

能源与热工

NENGYUAN YU REGONG

上海科学技术文献出版社

2
15

72
115

能 源 与 热 工

上海科学技术文献出版社 合编
《能源与热工》编辑部

上海科学技术文献出版社

前 言

在迈向四个现代化的进程中,对于能源的开发和利用,对于能源的科学研究,是件十分重要的事情。在很多情况下,能源与热工有着不可分割的联系。为此,我们选编了这本译丛,其中主要介绍了国外有关能源与热工方面的新技术、新动向等。由于我们水平有限,对世界能源的发展趋势了解不够,谬误之处,请读者批评、指正。

编 者

一九八〇年十月

目 录

借助通用函数对非等温面上强迫对流放热的

分析..... B. T. Chao(赵佩之)(1)

椭圆型对流换热方程组的四种差分方案的比较研究

.....L. C. Chow C. L. Tien (田长霖)(8)

液体-液体直接接触式换热器的研究与进展.....W. S. Cha等(16)

地面用太阳电池——目前和将来.....B. T. Debnay等(22)

非跟踪中等聚光式太阳能集热器的辐射特性 R. B. Bannerot(31)

太阳能制氢..... T. Ohta 等(40)

煤-油乳液在100马力火管锅炉中的燃烧.....J. J. Demeter 等(45)

乳化液燃料滴的燃烧.....岩间 彬等(53)

液体泡状沸腾的近代理论.....D. A. Labuntsov(65)

干热岩——一种新的地热能源..... J. J. Mortensen(73)

地热电站的热效率.....R. James 等(78)

西门子公司选择工业电站的方法..... R. Thiele(85)

日本煤油混合燃料(COM)研究进展情况——

访日考察报告之一(摘要).....王 海(88)

借助通用函数对非等温面上 强迫对流放热的分析

B. T. Chao(赵佩之)

本文对大的或中等 Pr 数 (Prandtl number) 的流体掠过非等温面时, 两维或轴对称层流边界层估算传热的一种简便计算方法作了阐述。此时主流束的速度以下式表示:

$$u(x, z) = \sum_{n=1}^N \beta_n(x) z^n$$

式中 x 系主流束方向的座标, 而 z 系垂直于该表面。对于一个前方绝热的物体, 该物体的下游被加热到均匀的温度, 我们对其温度场的基本解答进行了探索。这个解答以通用函数的形式给出, 而与系数 $\beta_n(x)$ 和 Pr 数无关。

引言

掠过非等温面上边界层内强迫对流放热的计算, 是一项多年来连续研究的课题。当能量边界层的主要操纵方程式为线性时, 该分析可用找出一个阶跃函数解的方法来实现。后者涉及到热边界条件, 在此, 散热的驱动力沿着物体表面在一任意下游位置从零突然变到某一均匀值。这一课题的详细论述可参阅 Tribus 和 Klein 的文章。

Lighthill 曾研究了两维的、大 Pr 数流束的情况。他采用线性的速度分布,

$$u(x, z) = \{[\tau_w(x)]/\mu\}z \quad (1)$$

式中, τ_w 是局部壁面切力, 而 μ 为动力粘度。对于大 Pr 数的流体, 其结果是一近似值, 而当 $Pr \rightarrow \infty$ 时, 其解逐渐趋于精确。曾有不少文章报道了力图推广 Lighthill 结果的应用。例如, Spalding 结合流体流向上压力梯度的影响并考虑两项速度如下式所示:

$$u(x, z) = \frac{\tau_w(x)}{\mu} z + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} z^2 \quad (2)$$

可以认为 Lighthill 结果的修正应该和第二项(压力梯度)对第一项(壁面切力)的比值有

关。该比值为 $\left[(1/2\tau_w)\left(-\frac{dp}{dx}\right)z\right]$ 。Spalding

采用了近似积分法并以长度 $k|T_w - T_\infty|/q_w$ 取代变量 z , k 系该流体的导热系数, T_w 和 T_∞ 分别为壁面温度和自由流束温度, 而 q_w 系局部壁面热通量。该长度显然与 z 无关。Curle 扼要地介绍了改进 Lighthill 分析法的其他几种尝试。

B. T. Chao 刊登在 Int. J. Heat Mass Transfer 15, p. 907, 1972 的另一篇文章中阐述了采用(2)式的速度分布、从数学上来讲更为严格的一种解能量边界层方程式的方法。只要流体的比热 C_p 和 Pr 数是常数, 同时 $\mu\rho$ 乘积 (ρ 为密度) 等于它们在壁面上的数值 $\mu_w \rho_w$ 的话, 它不受这一特定假设的限制, 而且此法可用于可压缩流体的边界层。原刊文献[6](指 B. T. Chao 和 Greif 刊登在 J. Heat Transfer, Trans. ASME, 96c, p. 463, 1974 的另一篇文章。)提出了将文献[5]中介绍的分析法推广到回转对称体的边界层。

虽然用两项速度表示是一个明显的进步, 但它并不经常令人满意。所产生的误差视其与发生显著传热区域内的实际速度分布的偏离而定。处在 u -速度分布并不是离物

• 1 •

100205

体表面距离的单一增长函数的流束中, 特别当 Pr 数非足够大时, 这种误差可能变得更明显。回转物体引起的流动, 属于这一类。于是, 我们考虑了一种更为通用的流束方向速度分布的表达式:

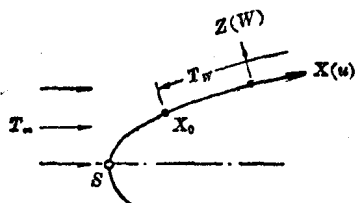
$$u(x, z) = \sum_{n=1}^N \beta_n(x) z^n \quad (3)$$

式中 N 系一任意有限整数。然而, 实际上由于需要计算的通用函数项数过大, N 必须予以限制。其系数 $\beta_n(x)$ 可以从分析或者从实验中推论得出。

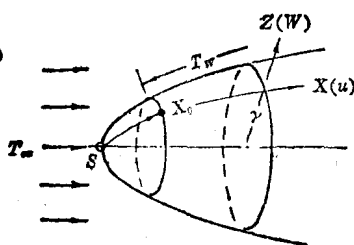
问题的叙述及主要

操纵方程式

图中描述了一个两维的和一回转对称的任意形状光滑物体, 物体置于不受扰动的



两维物体



回转对称体

物理模型及坐标系图

$\theta=0$; 当 $x > x_0, z=0$ 时 $\theta=1$; 当 x 为任意值, $z \rightarrow \infty$ 时 $\theta=0$ 。

连续方程式为

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^i u) + \frac{\partial}{\partial z}(r^i w) = 0 \quad (5)$$

式中, 对于两维体边界层, 指数 i 是零, 对于回转对称体的边界层, 指数 i 等于 1。顺便指出, 不论物体是回转的还是静止的, 如果问题持有轴对称的特性, 上述方程式都有效。

将 (3) 式代入 (5) 式, 并进行必要的微分运算, 然后对 z 进行积分, 结果为

$$w = -\frac{1}{r^i} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \frac{d}{dx} (r^i \beta_n) z^{n+1} \quad (6)$$

温度为 T_∞ 的等温入射流中。沿曲线坐标 (x, z) 的两个速度分量, 分别用 (u, w) 表示。对回转对称的物体来讲, r 系从其表面至对称轴的径向距离。从前方的滞止点 S 延伸到任意距离 x 的那部分表面上是不加热的。 $x > x_0$ 处, 壁面温度突然变化到 T_w 。略去散热损失, 同时我们的注意力仅限于将被传递的热量作为一种钝性量 (passive scale) 的情况。大家知道, 稳定状态的能量边界层方程式用下式给出:

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (4)$$

式中的 $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}$, 而 k 是导温系数。特定

的初始条件和边界条件为: 当 $x = x_0, z > 0$ 时

我们的目的是分别用 (3) 式和 (6) 式给出 u 和 w , 找出 (4) 式的解。这个解将以通用函数的形式表示。

解题方法和结果

按照原刊文献[5]中详细说明的方法, 我们考虑用下列的座标变换:

$$\begin{Bmatrix} x \\ z \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} X(x) \\ \eta = z/\lambda(x) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中 $X(x)$ 和 $\lambda(x)$ 都是待确定的函数, 而 $\lambda(x)$ 有一个长度量纲。此外, 我们引入一组由下列式子定义的无因次函数 ε_n

$$\varepsilon_0 = 1; \quad \varepsilon_1 = \frac{k_2}{\beta_1} \lambda;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\beta_3}{\beta_1} \lambda^2, \dots, \varepsilon_{N-1} = \frac{\beta_N}{\beta_1} \lambda^{N-1}. \quad (8)$$

然后, 以 (X, η) 为坐标, 能量方程式可转化为:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\lambda}{k r^i} \left[\sum_{n=1}^N \frac{\eta^{n+1}}{n+1} \frac{d}{dx} (r^i \beta_1 \lambda^2 \varepsilon_{n-1}) \right] \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\beta_1 \lambda^3}{k} \frac{dX}{dx} \left[\sum_{n=1}^N \varepsilon_{n-1} \eta^n \right] \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (9)$$

如果 $\beta_1 \neq 0$, 而 $\beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_N = 0$, 该问题简化为 Lighthill 式子, 但它扩大到包括回转对称。这时, 存在一个相似解, 且 (9) 式可简化为一个常微分方程式。令 (9) 式中 $\eta^2 \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)$ 的系数等于常数, 为方便起见, 此常数取 3, 我们得到:

$$\lambda = \frac{\left[9k \int_{x_0}^x (r^i)^{3/2} \beta_1^{1/2} dx \right]^{1/3}}{(r^i \beta_1)^{1/2}} \quad (10)$$

显而易见, 在 $x = x_0$ 时, $\lambda = 0$ 和 $\eta \rightarrow \infty$ 。这里也可看出, λ 随 $p^{-(1/3)}$ 而变。

为了固定 X , 我们令 $(\beta_1 \lambda^3/k) (dX/dx) = 9$, 因而, 可以立刻推论出, 原刊文献[5, 6]的结果是本分析的一种特殊情况。于是据此

$$X = \ln \int_{x_0}^x (r^i)^{3/2} \beta_1^{1/2} dx \quad (11)$$

可得对于如此选定的 λ 和 X , (9) 式可化为

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 6 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \left(\varepsilon_{n-1} + \frac{3d\varepsilon_{n-1}}{2dX} \right) \eta^{n+1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 9 \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n-1} \eta^n \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (12)$$

且边界条件为:

当 $\eta = 0$ 时, $\theta = 1$; 而 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $\theta = 0$ 。

文献[5]的分析提出了相应的级数解为:

$$\begin{aligned} \theta(X, \eta) = & \theta_0(\eta) \\ & + \varepsilon_1 \theta_{01} + \varepsilon_1^2 \theta_{11} + \varepsilon_1^3 \theta_{111} + \dots \\ & + \varepsilon_2 \theta_{02} + \varepsilon_2^2 \theta_{22} + \dots \\ & + \frac{d\varepsilon_1}{dX} \phi_{01} + \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_1}{dX} \phi_{11} + \dots \\ & + \frac{d\varepsilon_2}{dX} \phi_{02} + \varepsilon_2 \frac{d\varepsilon_2}{dX} \phi_{22} + \dots \\ & + \frac{d^2\varepsilon_1}{dX^2} \psi_{01} + \varepsilon_1 \frac{d^2\varepsilon_1}{dX^2} \psi_{11} + \dots \\ & + \frac{d^2\varepsilon_2}{dX^2} \psi_{02} + \varepsilon_2 \frac{d^2\varepsilon_2}{dX^2} \psi_{22} + \dots \\ & + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \theta_{12} + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \theta_{13} + \varepsilon_2 \varepsilon_3 \theta_{23} + \dots \\ & + \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_2}{dX} \phi_{12} + \varepsilon_2 \frac{d\varepsilon_1}{dX} \phi_{21} + \varepsilon_1 \frac{d\varepsilon_3}{dX} \phi_{13} \\ & + \dots \\ & + \varepsilon_3 \frac{d\varepsilon_1}{dX} \phi_{31} + \varepsilon_2 \frac{d\varepsilon_3}{dX} \phi_{23} + \varepsilon_3 \frac{d\varepsilon_2}{dX} \phi_{32} \\ & + \dots \\ & + \varepsilon_1 \frac{d^2\varepsilon_2}{dX^2} \psi_{12} + \varepsilon_2 \frac{d^2\varepsilon_1}{dX^2} \psi_{21} + \varepsilon_1 \frac{d^2\varepsilon_3}{dX^2} \psi_{13} \\ & + \dots \\ & + \varepsilon_3 \frac{d^2\varepsilon_1}{dX^2} \psi_{31} + \varepsilon_2 \frac{d^2\varepsilon_3}{dX^2} \psi_{23} + \varepsilon_3 \frac{d^2\varepsilon_2}{dX^2} \psi_{32} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

等等。将 (14) 式代入 (12) 式, 并将包含 ε_n , $\varepsilon_n^2, \dots, \left(\frac{d\varepsilon_n}{dX} \right)$, $\varepsilon_n \left(\frac{d\varepsilon_n}{dX} \right)$, $\dots$ 等项的系数等同起来, 我们得到一组线性常微分方程式。这些方程式不只是与系数 $\beta_n(x)$ 无关, 而且也与 Pr 数无关, 从这一意义上来说, 它们确实是通用的。为了便于表达, 我们对一个微分运算符作出定义:

$$D = \frac{d^2}{d\eta^2} + 3\eta^2 \frac{d}{d\eta} \quad (14)$$

并将这些函数排列分类如下:

A. 下脚标注零的函数代表 Lighthill 的解。

此函数满足

$$\text{对 } \theta_0(0) = 1 \text{ 和 } \theta_0(\infty) = 0 \text{ 时, } D\theta_0 = 0 \quad (15)$$

因而,

$$\theta_0 = 1 - \frac{\Gamma(\frac{1}{3}, \eta^3)}{\Gamma(\frac{1}{3})}$$

$$\Gamma \theta'_0(0) = -\frac{3}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -1.11985 \quad (16)$$

式中 $\Gamma(n, t)$ 系不完全 Γ 函数。(gamma function)。

B. 与 $\varepsilon_n, \varepsilon_n^2$ 等组合的函数。(n ≥ 1)

$$D\theta_{0n} = -\frac{6}{n+2}\eta^{n+2}\theta'_{0n},$$

$$D\theta_{nn} = -\frac{6}{n+2}\eta^{n+2}\theta'_{0n}, \text{等} \quad (17)$$

一撇 (/) 表示对 η 的微分。这些函数和所有其他跟随的函数有着类似的边界条件。

C. 与 $d\varepsilon_n/dX, \varepsilon_n(d\varepsilon_n/dX), d^2\varepsilon_n/dX^2$, 等组合的函数。(n ≥ 1)

$$D\phi_{0n} = 9\eta\left(\theta_{0n} - \frac{1}{n+2}\eta^{n+1}\theta'_0\right),$$

$$D\phi_{nn} = 9\eta(2\theta_{nn} + \eta^n\theta_{0n})$$

$$- \frac{6}{n+2}\eta^{n+2}\left(\frac{3}{2}\theta'_{0n} + \phi'_{0n}\right), \text{等} \quad (18)$$

$$D\psi_{0n} = 9\eta\phi_{0n}$$

$$D\psi_{nn} = 9\eta(\phi_{nn} + \eta^n\phi_{0n}) - \frac{6}{n+2}\eta^{n+2}\psi'_{0n},$$

等 (19)

D. 相互有关的与 $\varepsilon_n\varepsilon_n, \varepsilon_n(d\varepsilon_n/dX), \varepsilon_n(d^2\varepsilon_n/dX^2)$, 等组合的函数。(m ≥ 1, n ≥ 1, 且 m ≠ n)

$$D\theta_{mn} = -6\left(\frac{1}{n+2}\eta^{n+2}\theta'_{0m}\right. \\ \left. + \frac{1}{m+2}\eta^{m+2}\theta'_{0n}\right), \theta_{mn} = \theta_{nm}$$

$$D\phi_{mn} = 9\eta(\theta_{mn} + \eta^m\theta_{0n})$$

$$- 6\left(\frac{3}{2}\frac{1}{n+2}\eta^{n+2}\theta'_{0m}\right. \\ \left. + \frac{1}{m+2}\eta^{m+2}\phi'_{0n}\right)$$

$$D\psi_{mn} = 9\eta(\phi_{mn} + \eta^m\phi_{0n})$$

$$- \frac{6}{m+2}\eta^{m+2}\psi'_{0n}, \text{等等} \quad (20)$$

上述方程组中前几项函数已经计算出来，它们在壁面上的导数由表 1 给出。

壁面上局部热通量为

$$q_w = -k\left(\frac{\partial T}{\partial Z}\right)_{Z=0} = k(T_w$$

$$- T_\infty)\lambda^{-1}\left(-\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \quad (21a)$$

而

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \theta'_0(0) + \sum_{n=1}^N \left[\varepsilon_n\theta'_{0n}(0)\right. \\ \left. + \frac{d\varepsilon_n}{dX}\phi'_{0n}(0) + \frac{d^2\varepsilon_n}{dX^2}\psi'_{0n}(0) + \dots\right]$$

表 1 壁面上通用函数的导数

$\theta'_0(0) = -0.11198465 \text{ E } 1$		
$\theta'_{01}(0) = -0.18868223 \text{ E } 0,$	$\theta'_{02}(0) = -0.12540562 \text{ E } 0,$	$\theta'_{03}(0) = -0.99541912 \text{ E } -1$
$\theta'_{11}(0) = 0.72713738 \text{ E } -1,$	$\theta'_{22}(0) = 0.61429386 \text{ E } -1,$	$\theta'_{33}(0) = 0.68573318 \text{ E } -1$
$\theta'_{111}(0) = -0.50787964 \text{ E } -1$		
$\theta'_{12}(0) = 0.13193932 \text{ E } 0,$	$\theta'_{13}(0) = 0.13417403 \text{ E } 0,$	$\theta'_{23}(0) = 0.12819242 \text{ E } 0$
$\phi'_{01}(0) = -0.57513759 \text{ E } -1,$	$\phi'_{02}(0) = -0.17684542 \text{ E } -1,$	$\phi'_{03}(0) = 0.14712784 \text{ E } -8$
$\phi'_{11}(0) = 0.35995122 \text{ E } -1,$	$\phi'_{22}(0) = 0.66992345 \text{ E } -2,$	$\phi'_{33}(0) = -0.13272253 \text{ E } -1$
$\phi'_{12}(0) = 0.13788005 \text{ E } -1,$	$\phi'_{21}(0) = 0.23264282 \text{ E } -1,$	$\phi'_{13}(0) = -0.31132986 \text{ E } -2$
$\phi'_{1n}(0) = 0.14069533 \text{ E } -1,$	$\phi'_{23}(0) = -0.75217243 \text{ E } -2,$	$\phi'_{32}(0) = 0.33807580 \text{ E } -3$
$\psi'_{01}(0) = 0.98609950 \text{ E } -1,$	$\psi'_{02}(0) = 0.65151671 \text{ E } -1,$	$\psi'_{03}(0) = 0.49770954 \text{ E } -1$
$\psi'_{11}(0) = -0.91600504 \text{ E } -1,$	$\psi'_{22}(0) = -0.81572869 \text{ E } -1,$	$\psi'_{33}(0) = -0.90693756 \text{ E } -1$

等等

$$\begin{aligned}
& \left[\varepsilon_n' \theta'_{nn}(0) + \varepsilon_n \frac{d\varepsilon_n}{dX} \phi'_{nn}(0) \right. \\
& \left. + \varepsilon_n \frac{d^2\varepsilon_n}{dX^2} \psi'_{nn}(0) + \dots \right] \\
& + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[\varepsilon_m \varepsilon_n \theta'_{mn}(0) \right. \\
& \left. + \varepsilon_m \frac{d\varepsilon_n}{dX} \phi'_{mn}(0) + \varepsilon_m \frac{d^2\varepsilon_n}{dX^2} \psi'_{mn}(0) + \dots \right] \quad (21b)
\end{aligned}$$

在(21b)式中被加数的每一项是与 $\text{Pr}^{-(1/3)}$ 的整数次方(幂次)成正比。在数值计算中,该级数须按 $\text{Pr}^{-(1/3)}$ 的升幂排列。不遵守这条规律的话,会导致错误的结果。至于中等 Pr 数,该级数成为半发散,并且可以用求和的欧拉法。详细情况,读者可参阅 Meksyn 的著作。

至于线性速度分布,当 $n \geq 1$ 时,全部 ε_n 的项都等于零。这是 Lighthill 研究过的一种情况。在(10)式内,令 $\beta_1 = \frac{\tau_w}{\mu}$ 和 $i=0$, 我们得到:

$$\lambda = (9\mu k)^{1/3} \tau_w^{-(1/2)} \left[\int_{x_0}^2 \tau_w^{1/2} dx \right]^{1/3} \quad (22)$$

而式(22)化为

$$\begin{aligned}
q_w(x; x_0) &= \frac{3^{1/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} k(T_w - T_\infty) \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu^2} \right)^{1/3} \\
& \tau_w^{1/2} \left[\int_{x_0}^2 \tau_w^{1/2}(x') dx' \right]^{-(1/3)} \quad (23)
\end{aligned}$$

上式正是 Lighthill 的结果。

B. T. Chao(赵佩之)和 Greif 在研究掠过回转圆盘强迫对流放热时采用两项速度表示法,这是从 Hannah 的级数中删节得来的。在 $\text{Pr}=100$ 和 10 时,他们的结果与其他已发表的数据相比是一致的,而当 $\text{Pr}=1$ 时,有很大差别。对有关速度分布的 Hannah 级数多保留一项,对于试图改善努塞尔特数(Nusselt number)的估算可能是有益的。

从而,我们证明

$$\beta_1 = a(c^2 + \omega^2)^{3/4} r/\nu^{1/2},$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}(c^2 + \omega^2) r/\nu,$$

$$\beta_3 = \frac{b}{3} \omega^2 (c^2 + \omega^2)^{1/4} r/\nu^{3/2} \quad (24)^*$$

式中 $c=2U_\infty/R$, U_∞ 系均匀自由流束速度,它垂直地冲击在以半径为 R , 角速度为 ω 的回转的圆盘上。式(24)中的径向座标 r 对应于图中的 x 。常数 a 和 b 取决于比值 ω/c $[=(\pi R\omega)/(2U_\infty)]$, 并且已由 Hannah 列出表。对于等温圆盘,在式(10)中,令 $i=1$, 和 $x_0(=r_0)=0$, 我们得到

$$\lambda = \left(\frac{3}{a\text{Pr}} \right)^{1/3} \frac{\nu^{1/2}}{(c^2 + \omega^2)^{1/4}} \quad (25)$$

λ 与 r 无关。同时,

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2a} \left(\frac{3}{a\text{Pr}} \right)^{1/3}$$

$$\text{和} \quad \varepsilon_2 = \frac{b}{3a} \frac{\omega^2}{c^2 + \omega^2} \left(\frac{3}{a\text{Pr}} \right)^{2/3} \quad (26)$$

并且所有 ε 的导数等于零。因此,努塞尔特数(由田长霖和 Tsuji 所给定的形式)

$$\begin{aligned}
\text{Nu} &= \frac{q_w \nu^{1/2}}{k(T_w - T_\infty)(c^2 + \omega^2)^{1/4}} \\
&= \left(\frac{a\text{Pr}}{3} \right)^{1/3} \{ 1.11985 + \varepsilon_1 \theta'_{01}(0) \\
& \quad + [\varepsilon_2 \theta'_{02}(0) + \varepsilon_1^2 \theta'_{11}(0) + \\
& \quad \text{包含 } \varepsilon_3, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \varepsilon_1^3 \text{ 等项} \} \quad (27)
\end{aligned}$$

表 2 列出了由(27)式计算的数值结果。对于单纯强迫对流的情况, $\varepsilon_2=0$, 因此,本文的结果与文献[6]中的结果完全一致。另一方面,可以看出来,对 $\omega/c=1, 2$, 和 ∞ 时,有显著改善。

表 2 对回转圆盘强迫流动时的努塞尔特数($\text{Pr}=1.0$)

ω/c	a	b	ε_1	ε_2	Nu		
					二项表达式 (由文献[6])	三项表达式	数值结果 (由文献[9])
0	1.312	1.075	-0.5021	0	0.7643	0.7643	0.762
1	0.936	0.933	-0.7876	0.3611	0.624	0.659	0.658
2	0.686	0.800	-1.192	0.8316	0.484	0.548	0.557
∞	0.510	0.616	-1.770	1.312	0.309	0.400	0.396

* 文献[6]内的与(3)式中的 β_2 相差 $(1/2)$ 倍

$\beta_1 = 0$ 的情况

对分离处的流束, 壁面上切力等于零, 因此, $\beta_1 = 0$ 。这种情况采用与前一节类似的方式很容易处理。指明几个关键步骤和一些结果已经足够了。

这里转换的座标可用 $(\bar{X}, \bar{\eta})$ 表示。其他所有的有关量也在它上面划一条线作为标志。引入以下的一组无因次量时

$$\bar{\varepsilon}_0 = 1, \quad \bar{\varepsilon}_1 = \frac{\beta_3 \bar{\lambda}}{\beta_2}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\beta_4 \bar{\lambda}}{\beta_2} \dots, \quad \bar{\varepsilon}_{N-2} = \frac{\beta_N \bar{\lambda}}{\beta_2} \bar{\lambda}^{N-2} \quad (28)$$

同时按照类似于前面给出的方法, 我们发现,

$$\bar{\lambda} = \frac{[16k \int_{x_0}^x (r^i)^{4/3} \beta_2^{1/3} dx]^{1/4}}{(r^i \beta_2)^{1/3}} \quad (29)$$

$\bar{\lambda}$ 与 $\text{Pr}^{-(1/4)}$ 成正比, 且

$$\bar{X} = \frac{9}{8} \ln \int_{x_0}^x (r^i)^{4/3} \beta_2^{1/3} dx \quad (30)$$

对于

当 $\bar{\eta} = 0$ 时 $\theta = 1$ 和当 $\bar{\eta} \rightarrow \infty$ 时 $\theta = 0$ (31)
转换的能量方程式为

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{\eta}^2} + 12 \sum_{n=2}^N \frac{1}{n+1} \left(\bar{\varepsilon}_{n-2} + \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_{n-2}}{d\bar{X}} \right) \bar{\eta}^{n+1} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \bar{\eta}} = 18 \sum_{n=2}^N \bar{\varepsilon}_{n-2} \bar{\eta}^n \frac{\partial \theta}{\partial \bar{X}} \quad (32)$$

由通用函数导出的级数解, 和(14)式中规定的形式相同。通过定义一个微分运算符:

$$\bar{D} = \frac{d^2}{d\bar{\eta}^2} + 4\bar{\eta}^3 \frac{d}{d\bar{\eta}}, \quad (33)$$

下列各式很容易建立。

A. 下脚注标为零的函数

$$\text{对 } \bar{\theta}_0(0) = 1 \text{ 和 } \bar{\theta}_0(\infty) = 0 \text{ 时 } \bar{D}\bar{\theta}_0 = 0 \quad (34)$$

因此,

$$\bar{\theta}_0 = 1 - \frac{\Gamma(\frac{1}{4}, \bar{\eta}^4)}{\Gamma(\frac{1}{4})}$$

$$\text{和 } \bar{\theta}_0'(0) = -\frac{4}{\Gamma(\frac{1}{4})} = -1.10326 \quad (35)$$

B. 与 $\bar{\varepsilon}_n, \bar{\varepsilon}_2^2$, 等组合的函数。($n \geq 1$)

$$\bar{D}\bar{\theta}_{0n} = -\frac{12}{n+3} \bar{\eta}^{n+3} \bar{\theta}'_{0n}, \quad \bar{D}\bar{\theta}_{nn} = -\frac{12}{n+3} \bar{\eta}^{n+3} \bar{\theta}'_{0n}, \text{ 等等。} \quad (36)$$

C. 与 $\frac{d\bar{\varepsilon}_n}{d\bar{X}}, \bar{\varepsilon}_n \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_n}{d\bar{X}} \right), \frac{d^2 \bar{\varepsilon}_n}{d\bar{X}^2}$ 等组合的函数。($n \geq 1$)

$$\bar{D}\bar{\phi}_{0n} = 18\bar{\eta}^2 \left(\bar{\theta}_{0n} - \frac{1}{n+3} \bar{\eta}^{n+1} \bar{\theta}'_{0n} \right) \\ \bar{D}\bar{\phi}_{nn} = 18\bar{\eta}^2 (2\bar{\theta}_{nn} + \bar{\eta}^n \bar{\theta}_{0n}) \\ - \frac{12}{n+3} \bar{\eta}^{n+3} \left(\frac{3}{2} \bar{\theta}'_{0n} + \bar{\phi}'_{0n} \right) \dots \dots (37)$$

$$\bar{D}\bar{\psi}_{0n} = 18\bar{\eta}^2 \bar{\phi}_{0n} \\ \bar{D}\bar{\psi}_{nn} = 18\bar{\eta}^2 (\bar{\phi}_{nn} + \bar{\eta}^n \bar{\phi}_{0n}) \\ - \frac{12}{n+3} \bar{\eta}^{n+3} \bar{\psi}'_{0n}, \text{ 等等} \quad (38)$$

D. 相互有关的与 $\bar{\varepsilon}_m \bar{\varepsilon}_n, \bar{\varepsilon}_m \left(\frac{d\bar{\varepsilon}_n}{d\bar{X}} \right), \bar{\varepsilon}_m \left(\frac{d^2 \bar{\varepsilon}_n}{d\bar{X}^2} \right)$ 等组合的函数。($m \geq 1, n \geq 1$, 并且 $m \neq n$)

$$\bar{D}\bar{\theta}_{mn} = -12 \left(\frac{1}{n+3} \bar{\eta}^{n+3} \bar{\theta}'_{0m} \right. \\ \left. + \frac{1}{m+3} \bar{\eta}^{m+3} \bar{\theta}'_{0n} \right), \quad \bar{\theta}_{mn} = \bar{\theta}_{nm} \\ \bar{D}\bar{\phi}_{mn} = 18\bar{\eta}^2 (\bar{\theta}_{mn} + \bar{\eta}^m \bar{\theta}_{0n}) \\ - 12 \left(\frac{3}{2} \frac{1}{n+3} \bar{\eta}^{n+3} \bar{\theta}'_{0m} + \frac{1}{m+3} \bar{\eta}^{m+3} \bar{\phi}'_{0n} \right) (39) \\ \bar{D}\bar{\psi}_{mn} = 18\bar{\eta}^2 (\bar{\phi}_{mn} + \bar{\eta}^m \bar{\phi}_{0n}) \\ - \frac{12}{m+3} \bar{\eta}^{m+3} \bar{\psi}'_{0n}, \text{ 等等。}$$

局部壁面热通量可以由一个完全类似于(21)式的式子来计算, 细节不再重复。这里, 我们仅仅指出, 如果 $\beta_2 = [(1/2\mu)(dp/dx)]$ 以及其余的所有的 β 项等于零的话, 那末是针对二维流动的情况,

$$q_w(x; x_c) = \frac{2^{3/4}}{\Gamma(\frac{1}{4})} k(T_w - T_\infty) \text{Pr}^{1/4} \left(\frac{\rho}{\mu^2} \right)^{1/4} \\ \left(\frac{dp}{dx} \right)^{1/3} \left[\int_{x_0}^x \left(\frac{dp}{dx'} \right)^{1/3} dx' \right]^{-1/4} \quad (40)$$

该式除了常数项外, 与原刊文献[10](J. Fluid Mechanics, 3, p. 357, 1958)中Liepmann的

结果是一致的, 对此, 当 $2^{3/4}/\Gamma(\frac{1}{4})=0.4639$ 时 Liepmann 给出为 0.459。

如前所述, 以上分析可应用于壁面切力等于零的各种情况。在靠近分离处的流束中,

$$\lambda = \frac{\left[(2+n)^2 k \int_{x_0}^x (r^i)^{(2+n)/(1+n)} \beta_n^{1/(1+n)} dx \right]^{1/(2+n)}}{(r^i \beta_n)^{1/(1+n)}} \quad (41)$$

λ 是与 $Pr^{-1/(2+n)}$ 成正比的。下脚标零的函数满足:

$$\begin{aligned} & \text{对 } \theta_0(0)=1 \text{ 和 } \theta_0(\infty)=0 \text{ 时,} \\ & \theta_0'' + (2+n)\eta^{1+n}\theta_0' = 0 \quad (42) \\ & \text{因而,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_0 &= 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2+n}, \eta^{2+n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2+n}\right)} \\ \text{和 } \theta_0'(0) &= -\frac{2+n}{\Gamma\left(\frac{1}{2+n}\right)} \quad (43) \end{aligned}$$

组合的通用函数的推导很容易进行, 因而不给出。然而本分析中 n 值都是整数, 值得指出的是, 如果速度分布遵循简单的乘方规

律, 即 $u=\beta(x)z^n$, n 是一正数, 但不一定是整数, 那末, 它表明(41), (42), 和(43)各式仍然有效。在这种情况下, 局部壁面热通量为:

最后, 我们指出, 如果 $\beta_1=\beta_2=\dots=\beta_{n-1}=0$ 而 $\beta_n \neq 0$, 那末

律, 即 $u=\beta(x)z^n$, n 是一正数, 但不一定是整数, 那末, 它表明(41), (42), 和(43)各式仍然有效。在这种情况下, 局部壁面热通量为:

$$\begin{aligned} q_w(x; x_0) &= \frac{(2+n)^{n/(2+n)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2+n}\right)} k (T_w - T_\infty) \\ &\quad \cdot Pr^{1/(2+n)} (r^i \beta)^{1/(1+n)} \\ &\quad \cdot \left[\nu \int_{x_0}^x (r^i)^{(2+n)/(1+n)} \beta^{1/(1+n)} dx \right]^{-1/(2+n)} \quad (44) \end{aligned}$$

当 $i=0$ 时, 此式简化到由 Acrivos 在原刊文献[11]中 (Phys. Fluids, 3, p. 657, 1960) 所给出的表达式。

参考文献(略)

〔商善最译 沈维道校〕

椭圆型对流换热方程组的四种差分方案的比较研究

L. C. Chow C. L. Tien (田长霖)

本文是对流体流动和传热的椭圆型方程组的四种差分方案的比较研究。所考虑的差分方案是：中央差分方案、前差分方案、指数差分方案和爱伦-绍士威尔 (Allen-Southwell) 方案。求解了最近研究过的两个课题，给出了四种差分方案的直接比较。在这两个课题中，爱伦-绍士威尔方案比其他方案优越。

引言

为了充分了解多维流体运动和传热的过程，需要求解纳维-斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程和能量方程。但只有少数问题能够获得理论解，而大多数问题，数值解法是获得较精确的解的有效方法。数值解法已日益受到重视，因为只要有了足够有效的计算方案，数值解法就能以相当简单的方法应用于各种问题。至今已发表过各种各样的有限差分方案，而各种方案的效果和限制并非都清楚。本文介绍了四种有限差分方案的比较研究。前两种是通常使用的中央差分方案 (CDS) 和前差分方案 (UDS)。第三种差分方案是由雷士毕 (Raithby) 和陶伦斯 (Torrance) 提出的^[1]，并称为指数差分方案 (EDS)。此方案是以斯保廷 (Spalding) 最先提出的公式^[2]为依据的。第四种差分方案是由爱伦和绍士威尔首先采用的，并统称为爱伦-绍士威尔方案 (ASS)。

下一节，以普遍形式给出了流体流动和传热问题的方程组，然而用上述四种有限差分方案近似替代。由于 EDS 和 ASS 对有些读者可能是陌生的，本文将作较详细的讨论。

为评定这四种差分方案，求解了已研究

过的两个课题。第一个是在一旋转实心轴中的径向导热问题^[1,4]。这已有理论解，因而提供了比较四种差分方案的简便标准。第二个课题是关于层流的自然对流，这是由一个放置在两维矩形地板中心的加热点所引起的对流问题。这一问题很有实用价值，并已被广泛研究过^[5-9]。

最后，根据两个课题的研究结果，对四种差分方案做了一些评论。当然，这些评论只有等到研究了广泛的其他课题后才能有普遍性。

符 号 表

a	$(Re)^{-1}$, $(Gr)^{-1/2}$, 或 $(RePr)^{-1}$
b	无因次粘度或热导率
E	网格节点 $(i+1, j)$
e	网格节点 $(i+\frac{1}{2}, j)$
$f_{4,}$	有限差分方程组中 ϕ 的系数
F_e	P 和 E 之间的热流量
F_n	P 和 N 之间的热流量
F_s	S 和 P 之间的热流量
F_w	W 和 P 之间的热流量
G	W 和 E 之间的热流量
G_e	热流量, $G_e = [A(\Delta x/2) + B]$
G_w	热流量, $G_w = [-A(\Delta x/2) + B]$
G_r	格拉晓夫准则数
i, j	网格节点标号
k	热导率
$M \times N$	网格尺寸

N	网格节点 $(i, j+1)$
n	网格节点 $(i, j+\frac{1}{2})$
P	网格节点 (i, j)
Pr	普朗特准则数
R	区域
Re	雷诺准则数
S	热源项或网格节点 $(i, j-1)$
s	网格节点 $(i, j-\frac{1}{2})$
T	温度
T_c	壁面温度
T_h	$x=0, y=0$ 处温度
u	x 向无因次速度
v	y 向无因次速度
W	网格节点 $(i-1, j)$
w	网格节点 $(i-\frac{1}{2}, j)$
x, y	方向
θ	无因次温度
ϕ	无因次速度、涡流度或温度
ψ	无因次流函数
Ω	无因次涡流度
Ω_c	壁面处涡流度

上角标' 除以 ab 后的同量

微分方程组及其有限差分近似式

工程上感兴趣的很多问题都能以二维稳定的纳维-斯托克斯方程、能量方程和特定的边界条件来描述。采用适当的参考长度、速度和温度,把所有变量都无因次化后,可写出下面无因次控制方程

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) = a \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(b \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] + S \quad (1)$$

式中:因变量 ϕ 代表无因次速度、涡流度或温度,系数 a 代表 $(Re)^{-1}$, $(Gr)^{-(1/3)}$ 或 $(RePr)^{-1}$,系数 b 代表无因次粘度或热导率,它可随空间而变, S 项代表热源。

在本文中,仅讨论二维稳定状态的情况。

但是,应指出的是本文的一些结论将能适用于三维的情况。并认为,经适当的修正后,本文中的结论可推广到随时间而变的问题。

公式(1)中各项用有限差分近似替代。CDS对式(1)的对流项采用一种三点中央差分^[10,11]。但是,考虑到稳定性、网格数目和计算时间,对高 Re 数和高 Gr 数的情况不允许使用CDS^[1,4]。UDS是由海伦斯(Hellums)和邱契尔(Churchill)^[12]首先应用于对流换热方程,在此方案中,对流项采用单向差分,且差分总是与流动方向相反的。这点在高斯曼(Gosman)等人的文章中^[13]已详细讨论了。此方案不同于CDS,它在数值上是稳定的,对网格尺寸没有限制。但是,简单的误差分析表明,由于该方案引进了一个虚假扩散项,对高 Re 数和高 Gr 数,为了使虚假扩散项比真实扩散项小一个数量级,要求非常细密的网格。

为了分析EDS和ASS,对有关区域用平行于 x 方向和 y 方向的若干网格线进行分格。网格系统示于图1。网格节点 $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i, j+1)$, $(i-\frac{1}{2}, j)$, $(i+\frac{1}{2}, j)$, $(i, j-\frac{1}{2})$ 和 $(i, j+\frac{1}{2})$ 分别用 W , P , E , S , N , w , e , s , 和 n 标记。

雷士毕和陶伦斯^[1]假定:每一方向上的热流量在网格内的传递是守恒的,并且,在 W 和 P 之间描述 x 向的热流量的方程为

$$a \frac{\partial}{\partial x} \left(b \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (u\phi) = 0 \quad (2)$$

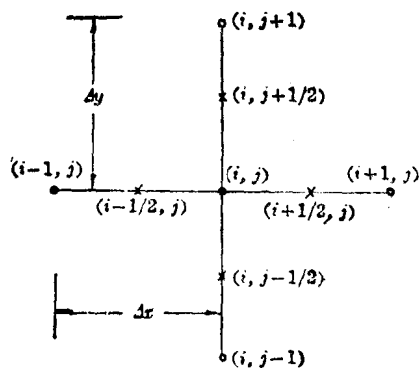


图1 网格节点图

积分一次,得

$$ab \frac{\partial \phi}{\partial x} - u\phi = F_w \quad (3)$$

式中: F_w 为 W 与 P 之间的热流量。把式(3)改写成

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - u'\phi = F'_w \quad (4)$$

其中: $u' = \frac{u}{ab}$, $F'_w = \frac{F_w}{ab}$ 。如假定 u' 和 F'_w 在 W 与 P 之间为定值, 并且 u' 采用 W 与 P 之间的中点 w 处的 u'_w 值。再次积分,得

$$\phi = -\frac{F'_w}{u'_w} + C_1 e^{u'_w x} \quad (5)$$

式中 C_1 为积分常数。计算 W 与 P 处的 ϕ 值, 代入上式消去 C_1 得

$$\frac{\phi - \phi_w}{\phi_p - \phi_w} = \frac{e^{u'_w(x-x_w)} - 1}{e^{u'_w(x_p-x_w)} - 1} \quad (6)$$

在 W 与 P 之间的 x 向热流量为

$$F_u = ab_u \left(\frac{u'_w}{1 - e^{-u'_w \Delta x}} \right) (\phi_p e^{-u'_w \Delta x} - \phi_w) \quad (7)$$

为方便起见, 定义下列函数

$$f_+(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad f_-(x) = \frac{-x}{e^{-x} - 1} \quad (8)$$

式(7)可改写成

$$F_u = \frac{ab_u [f_+(u'_w \Delta x) \phi_p - f_-(u'_w \Delta x) \phi_w]}{\Delta x} \quad (9)$$

同样, 假定 F_u/ab 和 u' 在 P 与 E 之间为定值, 并且 u' 等于 P 与 E 之间中点 e 处的 u'_e 值, 于是

$$F_e = \frac{ab_e [f_+(u'_e \Delta x) \phi_e - f_-(u'_e \Delta x) \phi_p]}{\Delta x} \quad (10)$$

按照上述相同方法, 可算出 y 方向的热流量:

$$F_s = \frac{ab_s [f_+(v'_s \Delta y) \phi_p - f_-(v'_s \Delta y) \phi_s]}{\Delta y} \quad (11)$$

$$F_n = \frac{ab_n [f_-(v'_n \Delta y) \phi_n - f_-(v'_n \Delta y) \phi_p]}{\Delta y} \quad (12)$$

若采用正方形网格, $\Delta x = \Delta y$, 方程(1)的有限差分形式为

$$F_e - F_w + F_n - F_s + S \Delta x = 0 \quad (13)$$

式(13)同雷士毕和陶伦斯^[1]所发表的指数差

分公式是相同的。EDS 在数值上是稳定的, 对网格的尺寸是没有约束的。

爱伦和绍士威尔^[3]提出了用于物性参数不变的流体的有限差分方程; 即在方程式(1)中 b 为定值。但在本文中, b 将允许随位置而变。如同 EDS 一样, x 方向的热流量 G 可写成

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - u'\phi = G \quad (14)$$

式中: $u' = u/ab$ 。但是, 不再假定 G 在网格之间为定值, 而假定 G 可以在 W 与 E 之间随 x 线性变化。尤其是当方程式(1)中有热源项时, 这一假定更为符合实际。即使方程中没有热源项时, 该假定考虑到在 x 向和 y 向的热流之间可以有一些相互影响。另外, 又假定 u' 为定值, 并等于网格节点 P 上的值。方程式(14)成为

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - u_0'\phi = Ax + B \quad (15)$$

式中: $u_0' = \frac{u}{ab}$ 是按 P 点处计算的, A 和 B 为常数。将式(15)再次积分, 得

$$\phi = -\frac{A}{u_0'} \left(x + \frac{1}{u_0'} \right) - \frac{B}{u_0'} + ce^{u_0' x} \quad (16)$$

式中 c 是积分常数。为了确定方程(15)中的常数 A 和 B , 必须按 W 、 P 和 E 点根据式(16)进行计算。

$$\text{热流量 } G_w = \left[-A \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + B \right] \text{ 可表示}$$

成

$$G_w = A \Delta x \left[\frac{1}{2} + \frac{f_+(u_0' \Delta x) - 1}{u_0' \Delta x} \right] + \frac{f_-(u_0' \Delta x) \phi_p - f_-(u_0' \Delta x) \phi_w}{\Delta x} \quad (17)$$

其中

$$A \Delta x^2 = f_+(u_0' \Delta x) \phi_e - f_-(u_0' \Delta x) \phi_p - [f_+(u_0' \Delta x) \phi_p - f_-(u_0' \Delta x) \phi_w] \quad (18)$$

从式(9)和(10)可以看出, 除了 u' 要算的位置外, $A \Delta x$ 大致上等于 F_e' 和 F_w' 之间的差值。

同样, 热流量 $G_e = \left[A \left(\frac{\Delta x}{2} \right) + B \right]$ 可表示成

$$G_e = A \Delta x \left[\frac{1}{2} + \frac{f_+(u'_0 \Delta x) - 1}{u'_0 \Delta x} \right] + \frac{f_+(u'_0 \Delta x) \phi_E - f_-(u'_0 \Delta x) \phi_P}{\Delta x} \quad (19)$$

按相同的方法, 可以写出

$$G_s = C \Delta y \left[\frac{1}{2} + \frac{f_+(v'_0 \Delta y) - 1}{v'_0 \Delta y} \right] + \frac{f_+(v'_0 \Delta y) \phi_P - f_-(v'_0 \Delta y) \phi_s}{\Delta y} \quad (20)$$

$$G_n = C \Delta y \left[\frac{1}{2} + \frac{f_+(v'_0 \Delta y) - 1}{v'_0 \Delta y} \right] + \frac{f_+(v'_0 \Delta y) \phi_N - f_-(v'_0 \Delta y) \phi_P}{\Delta y} \quad (21)$$

其中

$$C \Delta y^2 = f_+(v'_0 \Delta y) \phi_N - f_-(v'_0 \Delta y) \phi_P - [f_+(v'_0 \Delta y) \phi_P - f_-(v'_0 \Delta y) \phi_s] \quad (22)$$

方程(1)的有限差分形式为

$$ab_e G_e - ab_w G_w + ab_n G_n - ab_s G_s + S \Delta x = 0 \quad (23)$$

观察(23)式中的系数, 可以看出 ASS 数值上是稳定的, 对网格尺寸是没有限制的。

对于 b 为常数的情况, 式(23)可大大简化成

$$\begin{aligned} & f_+(u'_0 \Delta x) \phi_E - f_-(u'_0 \Delta x) \phi_P \\ & - [f_+(u'_0 \Delta x) \phi_P - f_-(u'_0 \Delta x) \phi_w] \\ & + [f_+(v'_0 \Delta y) \phi_N - f_-(v'_0 \Delta y) \phi_P] \\ & - [f_+(v'_0 \Delta y) \phi_P - f_-(v'_0 \Delta y) \phi_s] \\ & + S \Delta x^2 / ab = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)表示爱伦和绍士威尔所提出的方案。

应指出的是式(23)中包含 A 和 C 的项一般是很小的。因而, EDS 的式(13)可以表示成与 ASS 的式(23)相同的形式, 只是在 EDS 中, u' 值是按网格节点之间的中点处计算, 而在 ASS 中, u' 值是按网格节点 P 处计算。尽管 EDS 与 ASS 之间差别是微小的, 但却是以完全不同的基本假定为依据的。再强调一下, 在 EDS 中, 假定 u' 值在一个网格内为

常数, 并等于网格节点之间的中点处的值。又假定 F' 值在一个网格内为常数。而在 ASS 中, 假定 u' 值在 W 与 E 节点之间为常数, 因而它比 EDS 的区域大一倍, 并且还考虑 G 可按线性变化。但遗憾的是, EDS 与 ASS 之间的差别要进行严格的数值分析, 即使可能也是很困难的。

最后还应指出, 当 u' 值和 v' 值很小时, EDS 和 ASS 都可简化为 CDS。

第一个验证性课题

公式

所选的第一个课题(见图 2)为一旋转轴内的径向导热^[1,4]。该问题已有理论解, 是一维问题, 其解可以用离原点距离为 r 的函数形式表示。但是, 对在 x - y 平面上的 R 区域内数值求解时, 它却成为二维问题。对此问题的细节, 读者可参看[1]和[4]。当所有变量都用热导率 $[k \propto (x^2 + y^2)^{-1}]$ 进行无因次化后, 如假定在离原点的径向距离 1 与 3 处符合规定的温度 $T=1$ 与 $T=0$ 时, 问题的解为

$$T = \frac{9 - (x^2 + y^2)}{8} \quad (25)$$

对照方程(1), 这一课题相当于 $\phi = T$, $a = (\text{RePr})^{-1}$, $b = (x^2 + y^2)^{-1}$ 和 $S = 0$ 的情况。速度 u 和 v 分别等于 $2y$ 和 $-2x$ 。于是, 在上一节的有限差分方程式中, $u' = 2y(x^2 + y^2) \text{RePr}$ 和 $v' = -2x(x^2 + y^2) \text{RePr}$ 。这里应指出的是,

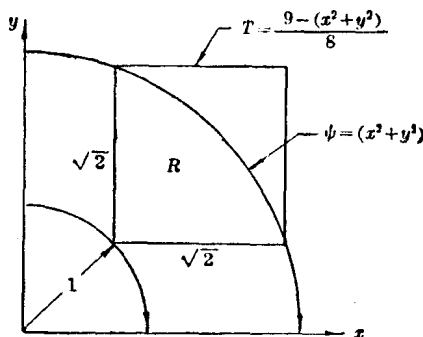


图 2 课题 1 的求解区域 R

尽管 u 仅是 y 的函数而不是 x 的函数, 而 u' 却是 x 的函数。对 v 和 v' 也可得同样的结论。

各种差分方法的比较

把区域 R 划分为 11×11 等间隔的网格, 间隔为区域 R 宽度的十分之一。所有网格节点上的速度和边界网格节点上的温度均先由解析式得到。开始计算时, 所有内部网格节点上的温度初始值都设为零, 然后应用由 CDS、UDS、EDS 和 ASS 得到的有限差分方程, 用高斯-赛德尔 (Gauss-Seidel) 迭代程序求解。当每个内部节点上满足下列条件

$$\frac{T^n - T^{n-1}}{T^n} \leq 10^{-6} \quad (26)$$

时, 认为该数值解已收敛。式中 n 表示第 n 次迭代。

为了判断数值解的精确度, 求得在区域 R 中心网格节点 ($\sqrt{2}, \sqrt{2}$) 处的百分误差和内部网格节点处的最大百分误差。在图 3 中, 网格节点 ($\sqrt{2}, \sqrt{2}$) 处的误差是对 4RePr 而言。对 CDS, 在整个可求解的范围内, 该温度精确到 0.02% 之内。对 $4\text{RePr} > 3.6$ 的范围, 无解。对 UDS 和 EDS, 所有 RePr 值的范围都有解, 但是这两种方案所产生的误差比用 ASS 所产生的误差大一个数量级。用 CDS、

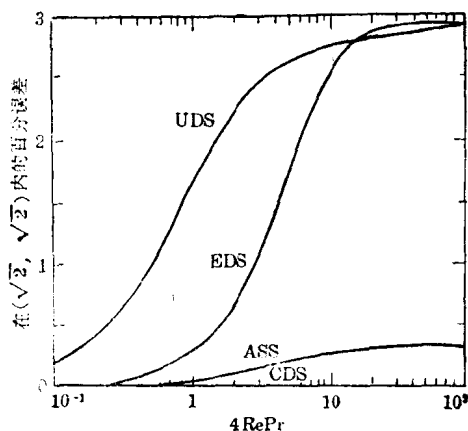


图 3 在区域 R 中点处的百分误差

UDS 和 EDS 所得的结果与雷士毕和陶伦斯得到的结果是相同的^[1]。正如前节已讨论过的, 由于 EDS 和 ASS 之间在公式的形式上差别是微小的, 因此可用来比较内部网格节点上的最大百分误差。正如图 4 所示, ASS 的误差比 EDS 的误差小一个数量级。

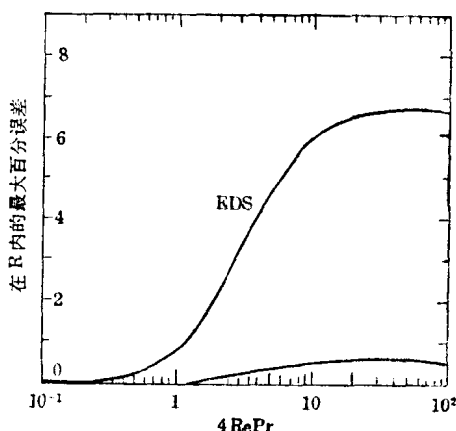


图 4 在所有内部网格节点处的最大百分误差

这里应着重说明, 实际上, 在高 RePr 值时, 热导率 b 的影响可以忽略。既然 EDS 和 ASS 之间的差别主要是由于热导率的影响, 所以这时 EDS 和 ASS 应该给出相同的结果。但是可以看出, 即使在高 RePr 值时, EDS 和 ASS 却导出完全不同的有限差分形式。因而, 由此得到不同的数值结果是不奇怪的。这点可用课题本身的性质来解释, 因为倘若坐标系选择适当的话, 这一课题实际上是一个纯导热方程。

至此, 至少对第一个验证性课题能得出结论: 只要能求得解的话, CDS 是最精确的方案。在整个 RePr 值范围内, UDS 和 EDS 都比 ASS 差。

第二个验证性课题

公式

图 5 表示第二个验证性课题。这是一个矩形截面的长槽道。底面中央有按高斯型温度分布的热条, 其它各面保持在均匀的较

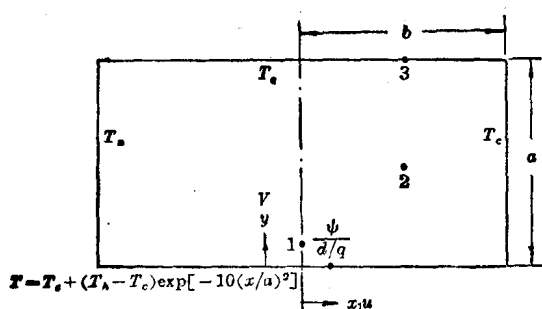


图 5 第二课题的坐标系和热边界条件

低的温度。通过把该问题限制在层流、稳定、两维的恒定物性参数的流动，且密度只允许在浮升力项中变化，使该问题简化。对温度的边界条件为：

在底面处
$$T - T_c = (T_h - T_c) e^{-10\left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (27)$$

在其它壁面处 $T = T_c$

各变量按下列各式无因次化

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{a}, & y &= \frac{Y}{a} \\ u &= \frac{Ua}{\alpha Gr^{1/2}}, & v &= \frac{Va}{\alpha Gr^{1/2}} \\ \theta &= \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \end{aligned}$$

上式以 $Gr^{1/2}$ 标定 u 和 v 是由陶伦斯和洛盖特 (Rockett) [6] 建议的。通过引入一无因次的流函数 ψ 和涡流度 Ω ，方程组可写成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u Gr^{1/2}}{Pr} \Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v Gr^{1/2}}{Pr} \Omega - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = Gr^{1/2} Pr \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(u Gr^{1/2} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(v Gr^{1/2} \theta - \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (30)$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (31)$$

无因次边界条件为：

$$\left. \begin{aligned} & \text{在 } x=0 \text{ 处, } \psi=0, \Omega=0, \frac{\partial \theta}{\partial x}=0 \\ & \text{在 } x=\frac{b}{a} \text{ 处, } \psi=0, \frac{\partial \psi}{\partial x}=0, \theta=0 \\ & \text{在 } y=0 \text{ 处, } \psi=0, \frac{\partial \psi}{\partial y}=0, \delta=e^{-10x^2} \\ & \text{在 } y=1 \text{ 处, } \psi=0, \frac{\partial \psi}{\partial y}=0, \theta=0 \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

方程(30)与(32)结合得到壁面涡流度

$$\Omega_0 = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} \right) \quad (33)$$

式中 n 为垂直于壁面的方向。

各种差分方程的比较

UDS 最早被应用于这一课题[8,9]，可以看出，除非网格足够细密，否则，即使对中等数值的 Gr 数，由于这一方案的虚假扩散项，会造成数值解的各种错误。尽管能获得这个问题的大体了解，要得到精确的数值结果是困难的。这一方案就不再进一步探讨了。

利用 CDS、EDS 和 ASS，把方程(28)和(29)表示为两组有限差分方程。方程(30)和(31)总是以中央差分形式来表示。所得的联列方程组通过逐点迭代法求解，并对涡流方程用 3 次平舒参数 (Under-relaxation parameter)。

迭代从温度的方程开始，利用从前次迭代得到的流函数数值进行。对 CDS，温度梯度 $\partial \theta / \partial x$ 是用中央差分计算的。对 EDS 和 ASS， $\partial \theta / \partial x$ 是用方程(6)和(16)给出的温度分布计算的。接着，对涡流值进行修正，其壁面值由下式给出

$$\Omega_0 = -\frac{8\psi_1 - 7\psi_0 - \psi_2}{24x^2} \quad (34)$$

此处注脚 0, 1 和 2 分别为壁面和壁面外的前二点。最后，流函数值用已修正的涡流值进行修正。

反复上述过程，直至满足下列规定：