数学分析习作课讲义

薛宗慈　曾昭著　邝荣雨　陈平尚　编

上册

北京师范大学出版社

数学分析习作课讲义

上 册

薛宗慈 曾昭著
邝荣雨 陈平尚 编

数学分析习作课讲义

上　册

薛宗慈　曾昭著
邝荣雨　陈平尚　编

*

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
天津黎明印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：10.25　字数：215千
1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷
印数：1——28,000
统一书号：13243·75　定价：2.30元

内容简介

本书是在北京师范大学数学系数学分析习作课实践的基础上编写的．内容包括函数、数列的极限、函数的极限、连续函数、极限论、单变量微分学、单变量积分学、无穷级数和广义积分等．

本书可作为高等师范院校和师范专科学校数学系学生的参考书或教学参考书．

序　言

数学分析习作课是分析课的重要组成部分，它在加深学生对于数学新概念的理解，培养逻辑推理能力，以及计算技巧的训练方面都起着一定作用，多年来担任这门课的教师都在上课以前绞尽脑汁去选择每次课的内容，尤其对于一些没有教学经验的年青教师备起课来更是无所适从，我们有鉴于此才着手编写此书，编写过程中参考了洪良辰、潘淑琴、曾昭著和陈平尚几位同志的习作课讲稿，他们的实践经验对于此书的编写起着很大的启示和帮助作用。

目前各院校所用数学分析的课本不同，习作课的时间安排各异，本书为了适应多方面的情况，不得不按照数学分析的主要内容分章编写，这样，教师可按照自己教学情况安排每章上习作课的次数，书中所用符号、定义和定理基本上采用上海复旦大学所编数学分析教材（第二版）的条款。因此，有些定义在书中就不再重复叙述。

本书是在赵慈庚教授和董延闿教授的赞助和指导下编写的，两位老师无论在内容的安排以及文字的修饰上都付出了辛勤的劳动，我们表示衷心的感谢，由于我们的业务水平和写作能力的限制，完稿后仍然不能达到预期的要求，何况习作课的教材究竟应该怎样编写还在探索之中，希望读者提出宝贵意见。

编者

一九八四年三月

目　录

第一章　函数

§1　函数概念

本节的重点是函数概念。通过讨论、练习，使读者加深对这一概念的理解。

首先复习函数定义：设 X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集。如果存在一个对应法则 f，使得对于 X 中的每个 x，按对应法则 f，都有唯一的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 X 上的函数（或称 f 是 X 到 $\mathbf{R}$ 的映射），记作：

$$f: X \longrightarrow \mathbf{R}$$

或简称函数 f。有时记

$$f: x \longmapsto y$$

以表示与数 x 对应的是 y。

其中 X 叫做函数 f 的定义域，与 x 相对应的 y 叫做函数 f 在 x 的值简称函数值（或称 y 为 x 在映射 f 作用下的象），记作 $y=f(x)$。又称 $f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$ 为函数 f 的值域。

有时也以 D_f、R_f 分别表示 f 的定义域和值域。

为了加深对函数概念的理解，讨论以下几个问题：

1. 函数f与函数值 f(x)

在以上定义中，函数 $f: X\rightarrow \mathbf{R}$ 与函数值 $f(x)$ 是两个截然不同的概念。前者是集合 X 到 $\mathbf{R}$ 的一个单值对应规律

（即映射），后者是实数值。不过在数学分析中习惯于用 $f(x)$ 表示函数 $f: X\to\mathbf{R}$。我们仍然保留记号 $f(x)$ 这一习惯用法；但要注意，当遇到记号$f(x)$时，要根据上下文弄清楚它是代表函数值还是代表函数 $f: X\to\mathbf{R}$。

2. 函数的相等与不等

我们把"函数f与g相等"定义为f与g是同一个映射，即它们有相同的定义域 X 和相同的对应规律。而有相同的对应规律是指对 X 中的每个实数 x，都有 $f(x)=g(x)$。这里$f(x)=g(x)$就是函数值相等。而"函数 f 与 g 不等"的意思就是 f 与 g 不是同一个映射，即或者它们的定义域不同，或者虽然定义域相同，但对应规律不同（对应规律不同的意思是：至少在定义域X中有一个x，使$f(x)\neq g(x)$，这里 $f(x)\neq g(x)$就表示函数值不等）。

一定要分清"函数的相等与不等"与"函数值的相等与不等"。

练习 1 以下各组函数是否相等？

(a) $f(x)=1+x^2 \quad (1\leqslant x\leqslant 3)$，

$g(x)=1+x^2 \quad (2\leqslant x\leqslant 4)$。

(b) $f(x)=\ln x^2$，$\quad g(x)=2\ln x$。

(c) $f(x)=1$，$\quad g(x)=\dfrac{x}{|x|}$。

(d) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$，$h(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0. \end{cases}$

注意：(a)中的 f 与 g，尽管其表达式形式相同，但由于它们的定义域不同，因而不相等：即 $f\neq g$。只是在 f 与 g

都有定义的区间 $2 \leqslant x \leqslant 3$ 内 f 与 g 的函数值相等，即

$$f(x)=g(x) \quad 当 2 \leqslant x \leqslant 3 .$$

3. 函数的表示法

函数的表示法就是用来确定 X 到 $\mathbf{R}$ 的单值对应规律的办法。常见的办法有列表法、公式法（解析法）、图表法等。由于学生接触较多的是用公式表示的函数，他们常常不自觉地以为只有公式才是表示函数的最好的方法。其实函数概念的本质是 X 到 $\mathbf{R}$ 的单值对应规律，用什么办法来表达这个规律，纯属方法问题。没有理由对用来表达对应规律的办法加以任何限制，也说不上这些方法的优劣。（当然从应用的角度来说，这些方法可能适应不同的需要，有时需加以选择）作为练习，可要求学生总结一下他所遇见的函数都有哪些表示方法，举几个不是用一个统一的公式表示的函数，再要求学生证明一下函数 $\sin x$、$\lg x$、$[x]$（注意：$\sin x$、$\lg x$，$[x]$ 都是函数记号）的对应规律是用什么办法确定的。

4. 函数的图象与用图象表示函数

在中学已经作过许多函数的图象。我们知道，函数的图象是平面上某个点集。如果把平面上的点用有序实数对 (x,y) 来表示，那么函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 的图象就是平面点集

$$G_f=\{(x,f(x))\mid x\in X\}$$

习惯上也称 G_f 为函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 的曲线。由函数的定义知：任何一条与 y 轴平行的直线与 G_f 至多有一个公共点。

反过来，如果 $G=\{(x,y)\}$ 是平面上某个点集，其中 x 的取值范围是集合 $X\subseteq\mathbf{R}$。如果任何一条与 y 轴平行的直线与集合 G 至多有一个公共点，那么对 X 中每个实数 x，必有唯一的实数 y，使 $(x,y)\in G$，令 $x\longmapsto y$，便得到函数 $f: X\to\mathbf{R}$，

且G恰是f的图象。这时我们也说G表示一个函数$f:X\to\mathrm{R}$。

因此平面点集G能表示一个函数$f:X\to\mathrm{R}$的特征就是：任何一条与y轴平行的直线与G至多有一个公共点。

通常把点集G直观地叫做曲线，这样，上面的这段话便可叙述为：

曲线L能表示一个函数$f:X\to\mathrm{R}$的特征就是任何一条与y轴平行的直线与L至多交于一点。

曲线L能表示函数$f:Y\to\mathrm{R}$的特征与此类似。

若不加说明，我们说曲线表示函数，总是指$f:X\to\mathrm{R}$。

练习2　作出以下函数的图象

(a) $f(x)=|x|$；　(b) $f(x)=\sin x$；

(c) $f(x)=[x]$；　(d) $f(x)=\sqrt{x}$；(e) $f(x)=\sqrt[3]{x}$。

练习3　以下各曲线是否表示函数$f:X\to\mathrm{R}$？

(a)　平面上一个圆；

(b)　平面上一条抛物线

(i)　对称轴平行于x轴，

(ii)　对称轴平行于y轴。

练习4　为什么通常实验中的“时间—温度”曲线、“时间—速度”曲线一定能表示函数？

§2　函数的几何性质

习作课上可先复习有关定义，再挑选几个题目作为练习。要求读者能够根据各种定义证明函数的相应性质（如有界性、奇偶性、周期性、单调性等），并力求论证严密，表达清晰。在技巧上不作过高要求，注意纠正学生在论证中出

现的错误和叙述上的不当之处。

练习1 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加。

（只需证明：对任何实数 x_1，x_2，只要 $x_2>x_1$，就有 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3>0$。将 $x_2^3-x_1^3$ 分解因式后，易证。）

练习2 证明函数 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,\pi/2]$ 内单调增加。

（提示：利用和差化积公式将

$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1$ 变形）

练习3 证明 $f(x)=\mathrm{tg}x$ 在任何 $(k\pi-\pi/2,\ k\pi+\pi/2)$ 内单调增加。（k 为整数）

练习4 试证 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的（最小）周期是 2π。

（注意：只证明 $f(x+2\pi)=f(x)$，还不能断定 2π 是 f 的最小周期。）

练习5 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数，}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

是不是周期函数？它的周期是什么？有没有最小周期？

§3 反函数与复合函数

本节重点是反函数与复合函数概念，要求学生能正确叙述并且理解反函数与复合函数定义。

复习一下反函数的定义

如果对于函数 $f: X\to \mathbf{R}$ 的值域 $R_f=f(X)$ 中的每一 y，

都有唯一的 x 使得 $f(x)=y$，规定对应关系：$y\longmapsto x$，这样确定的函数 $f^{-1}: R_f\longrightarrow \mathbf{R}$ 叫做函数 f 的反函数。

也可以把说法稍微改变一下：

函数 $f: X\to\mathbf{R}$ 的值域是 R_f. 显然对每个 $y\in R_f$，方程 $f(x)=y$ 在 X 中至少有一个解 x，如果对每个 $y\in R_f$，上述的解 x 是唯一的，规定 $y\longmapsto x$. 这样确定的函数 $f^{-1}: R_f\to\mathbf{R}$ 叫做函数 f 的反函数。

练习1 证明：如果对于 D_f 中的任意 x_1，x_2，由 $x_1\neq x_2$ 可推出 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则 f 有反函数。

练习2 证明：任何严格单调的函数必有反函数.若“严格单调”改为“单调”，结论还成立吗？

练习3 若函数 f 有反函数，那么 f 一定严格单调吗？

练习4 证明函数 $y=f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$(-\infty<x<+\infty)$ 有反函数，并求出其表达式。

证明 此处 $X=(-\infty,\ +\infty)$ $f(X)=(-\infty,\ +\infty)$

对每个 $y\in(-\infty,\ +\infty)$，方程 $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=y$ 有唯一解

$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$ $\therefore x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$ $(-\infty<y<+\infty)$

便是 $y=f(x)$ 的反函数。

再复习复合函数定义

设 f、g 是函数，D_f、D_g、R_f、R_g 的意义如前所述。如果 $R_f\subset D_g$，于是对 D_f 中每个 x，$f(x)\in D_g$，因此 $g(f(x))$ 有意义，规定 $x\longmapsto g(f(x))$，得到的函数记作 $g\circ f: D_f\to\mathbf{R}$ 叫做 f 与 g 的复合函数。显然 $D_{g\circ f}=D_f$。

由定义知，f 与 g 可以复合的条件是：$R_f \subset D_g$。

练习1 函数 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=\ln x$ 可以复合吗？如果可以复合，将$g\circ f$ 表示出来。

解 $D_f=(-\infty, +\infty)$ $R_f=(1, +\infty)$

$D_g=(0, +\infty)$

由于$R_f \subset D_g$，故 f与g可以复合，复合成的函数是

$$g\circ f: D_f \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x \longmapsto \ln(x^2+1))$$

也说 $g(f(x))=\ln(x^2+1)$是 f 与g 的复合函数。

练习2 练习 1 中的 g 与 f、f与f、g与g是否可以复合为$f\circ g$，$f\circ f$，$g\circ g$？如果可以复合，写出复合函数的表达式。

（答：f 与 f、g 与 f 可以复合；g 与 g不可以复合。）

练习3 函数 $f(x)=\sin x$与 $g(x)=\ln x$ 可以复合成 $g\circ f$ 吗？

由于 $R_f=[-1, 1]$，$D_g=(0, +\infty)$，$R_f \not\subset D_g$，根据定义知 f 与 g 不可以复合。

但如果将 f 的定义域缩小为 $X_1=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(2k\pi, (2k+1)\pi)$，

则 $R_f \subset D_g$，于是 f 与 g可以复合。严格说来，这里的 f 与开始的 f 不是一个函数。我们把定义域缩小为 X_1 后的函数叫做函数 f 在X_1 上的限制，记为 $f|_{X_1}$。因此严格说来这里的复合实际是 $f|_{X_1}$ 与g 的复合，不过通常仍然简单地说成 f 与 g 的复合，并用 $g(f(x))=\ln\sin x$ 表示。按同样的理解，练习 2 中的g 与 g 可以复合成$g(g(x))=\ln\ln x$，它的定义域是（1，$+\infty$）。

还要注意，f 与 g的复合同 g 与 f 的复合不是一回事。

§ 4　数学归纳法

当证明与任意自然数 n 有关的命题 $P(n)$ 时，常可采用数学归纳法的证明形式：首先证明命题 $P(1)$ 正确；然后证明只要命题 $P(k)$ 正确，则命题 $P(k+1)$ 正确。完成了以上两个证明步骤，就可以肯定，对任意自然数 n，命题 $P(n)$ 正确。

在习作课上，可以选择一些有用的等式及不等式，其中多数由读者练习用数字归纳法证明，少数可作例题讲解。

例 1　试用数学归纳法证明

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

例 2　证明　$2^n \geqslant n^2$ 当 $n \geqslant 5$ 时成立。

（提示：由归纳假设知，$2^{k+1}=2\cdot 2^k \geqslant 2k^2$，因此只需证 $2k^2 \geqslant (k+1)^2$ 即可）

例 3　证明不等式 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证明　（i）　当 $n=1$ 时，$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式成立。

（ii）　若当 $n=k$ 不等式成立，

即　$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

则 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\ \frac{2k+1}{2(k+1)}$

因此只要证明 $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\ \frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$　　(*)

则就证明了当 $n=k+1$ 时，不等式成立。

上述(*)式成立，只需 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$

即 $4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$

最后的不等式显然成立，因而(*)式成立。

由(i),(ii)知，原不等式对一切自然数 n 都成立。

例 4　设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 皆为正数，

证明：$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

这是一个著名的定理：任意有限个正数的几何平均数不超过其算术平均数。关于这个不等式有许多有趣的证明，或者是直接用数学归纳法，或者是利用数学归纳法的变形。这里介绍几种证法，课上可介绍一两种，其余的供参考。从这里可以学习运用数学归纳法证题时的一些技巧。

证法 1　(直接用数学归纳法)

(i)　当 $n=1$ 时，$a_1=a_1$ 不等式成立

(ii)　若当 $n=k$ 时，有 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}=\frac{k\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+a_{k+1}}{k+1}$$