{f-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它 } x,\end{cases}$$

则称X为具有参数 s, f 的 β 分布,记为 $\beta(x|s,f)$。式中 $B(s,f)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{f-1}dx$ 是 β 函数。β 分布的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{B(s,f)}\int_0^x u^{s-1}(1-u)^{f-1}du \triangleq I_x(s,f),$$

称之为不完全 β 函数,有专门的表可查。

β 分布具有以下几个重要性质:

1. β 分布的矩为

$$E(X^k)=\frac{1}{B(s,f)}\int_0^1 x^{k+s-1}(1-x)^{f-1}dx=\prod_{i=1}^{k}\frac{s+i-1}{s+f+i-1},$$

其一、二阶矩及方差分别为:

$$E(X)=\frac{s}{s+f},$$
$$E(X^2)=\frac{s(s+1)}{(s+f)(s+f+1)},$$
$$D(X)=\frac{sf}{(s+f)^2(s+f+1)}. \quad (1.6)$$

2. β 分布的密度函数满足 $\beta(x|s,f)=\beta(1-x|f,s)$。

3. β 分布的分布函数满足 $I_x(s,f)=1-I_{1-x}(f,s)$。

4. β 分布的分位数满足 $\beta_{1-\gamma}(s,f)=1-\beta_\gamma(f,s)$,这里 $\beta_{1-\gamma}(s,f)$ 是参数为 s, f 的 β 分布的 $(1-\gamma)$ 分位数。

5. β 分布与二项分布之间的关系为

$$\sum_{x=0}^{f}\binom{n}{x}R^{n-x}(1-R)^x=I_R(s,f+1), \quad (1.7)$$

式中,$n=s+f$。

证:
$$\frac{d}{dR}\left[\sum_{x=0}^{f}\binom{n}{x}R^{n-x}(1-R)^x\right]$$
$$=n\binom{n-1}{f}R^{n-f-1}(1-R)^f$$
$$=\frac{1}{B(s,f+1)}R^{s-1}(1-R)^f$$
$$=\beta(R|s,f+1),$$