数学物理方程

廖玉麟

华中理工大学出版社

（鄂）新登字第 10 号

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程　廖玉麟-武汉：

华中理工大学出版社，1995 年 3 月

ISBN 7-5609-1023-8

Ⅰ　数

Ⅱ　廖

Ⅲ　数理方程　柯西问题　分离变量法

Ⅳ　O

数学物理方程

廖玉麟

责任编辑　易秋明

*

华中理工大学出版社出版发行

（武昌喻家山　邮编：430074）

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：850×1168 1/32　印张：11.375　字数：285000

1995 年 3 月第 1 版　1995 年 3 月第 1 次印刷

印数：1-3000

ISBN　7-5609-1023-8/O・127

定价：9.00 元

目　录

第一章　方程的导出和分类 …………………………（1）
§1.1　方程的导出和定解条件 ………………………………（1）
1. 波动方程………………………………………………………（1）
2. 热传导方程……………………………………………………（5）
3. 拉普拉斯方程和波阿松(Poisson)方程 ………………（7）
4. 定解条件………………………………………………………（8）
5. 定解问题的适定性 …………………………………………（12）
§1.2　二阶线性偏微分方程的分类……………………………（13）
1. 两个自变量函数的二阶线性方程 ………………………（14）
2. 多个自变量函数的二阶线性方程 ………………………（20）
习题一 …………………………………………………………（22）
第二章　柯西问题(初值问题) ………………………（25）
§2.1　一维齐次波动方程的初值问题 …………………（26）
1. 达朗贝尔公式 …………………………………………………（26）
2. 解的物理意义 …………………………………………………（28）
3. 依赖区域、影响区域和决定区域……………………………（30）
§2.2　多维齐次波动方程的初值问题……………………………（31）
1. 球对称三维波动方程的解 …………………………………（31）
2. 三维波动方程的泊松公式 …………………………………（32）
3. 二维波动方程柯西问题的泊松公式 ……………………（36）
§2.3　非齐次波动方程的初值问题……………………………（38）
1. 一维非齐次波动方程的初值问题 ………………………（38）
2. 三维非齐次波动方程的初值问题 ………………………（40）
习题二 …………………………………………………………（42）

第三章　分离变量法 ………………………………… (44)
§3.1　有界弦的自由振动 ………………………………… (44)
1. 物理模型 ………………………………… (44)
2. 分离变量法 ………………………………… (46)
§3.2　用分离变量法解其它定解问题 ………………………… (53)
§3.3　非齐次泛定方程的混合问题 ………………………… (61)
1. 齐次化原理 ………………………………… (62)
2. 固有函数法(试探法) ………………………………… (64)
§3.4　非齐次边界条件的处理 ………………………………… (68)
习题三 ………………………………… (77)
第四章　固有值问题 ………………………………… (81)
§4.1　斯图姆-刘维尔问题 ………………………………… (81)
1. 斯图姆-刘维尔问题的来源 ………………………… (81)
2. 斯图姆-刘维尔问题的基本定理 ………………………… (86)
§4.2　贝塞尔函数 ………………………………… (90)
1. 贝塞尔方程及其通解 ………………………………… (90)
2. 贝塞尔函数的零点,递推公式 ………………………… (94)
3. 函数的富里埃-贝塞尔级数 ………………………… (97)
§4.3　贝塞尔函数应用举例 ………………………………… (102)
§4.4　勒让德函数 ………………………………… (106)
1. 勒让德多项式、递推公式 ………………………………… (106)
2. 勒让德多项式的正交性与富里埃-勒让德级数 …… (112)
§4.5　勒让德函数的应用举例 ………………………………… (119)
习题四 ………………………………… (121)
第五章　边值问题 ………………………………… (125)
§5.1　边值问题的提法 ………………………………… (125)
1. 第一边值问题 ………………………………… (126)
2. 第二边值问题 ………………………………… (126)

3. 第三边值问题…………………………………………(126)
4. 第四边值问题…………………………………………(127)
5. 狄利克莱外问题………………………………………(128)
6. 牛曼外问题……………………………………………(128)
§5.2 边值问题的解法 ……………………………………**(129)**
1. 圆域的狄利克莱问题、泊松积分公式 ………………(129)
2. 圆环域的狄利克莱问题………………………………(133)
3. 圆域的牛曼问题………………………………………(134)
4. 矩形域的狄利克莱问题………………………………(135)
5. 泊松方程的狄利克莱问题……………………………(137)
6. 矩形域的牛曼问题、格仁贝尔方法 …………………(139)
7. 立方体的狄利克莱问题………………………………(142)
8. 圆柱体的狄利克莱问题………………………………(144)
9. 球体的狄利克莱问题…………………………………(148)
§5.3 视察法解边值问题 …………………………………**(151)**
习题五……………………………………………………(155)
第六章 格林函数法 …………………………………(158)
§6.1 格林公式及其应用 ………………………………**(158)**
1. 格林公式………………………………………………(158)
2. 格林公式的应用………………………………………(160)
§6.2 δ函数、基本解 ……………………………………**(163)**
1. 多维δ函数及其性质…………………………………(163)
2. 基本解…………………………………………………(164)
§6.3 格林函数及其性质 ………………………………**(167)**
§6.4 静电源像法 ………………………………………**(172)**
1. 圆域的格林函数及狄利克莱问题的解………………(173)
2. 上半平面的格林函数及狄利克莱问题的解…………(175)
3. 四分之一平面的格林函数及狄利克莱问题的解……(176)
4. 半圆域的格林函数及狄利克莱问题的解……………(177)

5. 半空间区域的格林函数及狄利克莱问题的解………（179）
6. 球域的格林函数及狄利克莱问题的解………………（181）
§6.5 热传导方程与波动方程的格林函数法 …………（183）
1. 热传导方程的格林函数法…………………………（183）
2. 弦振动方程的格林函数法…………………………（185）
习题六……………………………………………………（188）
第七章 积分变换法 ……………………………………（190）
§7.1 富里埃积分和富里埃变换 ……………………（190）
1. 富里埃积分………………………………………（190）
2. 富里埃变换及其逆变换……………………………（192）
§7.2 富里埃变换的基本性质 ………………………（199）
1. 富里埃变换的运算性质……………………………（199）
2. 卷积和它的性质…………………………………（201）
§7.3 用富里埃变换法解微分方程 …………………（206）
1. 用富里埃变换法解常微分方程……………………（206）
2. 解偏微分方程……………………………………（206）
§7.4 拉普拉斯变换 …………………………………（214）
1. 拉普拉斯变换的概念………………………………（215）
2. 拉普拉斯变换的存在定理…………………………（215）
3. 拉普拉斯变换计算举例……………………………（216）
§7.5 拉普拉斯变换的性质及反演积分 ……………（218）
1. 拉普拉斯变换的性质………………………………（218）
2. 常用函数的拉普拉斯变换…………………………（223）
3. 拉普拉斯逆变换的求法……………………………（225）
§7.6 用拉普拉斯变换法求解微分方程 ……………（231）
1. 解线性常微分方程…………………………………（231）
2. 解线性偏微分方程…………………………………（235）
习题七……………………………………………………（245）

第八章　定解问题的近似解法 ………………………… (249)
§**8.1　差分法** …………………………………………… (**249**)
1. 基本概念……………………………………………… (249)
2. 拉普拉斯方程边值问题的差分解法………………… (254)
3. 波动方程第一类边界条件混合问题的差分解法…… (261)
4. 热传导方程的差分格式……………………………… (264)
§**8.2　变分方法** ………………………………………… (**266**)
1. 变分问题……………………………………………… (267)
2. 基本引理、极值的必要条件 ………………………… (269)
3. 变分原理(狄利克莱定理)…………………………… (273)
4. 里兹法………………………………………………… (274)
5. 伽辽金法……………………………………………… (280)
§**8.3　有限元法** ………………………………………… (**284**)
1. 区域网格的剖分……………………………………… (284)
2. 列出计算格式………………………………………… (285)
习题八………………………………………………… (289)
第九章　定解问题的适定性 ………………………… (291)
§**9.1　波动方程** ………………………………………… (**292**)
1. 混合问题……………………………………………… (292)
2. 初值问题……………………………………………… (298)
§**9.2　热传导方程** ……………………………………… (**300**)
1. 混合问题……………………………………………… (300)
2. 初值问题……………………………………………… (304)
§**9.3　拉普拉斯方程** …………………………………… (**309**)
习题九………………………………………………… (319)
附录Ⅰ　Γ函数的基本知识……………………… (322)
附录Ⅱ　富氏变换与拉氏变换简表………………… (327)
附录Ⅲ　分离变量法表解…………………………… (332)

附录Ⅳ　格林函数法表解……………………………………………（336）
附录Ⅴ　一些预备知识……………………………………………（338）
习题参考答案……………………………………………（343）
参考书目……………………………………………（353）

第一章　方程的导出和分类

在微积分出现后不久，就开始了偏微分方程的研究。由于许多物理的基本规律的数学形式都是偏微分方程，所以，这些来自物理的偏微分方程就是常说的数学物理方程。三类基本的二阶偏微分方程是

波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

我们将开始研究这些方程。研究的一般程序是，(1)根据物理问题的有关定律建立相应的数学模型；(2)对数学模型进行求解；(3)对所得解检验鉴定其正确性。

§1.1　方程的导出和定解条件

1. 波动方程

1）弦振动方程

在数学物理方程中最重要的问题之一是拉紧的弦的振动问题。这不仅是由于它简单，更重要的是它经常出现许多数学物理的分支中，所以在偏微分方程理论中把它当作为一个典型的例子，考

察一长为 l 两端固定的拉紧的弦。

为弦振动现象建立数学模型，首先要了解它服从的基本物理规律，并作出必要的符合实际的简化。弦振动是一个力学系统，所以它的运动应符合牛顿运动定律，故可对它作如下的简化假设：

设弦未受扰动时的平衡位置是在 x 轴上，弦上各点的位移发生在 (x,u) 平面内垂直于 x 轴方向上，以 $u(x,t)$ 表示弦上点 x 处在时刻 t 的位置。如图 1-1，假设：

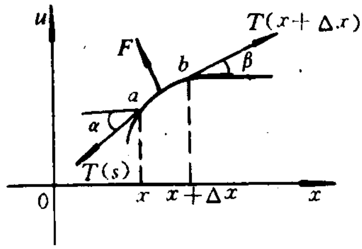

图 1-1

(1) 弦是柔软且有弹性的(即它不抗弯曲)。因此，在任何时刻弦的张力总沿着弦的切线方向。

(2) 弦的每一段在振动过程中都不伸长，根据虎克定律，张力是常数。

(3) 弦的重量与张力相比很小。

(4) 弦只有微小的横向振动。这并不是说 $u(x,t)$ 很小，而是设 $u_x(x,t)$ 很小。从而 $u_x^2(x,t)$ 可以略去不计。

建立数学模型时，这种简化假设是必须的，做什么样的假设视要解决的问题的性质和所需的精确度而定，这是一个实验与实践的问题，而不是理论问题。

建立数学模型的下一步是分析弦上一小段 $\widehat{ab}$，称为“弦微元”上的作用力，它们有

作用在 a 点处的张力 $T(x)$

作用在 b 点处的张力 $T(x+\Delta x)$

作用在 $\widehat{ab}$ 上的外力 $F(\xi,t)\Delta x$，其中 $F(\xi,t)$ 是在 $[x,x+\Delta x]$ 内某点 ξ 处的力密度。于是沿水平方向的分力为

$$T(x+\Delta x)\cos\beta - T(x)\cos\alpha = T\left[\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}} - \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}\right]$$

$$=T\left[\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(b)}}-\frac{1}{\sqrt{1+u_x^2(a)}}\right]=0$$

沿 u 方向的分力为

$$T(x+\Delta x)\sin\beta-T(x)\sin\alpha+F(\xi,t)\Delta x=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}$$

由于微小振动

$$\sin\alpha\approx\mathrm{tg}\alpha=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x},\ \sin\beta\approx\mathrm{tg}\beta=\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}$$

故有

$$\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}=T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]+F(\xi,t)\Delta x$$

应用微分中值定理即得

$$\begin{aligned}&\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},t)}{\partial t^2}\\&=T\frac{\partial^2 u(x+\tau\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta x+F(\xi,t)\Delta x\qquad(0<\tau<1)\end{aligned}$$

将上式两端除以 $\rho\Delta x$，令 $\Delta x\to 0$，有 $\xi\to x,\bar{x}\to x$，取极限得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\qquad(1.1.1)$$

其中 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$，$f=\dfrac{F}{\rho}$。式(1.1.1)刻划了均匀弦的微小振动的一般规律，通常称它为**弦振动方程**。

若 $F(x,t)=0$，方程(1.1.1)化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\qquad(1.1.2)$$

称为**弦的自由振动方程**。

由于弦在绷紧以后，相邻各“微元”之间有张力，在张力作用下，一个微元的振动必定带动它的邻近微元，而邻近微元又带动它自己的邻近微元……，这样，一个微元的振动必然传播到整根弦。这种振动传播现象叫做波。因此，式(1.1.1)，式(1.1.2)又称为**一维波动方程**。

2）膜振动方程

考察一块柔软均匀的张紧的膜。我们取膜静止时所在的平面为 xoy 平面，用 $u(x,y,t)$ 表示膜在点 (x,y) 处在时刻 t 的运动位移。假设膜是不能抵抗弯曲和切变的，当受外力作用时，由于膜的张力作用，膜产生往返上下的微小振动。在上述假设下，我们可以导得张力的线密度 $\boldsymbol{T}$ 的数量 T 可近似地视作与时间及位移无关的常量。

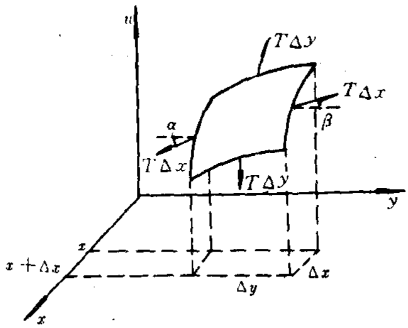

图 1-2

现在导出膜振动方程。假设膜在振动时受到垂直方向的外力密度为 $F(x,y,t)$。在膜上任取一块微小元素，由于振动是微小的，这块元素的面积近似地等于 $\Delta x\Delta y$，见图 1-2。若 T 是单位长度上的张力，则作用在这块微元各边上的力是 $T\Delta x$ 和 $T\Delta y$。在垂直方向的分力是

$$T\Delta x\sin\beta - T\Delta x\sin\alpha + T\Delta y\sin\delta - T\Delta y\sin\gamma$$

因为振动是微小的，故

$$\sin\beta\approx \mathrm{tg}\beta,\ \sin\alpha\approx \mathrm{tg}\alpha,\ \sin\delta\approx \mathrm{tg}\delta,\ \sin\gamma\approx \mathrm{tg}\gamma$$

于是作用在这块微元上垂直方向的合力为

$$F(x,y,t)\Delta x\Delta y + T\Delta x(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha) + T\Delta y(\mathrm{tg}\delta - \mathrm{tg}\gamma)$$

根据牛顿第二运动定律得

$$\rho\Delta A\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta x(\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha)$$

$$+T\Delta y(\mathrm{tg}\delta-\mathrm{tg}\gamma)+F(x,y,t)\Delta x\Delta y \tag{1.1.3}$$

其中 ρ 为单位面积膜的质量，$\Delta A\approx\Delta x\Delta y$，由微积分学知

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\partial u(x_1,y)}{\partial y},\ \mathrm{tg}\beta=\frac{\partial u(x_2,y+\Delta y)}{\partial y}$$

$$\mathrm{tg}\delta=\frac{\partial u(x,y_1)}{\partial x},\ \mathrm{tg}\gamma=\frac{\partial u(x+\Delta x,y_2)}{\partial x}$$

其中 $x_1,x_2\in(x,x+\Delta x)$，$y_1,y_2\in(y,y+\Delta y)$，把这些值代入式(1.1.3)得

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\Delta x\left[\frac{\partial u(x_2,y+\Delta y)}{\partial y}-\frac{\partial u(x_1,y)}{\partial y}\right]$$

$$+T\Delta y\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,y_2)}{\partial x}-\frac{\partial u(x_1,y_1)}{\partial x}\right]+F(x,y,t)\Delta x\Delta y$$

将上式除以 $\rho\Delta x\Delta y$，并令 Δx、Δy 都趋于零取极限得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{1.1.4}$$

其中 $a^2=\frac{T}{\rho}$，$f(x,y,t)=\frac{F(x,y,t)}{\rho}$，这个方程称为**二维波动方程**。

如果考察电磁波或声波在空间的传播，我们还可得到**三维的波动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{1.1.5}$$

波动方程在经典物理和量子物理的每个部分都可能出现，它在各种条件下的解构成本书的重要内容。

2. 热传导方程

现在研究均匀物体中热的传导。由于温度不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方转移，这种现象叫作热传导，故有

物理模型：设有一温度分布不均匀的热物体，体内有密度为 $F(M,t)$ 的热源。试建立热传导方程。

物理规律：热量守恒律。物体内部的热量的增加等于通过物体

界面流入的热量与物体内部的热源所产生的热量的总和

$$\boxed{\begin{matrix} t_2 \\ \text{热量} \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} t_1 \\ \text{热量} \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ \text{通过界面流入的热量} \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ \text{热源生成的热量} \end{matrix}}$$

简化假设:物体为均匀各向同性的。因此认为物体的密度 ρ、比热 c、导热系数 k 均是常数。服从傅里叶实验定理。

下面用“微元法”来建立数学模型。设 $u(M,t)$为点 $M(x,y,z)$ 在时刻 t 的温度。任取一体微元 $\mathrm{d}V$,其表面积记为 S。我们讨论这个微元内的热平衡。

先考查流入微元的热量。流入 $\mathrm{d}V$ 的热是来自热传导及热源。由传热学中的傅里叶定律:热流强度与温度梯度成正比。即

$$v = -k \cdot \operatorname{grad} u \qquad (k > 0)$$

负号是由于热量的流向与温度梯度的正向相反。在单位时间内流入 $\mathrm{d}V$ 的总热量为

$$\theta_1 = \iint_S k \operatorname{grad} u \cdot \mathrm{d}S = \iiint_V k \operatorname{div} \operatorname{grad} u \mathrm{d}V$$

n 为曲面 S 的外法线。来自热源的热量为

$$\theta_2 = \iiint_V F(M,t)\mathrm{d}V$$

其次考察微元 $\mathrm{d}V$ 温度升高所需的热量,由热力学知,单位时间内 $\mathrm{d}V$ 温度升高所需的热量为

$$\theta_3 = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V$$

由热量守恒律得

$$\iiint_V \operatorname{div} k \operatorname{grad} u \mathrm{d}V + \iiint_V F(M,t)\mathrm{d}V = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}V$$

由 V 的任意性,故有

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F(M,t)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(M,t) \qquad (1.1.6)$$

其中 $a^2=\frac{k}{c\rho}$，$f(M,t)=\frac{F(M,t)}{c\rho}$。

(1.1.6)式称为**非齐次热传导方程**。

如果所考察的物体内部无热源，方程(1.1.6)化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (1.1.7)$$

称为**齐次热传导方程**。

热传导方程还可描述扩散物质的浓度、粒子的扩散等物理现象。

3. 拉普拉斯方程和波阿松(Poisson)方程

现在我们来导出偏微分方程理论中最著名的一个方程——拉普拉斯方程。

考察电荷密度为 $\rho(x,y,z)$，介电常数 $\varepsilon=1$的静电场 E，设点 $M(x,y,z)$的电势为 $\varphi(x,y,z)$，则由定义电场强度

$$E=-\operatorname{grad}\varphi$$

任取一体微元，其表面积记为 S，所围区域记为 Ω。根据静电学基本定理：穿过闭合曲面 S 向外的电通量等于闭合曲面 S 所围空间 Ω 中的电量的4π 倍。即

$$\oiint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}S=4\pi\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

应用曲面积分的高斯定理得

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}E\mathrm{d}v=\iiint_\Omega 4\pi\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

或

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\mathrm{d}v=\iiint_\Omega -4\pi\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

由于 Ω 是任取的区域，故

$$\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi = -4\pi\rho(x,y,z)$$

即

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=-4\pi\rho(x,y,z) \qquad (1.1.8)$$

称为**波阿松方程**或**有源的电势方程**。

特别是在自由电场(即 $\rho=0$的情形)中,则方程(1.1.8)化为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad (1.1.9)$$

它称为**拉普拉斯方程**或**无源电势方程**。

拉普拉斯方程不仅出现在静电场问题中,它还可描述许多物理现象,如定常温度场,引力势,流体力学中的势和弹性力学中的调和势等。概括地说,它所描写的自然现象是恒稳的、定常的,亦即与时间无关的。

为书写方便,引入拉普拉斯算子 Δ(或 Δ^2):

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

于是,拉普拉斯方程可表为

$$\Delta u=0 \qquad (\Delta^2 u=0)$$

波动方程和热传导方程可表为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u$$

这三个方程各是一类方程的典型,各反映一类自然规律性。

4. 定解条件

数学物理方程是同一类现象的共同规律,例如,不论是弹性体、流体或电磁现象,它们的一些典型波动过程,都是由波动方程描述的。又如,物体内部温度分布规律、扩散物质的浓度、电缆的传输是由热传导方程描述的。可是,在同一类物理现象中,各个具体问题又各有其特殊性,物理规律并不反映这种特殊性。例如对同一根弦,用薄刀背敲击下发出的声音比较刺耳,而用手指的弹拨下发

出的声音就比较和谐。尽管弦的振动是按同样规律进行的。但由于"初始"时刻的振动情况不一样，后来的振动情况也就不一样。又如剧院内壁仅采用普通砖墙，由于较强的反射性使声波在剧院内壁多次反射，形成"余音不绝"，使人无法听清，若内壁镶有适当的吸声材料，传到墙壁的声波大部分被吸收，而消除了"余声不绝"，听起来就比较清楚了。虽然声波是按同样的规律在剧院空间传播，内壁材料的吸声性能对剧院声学质量却有极大的关系。因此，为了刻划一个具体的对象，还需要一定的补充条件。这些补充条件称为**定解条件**。在数学物理方程理论中，我们总是联系着一定的定解条件来研究一个方程的。这就叫做**定解问题**。

常见的定解条件有两大类。一类是对于描述随时间演变的方程，如式(1.1.2)、式(1.1.7)(这类方程统称为**发展方程**)，需要给出在初始时刻的状态，例如对于方程(1.1.7)，就需要指定初始时刻(设为 $t=0$)的温度：

$$u(x,y,z,t)|_{t=0}=\varphi(x,y,z) \qquad (1.1.10)$$

其中 $\varphi(x,y,z)$ 是已知函数，对于方程(1.1.2)，由于它描述一个力学运动规律，需要指定初始位移和初始速度。

$$u|_{t=0}=\varphi \qquad u_t|_{t=0}=\psi \qquad (\varphi,\psi \text{ 已知}) \qquad (1.1.11)$$

式(1.1.10)和式(1.1.11)称为初始条件。

值得注意的是，初始条件应当给出整个系统的初始状态，不能只是系统中个别点的初始状态。例如一根长为 l 两端固定的弦，开始时将中点朝横向拉开距离 h(图1-3)。这个初始位移不能写成

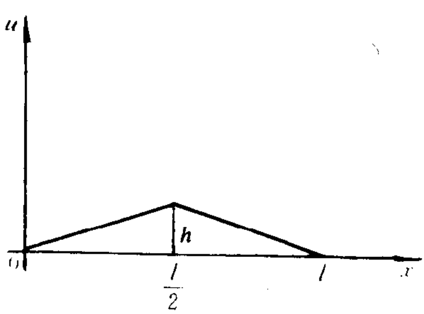

图1-3

$$u|_{t=0}=h$$