广义函数的基本理論

J. 米庫辛斯基
R. 西科尔斯基
著

人民教育出版社

本书原文是著名波兰数学家米庫辛斯基(J. Mikusinski)和西科尔斯基(R. Sikorski)所写的英文著作"The Elementary Theory of Distribution",是波兰国立科学出版社(Panstwowe Wydawnictwo Naukowe) 1957 年出版的,中譯本系根据苏联外国文书籍出版社 (Издательство иностранной литературы) 1959 年出版的希罗科夫(Ф. В. Широков)所譯的俄譯本"Элементарная теория обобщенних функций"譯出的。本书簡明地叙述了广义函数論的基本理論,是一本很好的广义函数論的入門书籍,可供高等学校数理系学生及科技工作人員閱讀。

广义函数的基本理論

J. 米庫辛斯基、 R. 西科尔斯基著

复旦大学数学系

1956—1961 級泛函分析組同学譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号)

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号 13010·798 开本 850×1168 1/32 印張 2 2/16

字数 50,000 印数 10001—11000 定价 (6) ¥0.24

1960 年 6 月第 1 版 1960 年 6 月第 1 次印刷

俄文版序言

由著名的波兰数学家米庫辛斯基 (J. Mikusinski)和西科尔斯基(R. Sikorski)写的“广义函数的基本理論”一书簡明扼要地叙述了广义函数的基础論。在这本书里叙述了广义函数論的大部分基本概念和一系列有用的例子。

作者是把广义函数作为連續函数序列的“极限”与作为連續函数的形式导数来定义的，并証明了这些定义的等价性。这样来引入广义函数仅要求讀者知道最簡单的分析概念。作者在說明了广义函数类不仅包含連續函数而且还包含了广泛的一类不連續函数以及如狄拉克(Dirac)δ-函数这样的奇异函数后，建立起广义函数的基本运算法則：微分、积分、变数代換等等。在后面几节里，研究了广义函数在一点的值的概念和建立起在一点的值的存在性的充分必要条件。最后作者研究了周期广义函数和它的富里埃(Fourier)級数的展开。可惜的是对于广义函数論的一个重要方面——富里埃变換理論——在这里沒有涉及到。

这本书可以推荐为广义函数論的很好的入門书。

盖里范德(*И. М. Гельфанд*)

1958.2.26.

目 录

引 言

本文的目的是尽量簡单地叙述广义函数理論。它是这样簡单，使得物理学家和工程师容易掌握这个理論。为了达到这个目的，我們将不利用泛函分析的方法，也不用泛函来定义广义函数。在应用数学里广义函数，如狄拉克 δ-函数是作为普通函数来研究的。但事实上，广义函数不是普通函数，然而在某种直观意义上能够用普通函数来逼近。因而，严格地定义逼近的概念是我們定义广义函数的出发点。这个定义自然使得对广义函数采取与普通函数同样的記号，并允許保持分析公式的同样形式和引用我們通常的运算慣語。

别的著者也感到需要更簡单地叙述广义函数論，用更簡单的概念为依据来定义广义函数。这可以在許多关于广义函数基本理論的工作中看到(哈尔派灵[Halperin][3]，勾尼克[König][6]，柯連伐尔[Korevaar][7]，米庫辛斯基[10、11]，息哥尔斯基[13]，西洛維哥符斯基[Slowikowski][14、15]，坚姆澱尔[Temple][17])。

每个广义函数在一定的意义下是某个連續函数的导函数。我們在本文的开始就証明这个特性，而用广义函数的两个基本观点——作为連續函数的极限和对連續函数的导数——来展开理論的其他部分。这使得所有定理的証明是初等的而且很簡单的。

在本文中，我們討論的广义函数基本理論中起基本作用的是有限阶广义的理論。在§21里，我們指出如何将基本定义和定理拓广到无穷阶的广义函数的情况。

虽然本文的主要任务是为了教学的目的而叙述广义函数理論，我們仍包括了某些新的結果，它們是作者在1954—55和1955—56学年度在波兰科学院的数学研究所領导的习明納尔上的产物。

亚·洛耶西維茨、克·烏尔白尼克、依·烏辽卡、史·然連史諾等的工作对于这本小册子的撰写特别有帮助。

这里，我們仅从事于单变量的广义函数，至于这个理論的其余部分和多变量的广义函数理論将在以后出版的书中叙述。

§1. 抽象方法

抽象方法是把具有某些共同特性的对象（数学对象）同一化，在数学里引进新的概念时，常常用到它。我們将用一些例子来說明这方法。

若两有向綫段 x 和 y 相互平行且具有相同的长度和方向就称它們为等价的。这时記为：$x \sim y$。

容易看出，上述等价关系的定义具有下列性质：

$(\mathcal{E}_1)$ $x \sim x$（自反性），

$(\mathcal{E}_2)$ 若 $x \sim y$，則 $y \sim x$（对称性），

$(\mathcal{E}_3)$ 若 $x \sim y$ 且 $y \sim z$，則 $x \sim z$（傳递性）。

把等价的有向綫段同一化时，就引出自由向量的概念。我們来闡明这种同一化的数学意义。借助于等价概念，把有向綫段全体所成的集划分为不相交的类，同一类中的綫段是等价的，不同类的綫段是不等价的。因此，从邏輯观点来看，每个自由向量是一类相互等价的有向綫段。

抽象方法的另一个例子是康妥（Cantor）的实数定义。其中以有理数的基本序列这个概念作为出发点。所謂基本序列即是指滿足勾犀（Cauchy）条件的序列 $\{a_n\}$：对任意的（有理数）$\varepsilon > 0$ 存在数 n_ε，使得

当 $m, n > n_\varepsilon$ 时，$|a_m - a_n| < \varepsilon$。

假使序列 $\{a_n - b_n\}$ 趋向于零，那末称有理数的基本序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是等价的。在这种情况下我們写 $\{a_n\} \sim \{b_n\}$。容易驗証这个等价关系具有性质 $(\mathcal{E}_1)$，$(\mathcal{E}_2)$ 和 $(\mathcal{E}_3)$。

把等价的基本序列同一化，就可以引出实数概念。因此，在康妥理論中，实数是相互等价的基本序列类。

我們可以把抽象方法应用到任意一些元素組成的集上，只要在此集中具有适合条件 $(\mathcal{E}_1)$，$(\mathcal{E}_2)$ 和 $(\mathcal{E}_3)$ 的某种等价关系。

对于每个元素 y，用 $[y]$ 来表示满足等价关系 $x\sim y$ 的所有元素 x 构成的类，同时我們称所得的类 $[y]$ 为等价性类。由条件 $(\mathcal{E}_1)$，$(\mathcal{E}_2)$ 和 $(\mathcal{E}_3)$ 可以得到下面的性质：

(a) y 属于类 $[y]$；

(b) 若 $y\sim z$，則 $[y]=[z]$，就是說类 $[y]$ 和 $[z]$ 由一些相同的元素組成；

(c) 若关系式 $y\sim z$ 不滿足，那末类 $[y]$ 和 $[z]$ 沒有任何公共元素。

性質(a)可以从 $(\mathcal{E}_1)$ 得到。

再由 $(\mathcal{E}_3)$ 可得 $x\sim z$，也就是說 x 属于类 $[z]$。另一方面，由 $(\mathcal{E}_2)$ 得到 $z\sim y$。所以，若 x 属于类 $[z]$，卽 $x\sim z$，那末由 $(\mathcal{E}_3)$ 可得 $x\sim y$，也就是 x 属于类 $[y]$。

为了証明(c)，設等价关系 $y\sim z$ 不滿足，但是存在元素 x，它属于类 $[y]$ 和 $[z]$。这就是說，$x\sim y$ 且 $x\sim z$，此时由 $(\mathcal{E}_2)$ 和 $(\mathcal{E}_3)$ 得到 $y\sim z$，这和假設冲突。

从(a)、(b)和(c)可以看出集被划分为沒有公共元素的类，当而且仅当两个元素等价的时候，它們属于同一类。等价元素的同一化乃是由所考察的集合的元素过渡到等价性类。于此，等价关系变为一般的相等。

§2. 連續函数的基本序列

广义函数集是普通函数集的扩充。我們利用类似于把有理数集扩充为实数集的康妥理論中的方法，引出广义函数。实数的引入是为了完成确定的运算，如开方或对数的运算。引入广义函数論是为了始終能够作微分运算。对于普通函数，甚至假定它連續也不一定能微分。如同康妥理論中以有理数为出发点一样，在这里所开展的理論中以定义在确定的区間 $A<x<B$ $(-\infty\leqslant A<B\leqslant\infty)$ 上的連續函数为出发点。

对于定义在 $A<x<B$ 里的連續函数序列$\{f_n(x)\}$，如果存在某个函数列$\{F_n(x)\}$及整数 $k\geqslant 0$ 使得

(F₁) $F_n^{(k)}(x)=f_n(x)$,

(F₂) 序列$\{F_n(x)\}$几乎一致收斂,

那末称$\{f_n(x)\}$是基本序列。

如果函数列$\{F_n(x)\}$在区間 $A<x<B$ 中每一个有限閉区間上一致收斂于 $F(x)$，我們就称序列$\{F_n(x)\}$在区間 $A<x<B$ 中几乎一致收斂于函数 $F(x)$，并記为

$$F_n(x)\rightrightarrows F(x).$$

例如在区間 $-\infty<x<\infty$ 里 $x/n\rightrightarrows 0$。在区間 $-\infty<x<\infty$ 上不难断定$(1+x/n)^n\rightrightarrows e^x$。任意冪級数的部分和的序列在自己的收斂区間內也是几乎一致收斂的。

显然，每一个一致收斂的序列是几乎一致收斂的，几乎一致收斂的連續函数序列的极限函数也是連續的。記号

$$F_n(x)\rightrightarrows$$

表示序列$\{F_n(x)\}$几乎一致收斂于某个函数。而記号

$$F_n(x)\rightrightarrows\leftleftarrows G_n(x)$$

表示序列$\{F_n(x)\}$和$\{G_n(x)\}$几乎一致收斂于同一函数。

从定义(当 $k=0$ 时)直接得到:

2.1. 每个几乎一致收斂的連續函数列是基本的。

在下列的預备定理后面将給出基本序列的另一些例子。

2.2. 如果$\{f_n(x)\}$是具有 m 阶連續导函数 $f_n^{(m)}(x)$ 的基本序列，那末序列$\{f_n^{(m)}(x)\}$也是基本的。

因为序列$\{f_n(x)\}$满足条件(F₁)和(F₂)，那末序列$\{f_n^{(m)}(x)\}$满足条件 $F_n^{(k+m)}(x)=f_n^{(m)}(x)$ 和(F₂)，这也就証明了序列$\{f_n^{(m)}(x)\}$是基本的。

2.3. [1] 如果連續函数序列$\{f_n(x)\}$有界，且在区間 $A<x<x_0$

[1] 这个引理是勒貝格积分理論的基本定理中的特殊情况。

和区間 $x_0<x<B$ 中，$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，那末在区間 $A<x<B$ 中成立着：$\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt \rightrightarrows \int_{x_0}^{x} f(t)dt$。因而序列 $\{f_n(x)\}$ 是基本的。

設 $|f_n(x)|\leqslant M$。对給定的 $\varepsilon>0$ 和区間 $a\leqslant x\leqslant b$ ($A<a<x_0<$ $<b<B$)，可以选取 n_0，使得 $n>n_0$ 时，不等式 $|f_n(x)-f(x)|<$ $<\varepsilon/2(b-a)$[①] 在区間 $a\leqslant x\leqslant x_0-\varepsilon/4M$ 和区間 $x_0+\varepsilon/4M\leqslant x\leqslant b$ 中成立。这样，在每一个上述的区間中 $|f_n(x)-f(x)|$ 的积分都比 $\varepsilon/2$ 小。对于区間 $x_0-\varepsilon/4M\leqslant x\leqslant x_0$ 和 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon/4M$ 有同一的估計值。因而当 $a\leqslant x\leqslant b$ 和 $n>n_0$ 时，

$$\left|\int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt-\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right|<\varepsilon,$$ 这就証明了引理。

基本序列的例子

1° 序列

$$g_n(x)=\frac{1}{1+e^{-nx}}$$

小于 1，且在区間 $-\infty<x<0$ 中 $g_n(x)\rightrightarrows 0$ 和在区間 $0<x<\infty$ 中，$g_n(x)\rightrightarrows 1$。根据引理 2.3 知道这个序列是基本的。

2° 序列

$$f_n(x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-nx^2/2}$$

是基本序列。事实上，序列

$$g_n(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt$$

小于 1，且在区間 $-\infty<x<0$ 中 $g_n(x)\rightrightarrows 0$ 和在区間 $0<x<\infty$ 中，$g_n(x)\rightrightarrows 1$。由引理 2.3 序列 $\{g_n(x)\}$ 是基本的。按引理 2.2 知道序列 $\{f_n(x)\}$ 也是基本的。

3° 表示在图 3 中的函数序列 $\{f_n(x)\}$ 是基本的，因为从图 4

---

① 取数 M 充分大使滿足 $a<x_0-\frac{\varepsilon}{4M}$ 和 $x_0+\frac{\varepsilon}{4M}<b$——俄譯者注。

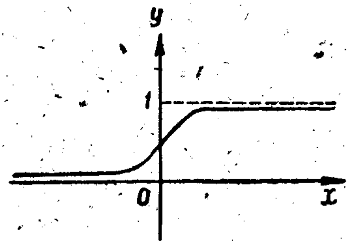

图 1

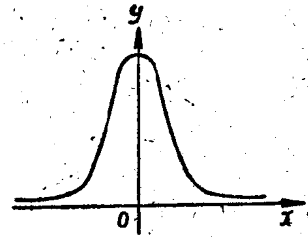

图 2

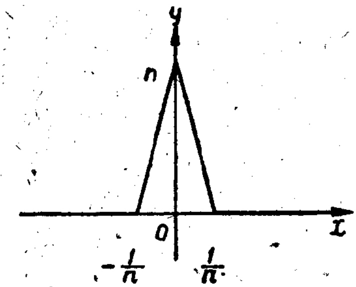

图 3

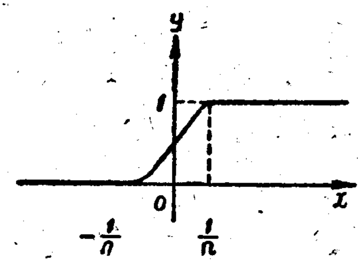

图 4

容易看出函数 $g_n(x)=\int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,dt$ 也具有和例 1°，例 2°一样的性质。

下面的引理对于多項式基本序列的研究是有用的。

2.4. 如果次数 $<k$ 的多項式序列

(1) $$p_n(x)=a_{n0}+a_{n1}x+\cdots+a_{n,(k-1)}x^{k-1}\quad(n=1,2,\cdots)$$

在 k 个点上收斂，那末存在极限

(2) $$a_j=\lim_{n\to\infty}a_{nj}\quad(j=0,1,2,\cdots,k-1).$$

反之，如果(2)式中的极限存在，那末 $p_n(x)\rightrightarrows p(x)$，其中

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{k-1}x^{k-1}.$$

設 $x_1,\cdots,x_k$ 是不同的数。以此代入多項式(1)，我們得到

$$a_{nj}=\frac{1}{A}(A_{1j}p_n(x_1)+\cdots+A_{kj}p_n(x_k)),$$

其中

$$A=\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 1 & x_k & \cdots & x_k^{k-1}\end{vmatrix}\neq 0,$$

而 A_{ij} 是行列式 A 中元素 x_i^{j-1} 的代数余因子。因此，如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$存在，那末极限(2)也存在。从估計式

$$|p_n(x)-p(x)|\leqslant\sum_{j=1}^{k-1}|a_{nj}-a_j|c^j,$$

得到$\{p_n(x)\}$在任一区間 $-c\leqslant x\leqslant c$ 上的一致收斂性。

2.5. 次数 $<m$ 的多項式序列 $\{p_n(x)\}$ 为基本序列的充要条件是它几乎一致收斂。

由引理 2.1 只要証明必要性就可以了。設$\{p_n(x)\}$是基本序列；存在整数 $k\geqslant 0$ 和次数 $<m+k$ 的多項式序列$\{P_n(x)\}$，使 $P_n^{(k)}(x)=p_n(x)$，而且序列$\{P_n(x)\}$几乎一致收斂。由引理 2.4 多項式 $P_n(x)$的系数有极限，因此多項式 $p_n(x)$的系数也有极限。由此，从引理 2.4 推出$\{p_n(x)\}$几乎一致收斂。

应該指出，在基本序列的定义中所用的数 k，在必要时可以用任意比 k 大的数代替。这一点可以从下面的引理得出：

2.6. 如果序列$\{F_n(x)\}$满足条件(F_1)和(F_2)，那末函数列

$$\widetilde{F}_n(x)=\int_{x_0}^{x}dt_1\int_{x_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{x_0}^{t_{l-1}}F_n(t_l)dt_l,$$

也满足条件(F_1)和(F_2)，其中 l 是某个正整数，不过在条件中要把 k 换成 $k+l$。此外，如果 $F_n(x)\rightrightarrows F(x)$，則 $\widetilde{F}_n(x)\rightrightarrows\widetilde{F}(x)$，其中

$$\widetilde{F}(x)=\int_{x_0}^{x}dt_1\int_{x_0}^{t_1}dt_2\cdots\int_{x_0}^{t_{l-1}}F(t_l)dt_l.$$

§3. 广义函数的定义

如果对基本序列$\{f_n(x)\}$及$\{g_n(x)\}$存在序列$\{F_n(x)\}$和$\{G_n(x)\}$

及整数 $k\geqslant 0$，使得

$$(\mathrm{E}_1)\qquad F_n^{(k)}(x)=f_n(x) \text{和} G_n^{(k)}(x)=g_n(x),$$

$$(\mathrm{E}_2)\qquad F_n(x)\rightrightarrows\leftleftarrows G_n(x),$$

那末，称序列$\{f_n(x)\}$和$\{g_n(x)\}$是等价的，且記为

$$\{f_n(x)\}\sim\{g_n(x)\}.$$

从引理 2.6 得到：

3.1. 等价序列的定义中所用的整数 k 在必要时可以易为任意大的整数。

我們只要易 $F_n(x)$为函数 $\widetilde{F}_n(x)$，而易 $G_n(x)$ 为用类似的方法所定义的 $\widetilde{G}_n(x)$。

3.2. 基本序列$\{f_n(x)\}$和$\{g_n(x)\}$等价的充要条是序列

$$(1)\qquad f_1(x),\quad g_1(x),\quad f_2(x),\quad g_2(x),\cdots$$

为基本的。

如果序列(1)是基本的，那末存在整数 $k\geqslant 0$ 和連續函数$F_n(x)$与 $G_n(x)$使得 $F_n^{(k)}(x)=f_n(x)$和 $G_n^{(k)}(x)=g_n(x)$成立且序列

$$(2)\qquad F_1(x),\quad G_1(x),\quad F_2(x),\quad G_2(x),\cdots$$

几乎一致收斂。因而滿足条件(E_1)和(E_2)。

相反地，若条(E_1)和(E_2)成立，則序列(2)几乎一致收斂，也就是說序列(1)滿足条件(F_1)和(F_2)。

容易看出，被我們所引进的关系$\sim$具有性質$(\mathcal{E}_1)$和$(\mathcal{E}_2)$，我們可証明它也具有性質$(\mathcal{E}_3)$。設$\{f_n(x)\}\sim\{g_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}\sim$ $\sim\{h_n(x)\}$；这时存在着整数 $k\geqslant 0$ 和滿足条件(E_1)及(E_2)的序列$\{F_n(x)\}$，$\{G_n(x)\}$，并且存在着整数 $l\geqslant 0$和序列$\{\widetilde{G}_n(x)\}$，$\{H_n(x)\}$适合类似的条件：

$$\widetilde{G}_n^{(l)}(x)=g_n(x),\quad H_n^{(l)}(x)=h_n(x),$$

$$\widetilde{G}_n(x)\rightrightarrows\leftleftarrows H_n(x).$$

由引理 3.1 可以認为$k=l$。此时置$\overline{H}_n(x)=G_n(x)-\widetilde{G}_n(x)+H_n(x)$，就得到

$$F_n^{(k)}(x)=f_n(x),\quad \bar{H}_n^{(k)}(x)=h_n(x),\quad F_n(x)\rightrightarrows\!\!\leftleftarrows\bar{H}_n(x),$$

即 $\{f_n(x)\}\sim\{h_n(x)\}$.

由于适合条件$\{\mathscr{E}_1\}$，$\{\mathscr{E}_2\}$和$\{\mathscr{E}_3\}$，基本序列$\{f_n(x)\}$的全体(定义在区間 $A<x<B$ 上的)被划分为沒有公共元素的等价性类，使得当而且仅当二个基本序列等价的时候，它們属于同一类。我們称这些等价性类为广义函数① (在区間 $A<x<B$ 上的)。因此，由等价的基本序列的同一化产生了广义函数的概念。

我們用記号$[f_n(x)]$来表示由基本序列$\{f_n(x)\}$所确定的广义函数，即所有等价于$\{f_n(x)\}$的基本序列所成的类。序列$\{f_n(x)\}$和$\{g_n(x)\}$当而且仅当它們等价时才定义同一广义函数。换言之，

当而且仅当 $\{f_n(x)\}\sim\{g_n(x)\}$时$[f_n(x)]=[g_n(x)]$.

在例 2° 和 3° (§ 2) 中的基本序列确定同一个广义函数，此广义函数被称为狄拉克(Dirac)的 δ-函数。

事实上，設 $\{f_n(x)\}$ 是例 2° 或例 3° 中的函数列；此时由于引理 2.3，序列

$$\int_{-\infty}^{x}dt\int_{-\infty}^{t}f_n(\tau)d\tau$$

几乎一致收斂于同一个函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0,\\ x, & \text{当 } x\geqslant 0.\end{cases}$$

这就是說例 2° 和 3° 中的序列 $\{f_n(x)\}$是等价的。

§ 4. 广义函数作为函数概念的扩充

按引理 2.1，常序列 $\{f(x)\}$，即每一項均为同一个連續函数 $f(x)$ 的序列，是基本序列。因而，該序列确定了一个广义函数 $[f(x)]$。

---

① 原著称为 *distribution* (分布) 我們譯为广义函数是采用俄譯本中的名詞——中譯者注。

不同的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 确定不同的广义函数 $[f(x)]$ 与 $[g(x)]$。

事实上，設 $[f(x)]=[g(x)]$，亦即，存在函数 $F_n(x)$ 与 $G_n(x)$ 及整数 $k\geqslant 0$，使得

$$F_n^{(k)}(x)=f(x),\qquad G_n^{(k)}(x)=g(x),\qquad F_n(x)\rightrightarrows\leftleftarrows G_n(x).$$

此时函数 $p_n(x)=(F_1(x)-G_1(x))-(F_n(x)-G_n(x))$ 为次数小于 k 的多项式，这是因为 $p_n^{(k)}(x)=0$。此外，$p_n(x)\rightrightarrows(F_1(x)-G_1(x))$。从引理 2.4 知道，函数 $F_1(x)-G_1(x)$ 是次数 $<k$ 的多项式。因此其 k 阶导数 $f(x)-g(x)$ 等于零，亦即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的。

考察形式为 $[f(x)]$ 的所有广义函数所成之集。由适才所建立的函数 $f(x)$ 与广义函数 $[f(x)]$ 之間的一一对应，可以使我們不区别这两个概念。以后我們将把广义函数 $[f(x)]$ 和函数 $f(x)$ 同一化并写为 $[f(x)]=f(x)$。

然而不是所有广义函数均可以表示成形式 $[f(x)]$，亦即不是所有的广义函数可以和連續函数同一化。例如狄拉克的 δ-函数不能和任何一个連續函数同一化。这将在 § 8 証明。所以广义函数的概念可以看成連續函数概念实质上的扩充。稍后，我們将指出，这个扩充也包含了相当广泛的不連續函数类。

从邏輯观点看来，这个扩充完全和康妥理論中由有理数集到实数集的扩充是同一类型。事实上，在康妥理論中有理数 a 和等价于常序列 $\{a\}$ 的基本序列所成的类 $[a]$ 同一化。

4.1. 若 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，則 $[f_n(x)]=f(x)$.

这只要注意到 $f(x)$ 是連續的，且序列 $[f_n(x)]$ 和 $\{f(x)\}$ 滿足条件 (E_1) 及 (E_2) 而其中 $k=0$。

因为广义函数是函数概念的扩充，所以对它我們仍保留通常函数的記号，用記号 $f(x)$，$g(x)$ 等等来表示广义函数。应該指出，这样来表示純粹是記号上的事，在一般情况下，是不容許以数值代入变量 x 的。

狄拉克的 δ-函数用記号 $\delta(x)$ 表示。

§5. 广义函数的代数运算

現在我們定义广义函数的加法和减法，以及广义函数与数的乘法。这些运算的定义是普通函数类似的运算的拓广，换言之，当广义函数为普通函数时，下面引入的运算和普通函数的运算相合。

我們規定广义函数 $f(x)=[f_n(x)]$ 与 $g(x)=[g_n(x)]$ 的和 $f(x)+g(x)$ 为广义函数 $[f_n(x)+g_n(x)]$。

为了检驗这定义的合理性，我們应当証明下列的事实：

1° 若序列 $\{f_n(x)\}$ 与 $\{g_n(x)\}$ 是基本的，則 $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ 亦是基本序列。

2° 广义函数 $[f_n(x)+g_n(x)]$ 与表示广义函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的序列 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 的选取无关，亦即，如果

$$\{f_n(x)\}\sim\{\bar{f}_n(x)\}\text{和}\{g_n(x)\}\sim\{\bar{g}_n(x)\},$$

則

$$\{f_n(x)+g_n(x)\}\sim\{\bar{f}_n(x)+\bar{g}_n(x)\}.$$

性質 1° 保証了可以进行加法运算，而性質 2° 保証了运算結果的唯一性。

为了証明 1°，設存在整 $k, k_1\geqslant 0$ 及函数 $F_n(x)$ 和 $G_n(x)$，且有性質

$$F_n^{(k)}(x)=f_n(x),\qquad Fn(x)\rightrightarrows,$$
$$G_n^{(k_1)}(x)=g_n(x),\qquad G_n(x)\rightrightarrows.$$

由引理 2.6，可以認为 $k=k_1$。因为

$$(F_n(x)+G_n(x))^{(k)}=f_n(x)+g_n(x),\qquad F_n(x)+G_n(x)\rightrightarrows,$$

所以序列 $\{f_n(x)+g_n(x)\}$ 是基本序列。

現在讓我們来証明命題 2°。此时，按引理 3.2，序列

$$f_1(x),\ \bar{f}_1(x),\ f_2(x),\ \bar{f}_2(x),\cdots,$$
$$g_1(x),\ \bar{g}_1(x),\ g_2(x),\ \bar{g}_2(x),\cdots$$

都是基本序列，而按 1° 序列

$f_1(x)+g_1(x), \bar{f}_1(x)+\bar{g}_1(x), f_2(x)+g_2(x), \bar{f}_2(x)+\bar{g}_2(x), \cdots$
也是基本序列，再由引理 3.2，

$$\{f_n(x)+g_n(x)\} \sim \{\bar{f}_n(x)+\bar{g}_n(x)\}.$$

我們規定广义函数 $f(x)=[f_n(x)]$ 与 $g(x)=[g_n(x)]$ 的差 $f(x)-g(x)$ 为广义函数 $[f_n(x)-g_n(x)]$。

我們規定广义函数 $f(x)=[f_n(x)]$ 与数 λ 的乘积 $\lambda f(x)$ 为广义函数 $[\lambda f_n(x)]$。

这些定义的合理性的証明，与关于加法的定义的合理性的証明类似。

从剛才引入的运算的定义可直接推出，广义函数和普通函数一样，也具有下列的运算性质：

(1) $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$;

(2) $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$;

(3) 差 $g(x)=h(x)-f(x)$ 是方程 $f(x)+g(x)=h(x)$ 的唯一解；

(4) $\lambda(f(x)+g(x))=\lambda f(x)+\lambda g(x)$;

(5) $(\lambda+\mu)f(x)=\lambda f(x)+\mu f(x)$;

(6) $\lambda(\mu f(x))=(\lambda\mu)f(x)$;

(7) $1\cdot f(x)=f(x)$.

我們用記号 0 表示由恒等于零的函数所确定的广义函数，有

$$0+f(x)=f(x) \text{ 与 } 0\cdot f(x)=0.$$

在最后的公式中，記号 0 具有两种不同的意义：在左边的部分，它标志着数零，而右边标志着广义函数零。这个双关性不致引起誤解。

§6. 广义函数的微分法

为了定义广义函数的微分运算，我們需要下列的引理：

6.1. 若函数 $f_n(x)$ 和 $g_n(x)$ 有 m 阶連續导数，且 $\{f_n(x)\}\sim\sim\{g_n(x)\}$，則