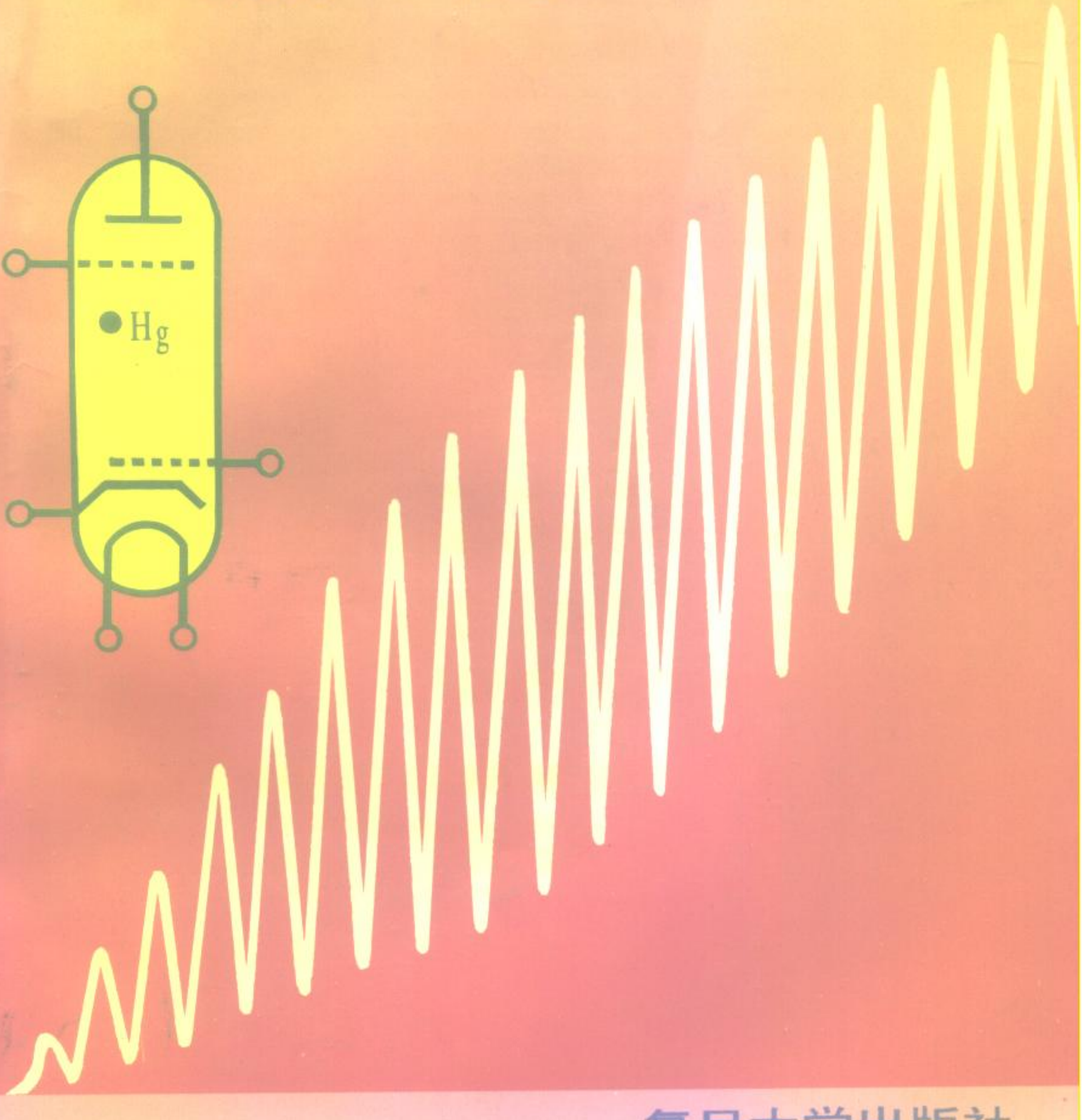
近代物理实验

●戴乐山　戴道宣　主编



复旦大学出版社

近代物理实验

戴乐山
戴道宣 主编

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书是在总结复旦大学物理系“近代物理实验”教学改革的实践并参考国内外实验教材的基础上编写的．全书由数据处理及夫兰克-赫兹实验、冉绍尔-汤森效应、磁偏转小型质谱仪、氢光谱与类氢光谱、塞曼效应、电子自旋共振、核磁共振和 NaI(Tl)单晶 γ 能谱仪八个实验以及四个附录和三个附表组成．而每个实验由基础知识、实验内容、实验报告、实验资料和阅读资料构成．

本书是一本适合我国国情的物理实验教材，其重点在于培养学生用实验方法研究物理现象的能力和良好的实验素质，并在实验技能方面获得必要的训练．

本书可作为理工科大学实验教材，也可作为实验参考书．

近代物理实验
戴乐山　戴道宣　主编
复旦大学出版社出版
（上海国权路 579 号）
新华书店上海发行所发行　　复旦大学印刷厂印刷
开本 787×1092　1/16　印张 15，75　字数 380，000
1995 年 9 月第 1 版　　1995 年 9 月第 1 次印刷
印数 1—2，500
ISBN7-309-01553-3/O・158
定价：18.00 元

前　　言

1956年初，复旦大学物理系决定在原子物理实验室的基础上筹建“中级物理实验室”.根据系领导的安排，由周雄豪教授、郑广垣教授及我参加筹建工作，并得到固体物理实验室主任方俊鑫教授的全力支持.参照苏联Г.В.斯皮瓦克编写的《专门物理实验》一书，加上固体物理实验室中的原子物理实验共准备了38只实验.1956年秋，正式开设“中级物理实验”课程.由于准备得比较仓促，对教学法未给予足够的重视.60年代初，恢复中级物理实验室.在60年代中期进行的教学改革中，对教学内容和教学方法作了重要的改进，并在个别实验上进行试点，适当增加实验时数，即不限定一周完成一只实验，以保证学生能在教师的指导下独立完成实验课题；同时，加强了实验技能方面的训练.1978年末，重新开始筹建实验室，并改名为“近代物理实验室”.根据以往的经验，在筹建时就提出：近代物理实验课应以指导学生学习用实验方法研究物理现象为主要教学内容，因此安排的实验应以在近代物理学发展史中起重要作用的著名实验为主.教学内容包括实验思想、实验设计、实验技术及数据处理等四个方面，在各实验中可以有所侧重，要求学生通过亲自实践前人的科学实验，从中学习如何用实验方法研究物理现象，以及加深对实验与理论的相互关系的理解.物理系的学生是学习物理学科的基本知识和规律的，对于高年级学生应以能力培养为主.当时要求学生在连续6课时内完成一只实验是不现实的.由于在课内没有充分的时间去查阅资料和思考问题，要求学生在实验前事先做好充分的准备，并能预料到实验中可能发生的问题，这是不切实际的，很难做到在教师的指导下独立完成实验.由于仅有半年的筹建时间，很多准备工作未能及时跟上，例如备课、教学要求与教学内容没有进行深入的讨论.因此，直至80年代初，开始试行按2×6课时完成一只实验的要求来准备实验，近年来，我们开始实践按模拟科研实验的要求来准备实验，使同学能更好地在教师的指导下独立完成实验.教学实验不同于科研实验，但也有相似的地方.教学实验的理论与实验部分对教师来说都是熟悉的，这是不同于科研实验之处；但是对同学来说，必须阅读一些有关资料，在实验与理论上作一些探索.学生通过亲自实践前人的科研实验，学习用实验方法研究物理现象，这是与科研实验相似之处.在近代物理实验的教学中把教学实验作为模拟科研实验来安排，这对培养学生的独立工作能力是重要的.

根据我们的经验，在课时安排上，以3课时为一个单元，每只实验用四个单元来完成，效果较好，这样做有利于随时发现问题和改正错误、逐步掌握仪器设备的操作和使用方法、完善实验方案及“在现有的设备和分析方法的有效性的限制条件下，尽可能获得准确的测量结果”.由于学生要仔细阅读实验室资料，同时在实验过程中遇到问题时需要查阅和阅读资料，写作实验报告也要占用不少时间，因此，课内、课外的比例最好为1：2.要求学生确实是在教师指导下独立完成实验，这些时间是必不可少的.

在编写这本教材的过程中，时刻想到我的两位导师，江仁寿教授和王福山教授.他们把我带进了物理实验教学这一领域，随时进行具体和耐心的指导，从建设实验室开始，一直到研究教学要求、教学方法、教学安排和对学生的要求.特别强调要指导学生独立完成实验，对学生要严格要求、培养良好的实验素质和习惯及具有严谨的科学作风.

戴乐山

1994年10月于复旦大学

编者的话

物理是一门实验学科."普通物理实验"和"近代物理实验"是物理系学生学习实验物理学的两门重要基础课.在这两门课程中，学生可以学习和亲自实践实验物理学家如何用实验方法来研究物理现象，了解实验物理学在物理学发展史中的作用和地位，更好地理解实验物理学与理论物理学之间的密切关系.两门实验课有共同的教学目的，差异仅在于研究对象不同,即分别为经典物理和近代物理现象.当然，普通物理实验课还有一个重要的教学内容,给学生以实验工作者所需的正规的基本训练和培养良好的实验素质.在近代物理实验课中，我们选取一些在近代物理发展史中起重要作用的实验作为教学内容，其中不少曾获得诺贝尔物理学奖.学生通过亲自做这些著名实验，学习这些实验中所用的研究方法:实验物理学家如何用实验方法研究物理现象和规律，如何致力于实验观察，以及如何试图阐明观察结果和引入解释、描述实验结果所需的新概念.

由于近代物理实验课程要求在教师指导下，由学生独立完成每一个实验.这样，就需安排足够的课内、课外时间，使学生有可能根据所遇到的问题，阅读资料、思考问题，有准备地与指导教师进行讨论，独立地完成每一个实验.每一个实验一般要安排4～6段时间(每段课内3课时，课内、课外的比例为1∶2)，根据国内的现状，在本书中编写了八只实验的教材.每一个实验都由五部分组成:(i)基础知识,(ii)实验内容,(iii)实验报告,(iv)实验资料,(v)阅读资料.在"基础知识"中，简要地介绍这一实验所需的理论和实验基础知识,使学生了解这一实验的概貌;"实验内容"中均安排有两种不同的方案供选择,以适应不同层次和专业的需要，其中方案一是基本的实验内容，课内需要2×3课时，而方案二则列入了较深的内容.如果实验室有条件，或学生有兴趣,可以按方案二进行，这时需要根据实验中发现的具体问题阅读"实验资料"中的有关内容;在实验资料的编排上，注意由浅入深、循序渐进、以利于因材施教.其中还列入有一定难度的探索性实验的资料，供学有余力的学生选用,以活跃学生的物理思想和培养科研能力;在"实验报告"中，列出了对实验报告的要求;为了锻炼和提高学生阅读原始材料和文献的能力，在"阅读资料"中选编了一二篇与这一实验有关的资料或原始文献的中译文，这些均系原文,不妥之处亦未予改正，留给同学去发现和修正.关于实验步骤，要求学生根据实验内容和实验报告的要求自行拟定.当然，学生在做第一、二两个实验时，可能不适应，不知如何拟定实验步骤，这时，指导教师可加强指导,与学生一起分析在实验中如何实现和研究有关的物理现象.同时,学生还可能不知道如何阅读仪器的使用说明书，这也是需要加以指导的.在最初几次实验中，加强这方面的指导是完全必要的，这是培养学生独立工作能力的一个极为重要的方面.

从20世纪30年代开始，核物理学有了很大的发展，现在已进入粒子物理学的发展阶段，所以，核物理实验应是近代物理实验课程中的一个重要组成部分，有可能的话，宜占

整个课程的1/4～1/3，最好还有粒子物理方面的实验.由于北京大学、复旦大学已经合编了《核物理实验》一书(原子能出版社，1989年)，所以，在这本教材中只列入一只核物理实验：NaI(Tl)单晶γ能谱仪.在近代物理实验中，实验技术是重要的.从我们所选的实验中，可以看到科学和技术之间相互促进的关系.量子物理学为微波技术的发展提供了坚实、丰富的物理基础；微波技术的发展又为研究量子现象提供了有力的手段，不仅为量子力学提供了重要的实验依据，也暴露了量子力学的不足和缺陷，而且为量子电动力学的发展提供了强有力的依据.所以，在近代物理实验课程中，学习一些实验技术是必要的，例如真空技术、微波技术等，但重点是要求学生掌握如何学习和使用"新"的实验技术，为以后使用或研究新的实验技术打下基础.

这本教材是根据"在教师的指导下，培养学生独立工作能力"为指导思想编写的.使用本教材时，要注意如下几个方面：

实验前的预习是重要的，但不可能完全预计到实验中将遇到的情况，很多问题要经过亲自实践后才能发现.所以，预习时有考虑不周之处是难免的.预习时，应在实验记录本上写下这一实验的基本思想和所用的实验方法，并列出实验条件、实验装置、实验步骤及所需记录的数据，不要遗漏预习的日期，这些是完整的实验记录中不可缺少的.当然，预习时还需到实验室观察实物及阅读必要的仪器使用说明书.在分段式教学中，每次实验要经过3～4个单元(每个单元3课时)才能完成，因此要有2～3次预习过程.实验时，记录下实验的全过程，包括操作过程、原始数据、观察到的实验现象、计算方法及结果.实验时要随时分析测量结果，例如在方格纸上粗略地描下实验结果的大致规律，以对数据作出初步的判断.对每一个物理量要至少独立地测量三次，以便计算测量结果的不确定度.如果在实验过程中对实验装置或实验步骤作了修改，应在记录本上作出说明，所以，在记录本上，最好在每页的右边留出适当的空白，作备注和说明之用.实验全部结束后，在记录本上写下实验结果及小结.数据处理是必不可少的内容，学生必需估算测量结果的不确定度.培养学生正确使用及重视实验记录本是一个很重要的教学环节，这是培养学生具有良好的实验素质的一个重要方面，尤其是使学生养成记录、保存原始资料的习惯.一般可以用数据记录本作为实验报告上交，但在记录本上要写一段小结.每学期应该有一只实验要按投稿的要求来写作实验报告，例如根据《物理实验》、《大学物理》等杂志对稿件的要求来写作，以培养学生的总结和写作能力.同时，每人要写篇幅为一页的实验报告提纲上交实验室，约定口头报告的时间.同组者各作10分钟的口头报告，然后师生共同讨论.讨论时，教师在帮助同学总结实验的基础上，进一步诱导学生思考一些深层次的问题，并提出有一定深度的问题，要求学生即席回答.实践表明这是培养学生智能的一种好形式，师生均有得益.

这本教材总结了我校多年来近代物理实验教学工作的经验和教训，它是1956年以来参加建立和恢复"中级物理实验室"及"近代物理实验室"的教师和职工辛勤劳动的产物.书中包含了1978年参加重建"近代物理实验室"工作的教师顾鸿椿、钱钟华、范承善、戚盛勇、李白云、刘复汉、曹永明、邱励欧和孙琳等同志的宝贵教学经验.

参加本书编写工作的有"近代物理实验室"的张桂墙、戴道宣、王煜、李之其、潘玉莲和朱永强同志.实验一、二由潘玉莲同志执笔，实验三由朱永强同志执笔，实验四、五由李之其同志执笔，实验六、七由戴道宣同志执笔，实验八由张桂墙同志执笔，个人计算机用多功能接口卡由王煜同志执笔；数据处理则由戚盛勇同志执笔，并特请我校顾昌鑫教授编写其中

的“蒙特卡罗方法”一节.感谢复旦大学出版社林瑶华同志绘制了全书的图稿.

由于编者的学术水平有限，一定存在不少缺点和错误，敬请读者批评和指正.

编　者

1994年10月

目　录

数据处理

在物理实验中，数据处理是很重要的.我们不仅要对实验中所获得的数据进行分析，还要设计模型及对预期的结果或新的规律作出判断.困难之处在于实验中的测量数据本身是有误差的，对数据进行分析和作出结论时都要考虑这一点.因此，有不少专著专门讨论实验数据的处理方法[1~3].在这里我们只讨论实验数据中的随机误差，或A类误差；而对系统误差，或B类误差则不作讨论.一般来说，应该尽可能减小B类误差，即采取一些措施，例如等时测量法、对称测量法、……来减小B类误差.然后，再对实验中的B类误差作出估计.由于如何处理及估算它的大小，在很大程度上与实验工作者的经验与素质有关，在这里不作进一步的讨论.

测量结果是有误差的；也就是说，测量结果与待测量的实际数值(或称*真值*)是有差异的，这一差异的大小称为*测量结果的误差*.设待测量的真值为 μ，某一次测量结果为 x，则定义这次测量结果的误差 e 为

$$e=x-\mu$$

为什么测量结果是有误差的？这可以从下列几方面来看：首先，测量是用各种仪器与设备来进行的，而仪器、设备的准确度与科学技术和生产的发展水平有关.例如，我们还不能以0.000 1℃以上的准确度来测量物体的温度；再如，在长度测量中，基本单位"米"的复现精度的理论极限值为$(1\sim3)\times10^{-9}$.因此，测量结果总有误差；其次，在实用中，我们允许测量结果有一定的误差.例如，我们日常生活中使用的钟、表，有快有慢，但是，即使每天差十分之几秒，我们还是认为它是可靠的，对日常生活没有影响.当然，在航天上，用这种钟来控制和发射导弹，显然，精度是远远不够的，如果把它装在卫星中，研究相对论效应，那末，至少要达到$10^{-6}\sim10^{-9}$的精度.当然，要求测量误差小或高的测量精度，这是要花代价的.所以，在实际工作中，如何对测量工作提出合理的要求是很重要的.也就是说，我们先要根据测量结果允许的误差大小，选定所需的实验方法或要研究新的测试方法.例如，我们在 γ 能谱实验中，测量能量约为 2～3MeV 的 γ 射线的能量，要求它的准确度为百分之几或千分之几，两者所用的测量方法可以是相同的，但是对它们所用的设备将提出不同的要求.例如，后者的探头的线性度要比前者高一个数量级；高压稳压电源的稳定性也要比前者高一个数量级；线性脉冲放大器和多道分析器的非线性系数的要求也是这样，甚至还需用精密脉冲放大器和电桥法来标定.对实验室也将提出恒温的要求.所以，从表面来看，测量误差只要求它小一个数量级，但是，在设备上要作更多的投资，投入更多的人力和精力.因此，在物理实验中，分析和计算测量结果的误差是很重要的.对测量方法和测量过程进行误差分析，提供了减小误差的途径；对正确选择仪器的规格、性能及实验方法、实验条件，它也提供了必要的依据.我们可以这样说，不给出测量结果的误差，那末这样的实验结果是没有意义的.下面我们举几个例子

来说明这一点.

在量子电动力学的发展史中,兰姆位移的发现起了重要的作用[4].量子电动力学是以虚光子和真空极化两个假设为前提的,需要用实验的方法来证实这两个假设的合理性,这就要找到一些直接与这两个假设相联系的、可以进行观察的效应.这类测试可分成低能和高能两类,后者在对撞机中进行,前者则为兰姆位移和 g_e 因子测量.在这里,我们通过量子电动力学的低能测试来进一步说明实验数据处理的重要性.1928 年,狄喇克提出了他的电子论,把量子论同相对论力学结合起来,说明了电子的自旋特性,改进了索末菲的氢光谱精细结构公式,与实验结果符合甚佳.1930 年,有的实验结果表明氢的 $^2S_{\frac{1}{2}}$ 与 $^2P_{\frac{1}{2}}$ 能级的能量可能有差异,由于谱线展宽的原因,无法得出肯定的结论.1947 年,兰姆与莱瑟福[4,5]的实验结果表明这两个能级相差 1 060 MHz,验证了场的零点振动,即虚光子假设.但是,由于实验结果的准确度不够,不能验证真空极化假设.直到 1950 年,兰姆用微波方法准确地测得 $^2S_{\frac{1}{2}}$ 能级比 $^2P_{\frac{1}{2}}$ 能级要高 0.035cm^{-1},即 1 057.9 MHz.测量结果的准确度提高到 0.1MHz 以上,才证实了这一位移是由场的零点振动与质子造成的真空极化所产生的,理论计算值与实验结果在误差范围内一致,验证了虚光子和真空极化两个假设.量子电动力学的另一个实验验证是电子的反常 g 因子.根据狄喇克方程,电子磁矩 μ_e 应该等于玻尔磁矩 μ_B,实测结果却是 $\mu_e/\mu_B \neq 1$.根据量子电动力学中的电子与辐射场的相互作用理论,可以计算电子的反常 g_e 因子,理论计算是繁复的,T. Kinoshita 等[6]于 1990 年用现代高速计算机计算了一千多个小时,计算得到与电子反常磁矩值有关的 α_e^{th} 的理论计算值为

$$
\begin{aligned}
\alpha_e^{th} &= \frac{\mu_e}{\mu_B} - 1 \\
&= \frac{1}{2}(g_e - 2) \\
&= 1\,159\,652\,140(27.1)(6.7)\times 10^{-12}
\end{aligned}
$$

上式中的第一个括号内的数值是由于计算时所用的精细结构常数的公认值的不确定度产生的,后者则是理论计算中的不确定度.计算时使用的精细结构常数是由量子霍尔效应测得的值:

$$\alpha^{-1} = 137.035\,997\,9(32) \quad (0.024\text{ppm})$$

在上述的反常 g_e 因子的计算中计入了 μ 子、τ 子、强子等的真空极化效应和弱相互作用,它们的贡献分别为

$$\Delta\alpha_e(\mu\text{子}) = 2.804\times 10^{-12}, \qquad \Delta\alpha_e(\tau\text{子}) = 0.010\times 10^{-12}$$

$$\Delta\alpha_e(\text{强子}) = 1.6(2)\times 10^{-12}, \qquad \Delta\alpha_e(\text{弱相互作用}) = 0.05\times 10^{-12}$$

1987 年,凡杜克(Van Dyck)等[7]用离子阱技术测量了电子和正电子的 g 因子,

$$\alpha_{e^-}^{\text{实验}} = 1\,159\,652\,188.4(4.3)\times 10^{-12}$$

$$\alpha_{e^+}^{\text{实验}} = 1\,159\,652\,187.9(4.3)\times 10^{-12}$$

理论计算值与实验值的不确定度分别为 2.4×10^{-8} 与 3.7×10^{-9},两者符合得如此之好,精度如此之高,有力地证明了量子电动力学的两个基本假设是完全正确的.如果不计算理论计算值与实验值的不确定度,那末就无法作出判断及确定两个基本假设是否正确.

用上述的电子和正电子的反常 g 因子及理论计算公式反过来计算精细结构常数 α^{-1},则有

$$\alpha^{-1}(\alpha_e)=137.035\ 992\ 22(94)\quad(0.006\ 9\ \mathrm{ppm})$$

由粒子物理学所得的计算值的不确定度小于上述用量子霍尔效应测得的值，仅为它的30%.

根据广义相对论的引力场理论，在引力场中，原子辐射的谱线将向红光一侧移动，称为红移. 双星 40 ERIDANI 的红移的理论结果与实验结果的比值如下：

$$\frac{\text{速度(计算值)}}{\text{速度(理论值)}}=\frac{17\pm3\mathrm{km/s}}{21\pm4\mathrm{km/s}}$$

从这里又可看出误差计算的重要性. 再例如，根据广义相对论，在扣除岁差和其他行星的影响之后，水星近日点每百年应前移 43.0″，实测值为 42.6″±0.9″，两者符合甚佳. 即使在只需回答是和否的实验中也是一样，要对实验方法和测量过程进行系统的误差分析，才能对实验结果作出肯定的结论. 所以，在物理实验中计算（或估算）测量结果的误差是完全必要的.

一、随机变量与概率（密度）函数

我们测量某一个物理量时，总是先根据测量要求，选定一种测量方法，对所用仪器的规格、操作规程、实验步骤和实验条件等作出规定，然后用上述设备及方法进行测量. 因此，测量过程中的误差来源如下：(i) 测量方法的不完善；(ii)仪器、设备本身的固有误差；(iii)在具体测量过程中，没有满足测量方法中规定的实验条件和操作规程；(iv)观察者本身感觉器官的限制；(v) 物理现象的随机性，或称*统计起伏*. 这就是说，测量结果的误差是由两类误差组成的，即随机误差及系统误差.

系统误差的定义是：对某一物理量 x 进行了很多很多次测量，测量结果用它的算术平均值 $\bar{x}$ 来表示：

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

测量结果 $\bar{x}$ 与真值 μ 的差值，称为这一*测量结果的系统误差*，即

$$e_{\text{系统}}=\bar{x}-\mu$$

假设我们进行的是没有系统误差的测量过程，或者对所有的系统误差进行了修正，测量结果还是会有随机起伏的，这类误差叫做*随机误差*（或称为*偶然误差*）. 处理这类误差一般都使用多次测量的方法，当测量次数很多很多时，可以认为它的算术平均值就是待测量的真值，即

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

我们称 $x_i-\mu$ 为*第 i 次测量结果的随机误差*.

1. 物理量与随机变量

我们测量某一物理量时，每次测量结果用一个数 x 来表示. 如果 x 是一个随机变量，我们就可把被测的物理量作为随机变量，在某一特定条件下测得的值即为该随机变量的随机

值. 随机变量可分为两种类型：(i) 随机变量只能在数轴上取一些孤立点的值，称为离散型随机变量. 如放射源放射出的粒子数只可能是一些整数；(ii) 另一类随机变量的随机值在数轴上是连续的，这类随机变量称为连续型随机变量. 例如，测量一个谐振腔的谐振频率，它可以是谐振点邻近域内的任何一个值.

2. 总体与样本

对一个随机变量进行无限多次的测量，这些无限多个数据组成了该随机变量的总体. 但是，在实际工作中，我们只能进行有限次的测量，例如 n 次测量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$；也就是从总体中随机抽出有限个数(n)的随机值，这些有限个数的随机值的集合，称为样本. 抽取的随机值的个数，或测量次数 n 称为样本容量.

3. 概率(密度)函数

如果用 x 来表示变量 X 的测量值，而且对任何实数 α，$x<\alpha$ 有确定的概率，则称 X 为一个随机变量，它的每一个随机值都有一定的出现概率. 各随机值所对应的概率构成了随机变量的概率分布. 概率分布反映了随机变量的全部特性.

可以用两种方法来描写随机变量的概率分布：分布函数 $F(x)$ 和概率(密度)函数 $p(x)$. 它们的定义分别如下：

离散型随机变量 X 取值 x 时的概率 $p(x)$ 称为该随机变量的概率函数，即

$$p(x) \equiv P(X=x) \tag{0-1}$$

随机变量 X 的取值小于或等于 x 时的概率 $F(x)$ 就定义为随机变量 X 的分布函数，即

$$F(x) \equiv P(X \leqslant x) \tag{0-2}$$

设测量某一个放射源的核衰变数的实验结果如下：

1 秒内的核衰变数	0	1	2	3	4	5	…
概　　率	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	…

核衰变数 X 是一个离散型的随机变量，它的概率函数 $p(x)$ 可列表如下：

x	0	1	2	3	4	5	…
$p(x)$	0.135	0.271	0.271	0.180	0.090	0.036	…

它的分布函数 $F(x)$ 则可列表如下：

x	0	1	2	3	4	5	…
$F(x)$	0.135	0.406	0.677	0.857	0.947	0.983	…

分布函数 $F(x)$ 与概率函数 $p(x)$ 之间的关系为

$$F(x) = \sum_{x_i \leqslant x} p(x_i) \tag{0-3}$$

式中 $\sum$ 表示对所有满足 $x_i \leqslant x$ 的 $p(x_i)$ 求和. 显然，$F(x)$ 是一个单调上升函数，及

$$F(-\infty)=0; \quad F(\infty)=1$$

连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 的定义与离散型的相同，即(0-2)式. 但是，它的概率密度函数 $p(x)$ 则定义为

$$p(x)=\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} \tag{0-4}$$

或

$$p(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}F(x)=P(x<X\leqslant x+\mathrm{d}x)$$

即概率密度函数在某一点的值就是随机变量在该点的概率密度. 随机变量的值落在某点附近一个无限小的区间内的概率等于该点的概率密度函数的值和无限小区间的间距的乘积. 概率密度函数 $p(x)$ 和分布函数 $F(x)$ 的关系可表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\mathrm{d}x \tag{0-5}$$

显然

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x=F(\infty)=1 \tag{0-6}$$

(0-6)式称为归一化条件.

4. 期望值、方差和协方差

虽然随机变量 X 的概率(密度)函数 $p(x)$ 全面地描述了随机变量的性质(为了方便起见，以后不再区分 X 和 x，即用 x 表示随机变量或随机值). 但是，我们如果能用几个特征数字来表示随机变量的性质，那就会显得更直接明了. 最重要的数字特征量有期望值、方差和协方差. 它们的定义如下：

期望值 $\langle x\rangle$ (或记为 $E\{x\}$)：对于连续型随机变量 x，则有

$$\langle x\rangle\equiv\int xp(x)\mathrm{d}x \tag{0-7}$$

对于离散型随机变量，则定义为

$$\langle x\rangle\equiv\sum x_i p(x_i) \tag{0-8}$$

式中 $p(x)$ 为随机变量 x 的概率(密度)函数，期望值代表随机变量的总体平均值. 它与实验中的测量结果的平均值的概念有相似之处，但又不完全相同，在下一节中将对它们之间的联系和差异作详细的说明.

我们定义随机变量的方差 $\sigma^2(x)$ 为

$$\sigma^2(x)\equiv\int(x-\langle x\rangle)^2 p(x)\mathrm{d}x\equiv\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle \tag{0-9}$$

方差反映了随机变量的弥散程度，它的值越大则意味着随机变量 x 在期望值 $\langle x\rangle$ 附近分布得越广，也就是随机值的分布范围越大.

为了表示两个随机变量 x,y 之间的相关程度，我们用另一个重要的数字特征量，协方差 $\mathrm{cov}(x,y)$ 来表示. 它的定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(x,y)&\equiv\iint(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\equiv\langle(x-\langle x\rangle)(y-\langle y\rangle)\rangle\end{aligned} \tag{0-10}$$

如果一个随机变量 x 的概率分布与另一个随机变量 y 的取值没有任何联系，也就是说这两个随机变量是相互独立的，协方差 $\mathrm{cov}(x,y)$ 的值为零；当 $\mathrm{cov}(x,y)\neq 0$ 时，则称它们是相关的. x 与 y 的相关性愈大，则 $\mathrm{cov}(x,y)$ 的绝对值也愈大，但是，$\mathrm{cov}(x,y)$ 的大小不只与它们

的相关程度有关，还与方差$\sigma^2(x)$，$\sigma^2(y)$的大小有关. 因此，为了更确切地反映两个随机变量的相关程度，就需引入相关系数$\rho(x,y)$的概念：

$$\rho(x,y)\equiv\frac{\text{cov}(x,y)}{[\sigma(x)\sigma(y)]}$$

可以证明，

$$-1\leqslant\rho(x,y)\leqslant1 \tag{0-11}$$

当$\rho(x,y)=+1(-1)$时，则称为正（负）全相关.

二、概率分布

概率（密度）函数是随机变量的最重要的属性. 不同的随机变量可以有不同或相同的概率（密度）函数，本节将讨论几种常用的概率（密度）函数；同时，还讨论一些统计量（实测数据的函数）所服从的概率分布.

1. 两项式分布

首先我们讨论两点分布，它是这样一种随机现象，即结果只有两种可能性：成功与失败（是或否）. 例如，在n个原子核的体系中，某一个原子核是否衰变；当n个自旋为1/2的体系处于外磁场中时，某一个自旋的磁矩与外磁场相平行（或反平行）；检查一个产品是否合格，这些都属于这类随机现象，统称为贝努里试验. 在这一试验中，我们可用随机变量X来表示，它只能取0或1两个值，以0表示失败（否），1表示成功（是）. 设成功的概率为p，则失败的概率为$1-p$，即有

X	0	1
P	$1-p$	p

这样的分布称为两点分布.

在这一基础上，我们就可讨论两项式分布. 在n个原子核的体系中，单位时间内，对于每一个原子核来说，只有两种可能：发生衰变或不发生衰变，每个原子核是否发生衰变则与其他原子核是否衰变无关，即是相互独立的. 所以，这是一种贝努里试验式的随机现象，各次实验结果互不影响. 设在单位时间内，原子核发生衰变的概率为p，则不发生衰变的概率$q(=1-p)$，那末单位时间内n个原子核中发生衰变的原子核数X是一个随机变量，可以取值0，1，2，…，n，它的分布为

X	0	1	2	…	k	…	n
P	p_0	p_1	p_2	…	p_k	…	p_n

其中p_k是正好有k个原子核发生衰变的概率. 由于原子核的衰变是相互独立的，因此在n个原子核中正好有k个原子核发生衰变而$(n-k)$个原子核不发生衰变的概率为

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

但上述事件能以$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$种方式发生，所以有

$$p(k)=p_k=P(x=k)=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,\cdots,n) \qquad (0\text{-}12)$$

由于 $p(k)$恰好是两项式$(p+q)^n$ 的展开式中的第 $k+1$ 项，故称它为两项式分布. 我们常把(0-12)式称为随机变量 X 服从参数为 n,p 的两项式分布.

2. 泊松分布

当系统中的原子核数 n 很大很大而单位时间内的衰变概率 p 又很小，当它们的乘积 np

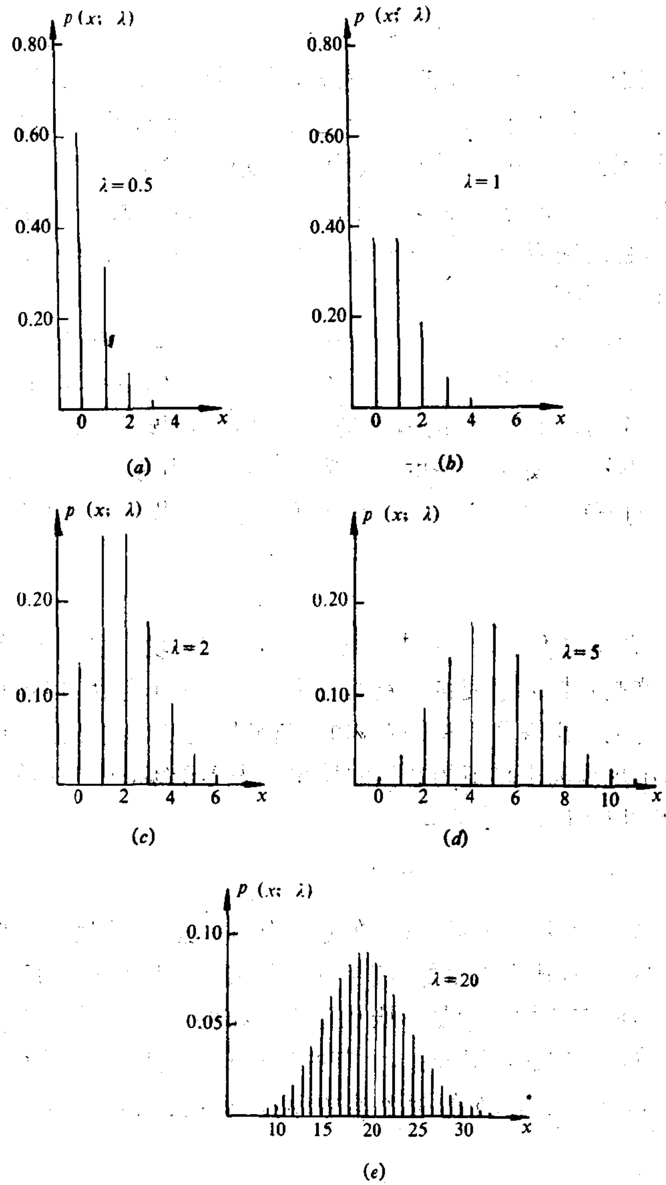


图 0-1 泊松分布

$=\lambda>0$，且是一个常值时，则有

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$
$$=\frac{\lambda^k}{k!}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

当 $n\to\infty$ 时，有

$$P(x=k)=\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^k(1-p)^{n-k}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \tag{0-13}$$

服从(0-13)式的分布称为泊松分布．可以证明，服从泊松分布的随机变量的期望值 $\langle x\rangle$ 和方差 $\sigma^2(x)$ 分别为

$$\langle x\rangle=\lambda, \quad \sigma^2(x)=\lambda$$

(0-13)式表达的泊松分布还可用图 0-1 表示，随着参数 λ 的增大，泊松分布逐步趋向对称．显然，在核衰变中 λ 的意义是明确的：在单位时间内，n 个原子核中发生衰变的概率 p 为 λ/n，n 是事件的总数，因此 λ 是单位时间内发生核衰变的事件数．

设我们对每秒核衰变数 x 进行很多次测量(例如 100 次以上)，得到平均值 $\bar{x}=2$，因此，我们可以近似地认为它的期望值 $\langle x\rangle=\lambda\sim2$、方差 $\sigma^2(x)=\lambda\sim2$．由(0-13)式，可算得 x 取值 0，1，2，3，4，5 时的概率分别为

$$p(0)=0.135, \quad p(1)=0.271, \quad p(2)=0.271,$$
$$p(3)=0.180, \quad p(4)=0.090, \quad p(5)=0.036$$

因此，出现 $x>\bar{x}$ 的概率与出现 $x<\bar{x}$ 的概率是不相同的，即概率函数是不对称的．图 0-1c 就是上述概率分布的图形表示．如果测得的平均值为 $\bar{x}=20$，则有 $\langle x\rangle=\lambda\sim20$，$\sigma^2(x)=\lambda\sim20$．从图 0-1$e$ 可见，这时的概率分布已近似地呈对称形，与下一节中讨论的正态分布十分相似．

3. 正态分布

在物理实验中有大量的不受人们控制的随机因素，如环境、气候、仪器噪声、操作者的心理状态的起伏、……这些随机因素使得测量值在平均值的上下起伏，但这种起伏是有一定的规律．例如，在平均值上下出现的概率是对称的，离平均值较远的数据的概率小于与平均值较近的数据的概率，出现远离平均值的数据的概率几乎等于零，……在数学上可以用正态分布函数 $p(x;\mu,\sigma^2)$ 确切地归纳上述规律：

$$p(x;\mu,\sigma^2)\equiv N(\mu,\sigma^2)\equiv\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \tag{0-14}$$

正态分布是一种非常重要的概率分布，在近代物理实验中，凡属连续型的随机变量几乎都属正态分布．在自然界中，凡由大量的、相互独立的因素共同微弱作用下所得到的随机变量都服从正态分布．即使有些物理量是不服从正态分布的随机变量．但它(或它的测量平均值)也往往以正态分布作为它的极限分布，上节的泊松分布就是一个例子．

(0-14)式中的 μ，σ^2 是正态分布的两个参数．可以证明：正态分布的期望值 $\langle x\rangle$ 和方差 $\sigma^2(x)$ 分别为

$$\langle x\rangle=\mu, \quad \sigma^2(x)=\sigma^2$$

μ，σ 值不同时，对应的函数形状也不同，如图 0-2 所示．

为了便于进行正态分布的概率运算，我们常作如下的变换：令