高等数学考点分析

钱吉林　谢禄臣
彭瑞华　主　编

武汉大学出版社

高等数学考点分析

钱吉林 谢禄臣 彭瑞华 主编

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学考点分析/钱吉林等主编. —武汉:武汉大学出版社,1996.5

ISBN 7-307-02189-7

Ⅰ.高…

Ⅱ.钱…

Ⅲ.高等数学—考试—内容—分析

Ⅳ.O13-44

武汉大学出版社出版发行

(430072 武昌 珞珈山)

湖北省崇阳县印刷厂印刷

(437500 湖北省崇阳县天城镇沿河路250号)

1996年5月第1版 1997年4月第2次印刷

开本:787×1092 1/32 印张:10.875

字数:330千字 印数:12001—15000

ISBN 7-307-02189-7/O·164 定价:12.00元

《高等数学考点分析》编辑委员会

主　编　钱吉林　谢禄臣　彭瑞华

副主编　肖新平　陈国钧　刘康泽　刘丁酉
刘克宁　詹前涌　王明圣　李　政
黄治才　杨勤荣　徐千里　穆汉林
刘　原　栾静闻　胡松林　喻国华

编　委（按姓名笔画为序）

马继英　王明圣　王艳琳　支和平　刘　杰
刘　原　刘丁酉　刘克宁　刘昌喜　刘康泽
孙慧娟　江程水　李　政　张冬冬　陈国钧
杨　谦　杨勤荣　何志芬　宋育科　肖新平
胡松林　徐千里　徐建豪　栾静闻　钱吉林
黄治才　彭瑞华　谢建萍　谢禄臣　喻国华
熊小华　熊喆风　蔡运舫　詹前涌　穆汉林

前　言

高等数学是工科类、经济类、农林类等大专院校的一门重要基础课，并被高教部门列为重点评估课程之一。有些部委、省市还对这门课进行统考。为了帮助学生学好高等数学，我们围绕三本最流行的高等数学教材——同济大学的《高等数学》（第三版）、赵树嫄主编的《微积分》、高汝熹主编的《高等数学》（一）——编写了这本参考书。内容取三者之并，重点放在三者之交上。

根据国家教委制定的《数学课程教学基本要求》，我们将“高等数学”划分为若干个考点，对每个考点作了一个综述。为了适应不同层次的要求，每个考点配有A组与B组两部分题目。A组题是对本、专科生最基本的要求，列入B组的题有三种情况：一是硕士研究生入学试题；二是较难的题；三是综合性较大的题。

书后有两个附录。附录一是介绍解高等数学题的若干方法，它们是：怎样做选择题，怎样做证明题，怎样做计算题，怎样做填空题等。附录二是三套高等数学试题及其解答。

本书的特点是：覆盖面广，可读性强。内容几乎覆盖了高等数学的全部，既有理论知识，又有应用实例。适用面宽，既适用于工科、理科、农林科与财经类各专业的本、专科生、自修大学生、电大生、函大生，又适合于准备报考研究生的读者。也可供广大教师和科技工作者参考。题型多样，既有选择题、填空题，还有计算题、应用题及证明题。特别是客

观题既多，又典型。样题新颖。本书附录二刊登了三套最新的湖北省联考或统考高等数学试题，且均附有较详细的解答。本书的另一大特点是对各种常见题型的解法分别系统地进行了理论概括，总结出了一些规律。而掌握正确的解题方法，对任何人都是十分重要的。

由于时间仓促，若有疏漏、错误之处，恳请读者指正。

编　者

1996.1.

目　录

第1章 集合与函数

考点1 集 合

【考点综述】

1. 集合 集合是不加定义的最原始概念. 它只能通过描述来理解. 所谓集合就是指具有某种特定性质的事物的总体. 组成这个集合的每一事物叫作集合的元素. 当 a 是集合 A 中的元素时，记为 $a\in A$；当 a 不是集合 A 中的元素时，记为 $a\notin A$（或 $a\overline{\in}A$）.

2. 集合中的元素具有确定性、互异性、无序性这 3 种特性.

3. 集合的表示法有两种：

1）列举法 即列出集合中的所有元素，并用花括号括起来. 例如：$A=\{a,b,c\}$.

2）描述法 即把属于集合中的所有元素具有的性质描述出来，写在{ }内. 例如：$A=\{x|x^2=1\}$.

4. 集合分有限集与无限集两种. 由有限个元素组成的集合叫作有限集，否则叫作无限集. 在有限集中又有两个常用的集合：单元素集与空集. 只含有一个元素的集合叫作单元素集. 不含任何元素的集合叫作空集，记为$\varnothing$.

5. 数集 由数组成的集合叫作数集. 常见的有实数集 $\mathbb{R}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、整数集 $\mathbb{Z}$、正整数(自然数)集 $\mathbb{N}$.

由点组成的集合叫作点集. 常见的有全体实数点集$(-\infty,+\infty)$；区间$[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$，(a,b)等. 实数集与全体实数点集是一一对应的.

6. 集合间的关系

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记为 $A=B$.

7. 集合的运算

1）由属于集 A 或属于集 B 的所有元素构成的集合叫作 A 与 B 的

并集，记为 $A\cup B$.

2）由集 A 和集 B 的所有公共元素构成的集合叫作 A 与 B 的交集，记为 $A\cap B$.

8. 此考点的题型通常有：与集合有关的概念题及集合的运算.

A 组

1. 下列关系中，正确的是(　　).

A. $\{0\}=\varnothing$　B. $\varnothing\in\{0\}$　C. $\varnothing\subset\{0\}$　D. $0\subset\varnothing$

答 C

2. 若 $M=\{x|2x+a=0\}$，$P=\{x|1<x<4$ 且 $x\in\mathbf{N}\}$，且 $M\cap P$ 为非空集合，则 $a=$__________.

解 $\because M=\{x|2x+a=0\}=\{-\frac{a}{2}\}$，及

$$P=\{x|1<x<4，x\in\mathbf{N}\}=\{2,3\},$$

又 $M\cap P\neq\varnothing$，所以 $M\cap P=\{2\}$或$\{3\}$，$-\frac{a}{2}=2$ 或 $-\frac{a}{2}=3$，即

$$a=-4\text{ 或 }-6.$$

3. 设集 $A=\{x|-5<x<5\}$，$B=\{x|0\leqslant x\leqslant 7\}$. 求 $A\cap B$ 与 $A\cup B$.

解 $A\cap B=\{x|0\leqslant x<5\}$，$A\cup B=\{x|-5<x\leqslant 7\}$.

4. 已知$\{1,2\}\subset M\subset\{1,2,3,4,5\}$，那么这样的集合 M 有(　　).

A. 6 个　B. 7 个　C. 8 个　D. 9 个

答 C　因为 M 至少要包含 1,2 两个元素，这样 M 可能是 2 元集、3 元集、4 元集和 5 元集四种：

2 元集有：$\{1,2\}$；

3 元集有：$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\}$；

4 元集有：$\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\},\{1,2,4,5\}$；

5 元集有：$\{1,2,3,4,5\}$，

总共有 8 个.

5. 下列各组中的 P 与 M 表示同一集合的是(　　).

A. $P=\varnothing$，$M=\{0\}$　B. $P=\{(2,3)\}$，$M=\{(3,2)\}$

C. $P=\{\pi\}$，$M=\{3.1416\}$

D. $P=\{1,2,\cdots,n\}$，$M=\{n,n-1,\cdots,2,1\}$

答 $\underline{D}$

6. 已知 $A=\{x|f(x)=0\}$，$B=\{x|g(x)=0\}$，$C=\{x|\varphi(x)=0\}$，则方程组 $\begin{cases} f(x)g(x)=0, \\ \varphi(x)=0 \end{cases}$ 的解集是（　　）.

A. $A\cap B\cap C$　B. $(A\cup B)\cap C$　C. $(A\cap B)\cup C$　D. $A\cup B\cup C$

答 $\underline{B}$　因为方程 $f(x)g(x)=0$ 的解是 $f(x)=0$ 或 $g(x)=0$，即 $A\cup B$. 而方程组的解应是构成方程组的各方程的公共解，故应为

$$(A\cup B)\cap C.$$

7. 用区间表示下列集合：

1) $I_1=\{x|\,|x+3|<2\}$；　　2) $I_2=\{x\,|\,1<|x-2|<3\}$.

解　1) $\because$ $|x+3|<2 \Rightarrow -2<x+3<2 \Rightarrow -5<x<-1$,

$$\therefore\ I_1=(-5,-1).$$

2) $|x-2|<3 \Rightarrow -3<x-2<3 \Rightarrow -1<x<5$，又

$|x-2|>1 \Rightarrow x-2>1$ 或 $x-2<-1 \Rightarrow x>3$ 或 $x<1$,

令 $A=(-1,5)$，$B=(3,+\infty)$，$C=(-\infty,1)$，则

$$I_2=A\cap(B\cup C)=(-1,1)\cup(3,5).$$

B　组

8. 集合 $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$. 若 $A\cap B\neq\varnothing$，且 $A\cap C=\varnothing$，求 a 的值.

解　由 $x^2-5x+6=0$，得 $x_1=2$，$x_2=3$，所以 $B=\{2,3\}$. 由 $x^2+2x-8=0$，得 $x_1=2$，$x_2=-4$，所以 $C=\{2,-4\}$.

因为 $A\cap C=\varnothing$，所以 $2,-4$ 都不是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的根.

又因为 $A\cap B\neq\varnothing$，所以 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的根，即 $3^2-3a+a^2-19=0$，那么 $a^2-3a-10=0$，解得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 变为 $x^2-5x+6=0$，解得

$$x_1=2,\ x_2=3;\ A=\{2,3\}.$$

这与已知条件 $A\cap C=\varnothing$ 相矛盾，故舍去 $a=5$.

当 $a=-2$ 时，方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 变为 $x^2+2x-15=0$，解得

$$x_1=-5,\ x_2=3;\ A=\{-5,3\}.$$

这时 $A\cap C=\varnothing$，$A\cap B=\{3\}$. 故所求值为 $a=-2$.

9. 已知 $A=\{x,xy,\lg xy\}$，$B=\{0,|x|,y\}$，且 $A=B$. 求 x,y 的值.

解 由 $A=B$，得 $0\in A$. 由此只能是 $\lg xy=0$，从而 $xy=1$. 又 $x\in A$，所以 $x\in B$.

(i) 若 $x=|x|$，那么 A,B 中剩下元素相等，即 $xy=y$，得 $x=1$. 而 $xy=1$，这样 A 中有两个元素是 1，与集合中元素互异性矛盾.

(ii) 若 $x=y$，由 $xy=1$ 得 $x^2=1$（$x=1$ 舍去，上面已说），所以 $x=-1$. 因此 $x=y=-1$.

10. 110 个学生的班级中，有 80 人学英语，62 人学日语，50 人学俄语，40 人不但学英语而且学日语，30 人既学英语又学俄语，25 人同时学日语和俄语，8 人三种语言全都学. 问有多少个学生三种语言中任何一种都没有学？

解 设 $A=\{$学英语的学生$\}$，$B=\{$学日语的学生$\}$，$C=\{$学俄语的学生$\}$，用 n_X 表示集合 X 中元素的个数，则 $n_A=80$，$n_B=62$，$n_C=50$，

$$n_{A\cap B}=40,\ n_{A\cap C}=30,\ n_{B\cap C}=25,\ n_{A\cap B\cap C}=8.$$

三种语言至少学一种的学生的集合为 $A\cup B\cup C$，则

$$n_{A\cup B\cup C}=n_A+n_B+n_C-n_{A\cap B}-n_{A\cap C}-n_{B\cap C}+n_{A\cap B\cap C}=105.$$

全班总人数为 110，故三种语言都没学的人数为 $110-105=5$.

考点 2　函数与反函数

【考点综述】

1. 函数　设 D 是一个给定的数集，如果对属于 D 的每一个数 x，按照某个对应法则 f，都有确定的数值 y 和它对应，那么 y 就叫作定义在 D 上关于 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 叫作自变量，D 叫作函数的定义域. 当 x 取遍 D 中的一切数值时，与它对应的函数值的集合 M 叫作函数的值域.

定义中若 y 唯一确定，则称 $y=f(x)$ 为单值函数，否则称为多值函数.

2. 函数的表示法常用的有 3 种：公式法、图像法、表格法.

3. 反函数　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值（$y\in M$），都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x

值($x\in D$)与之对应，则所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$）叫作函数 $y=f(x)$的反函数，它的定义域为 M，值域为 D. 习惯上，记为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

4. 复合函数、初等函数

1）复合函数　设 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$是两个函数，且 $\varphi(x)$的值域是 $y=f(u)$的定义域的子集. 那么，从 $u=\varphi(x)$的定义域中任取定 x，由 $u=\varphi(x)$确定出的 u 在 $y=f(u)$的定义域上，进而由 $y=f(u)$可确定 y 值，于是 x 与 y 之间构成了一种函数关系，把这种函数叫作由函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

2）初等函数　把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合步骤所构成的，并用一个式子表示的函数叫作初等函数.

5. 此考点的题型通常有：求函数值；求函数定义域、值域；判定函数是否同一；建立函数关系式；求反函数及其定义域、值域；利用函数与其反函数的图像关系求值；求复合函数及其定义域.

A　组

1. 求下列函数的定义域：

1）$y=\sqrt{(x-1)(x-2)}$；　　2）$y=\lg(\cos 2x)$；

3）$y=x+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；　　4）$y=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$；

5）$y=\begin{cases}-2x+1, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & x=2,\\ 2x-1, & 2<x\leqslant 3;\end{cases}$

6）$F(x)=\begin{cases}-x-1, & |x|\geqslant 1,\\ -\sqrt{1-x^2}, & |x|<1.\end{cases}$

解　1）$\because (x-1)(x-2)\geqslant 0$，即 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 2$，$\therefore$ 函数的定义域为 $(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

2）$\because \cos 2x>0$，即 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<2x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$，

$$k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z}),$$

$\therefore$ 函数的定义域为$\{x\mid k\pi-\frac{\pi}{4}<x<k\pi+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3）$\because \begin{cases}\frac{x+1}{x-1}\leqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+1)(x-1)\leqslant 0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<1$，

$\therefore$ 函数的定义域为$[-1,1)$.

4）$\because \begin{cases}x^2-x-6\geqslant 0,\\ \left|\frac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-3)(x+2)\geqslant 0,\\ -7\leqslant 2x-1\leqslant 7,\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3,\\ -6\leqslant 2x\leqslant 8,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant -2 \text{ 或 } x\geqslant 3,\\ -3\leqslant x\leqslant 4,\end{cases}$

$\Rightarrow -3\leqslant x\leqslant -2$ 或 $3\leqslant x\leqslant 4$，

$\therefore$ 函数的定义域为$[-3,-2]\cup[3,4]$.

5）函数的定义域为$[1,3]$.

6）函数的定义域为 $\mathbb{R}$.

2. 函数 $y=\frac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$的定义域为（　　）.

A. $\{x\mid x>0\}$　　B. $\{x\mid x<0 \text{ 且 } x\neq -1\}$

C. $\{x\mid x<0\}$　　D. $\{x\mid x\neq 0 \text{ 且 } x\neq -1\}$

答 $\underline{B}$　因为$\begin{cases}x+1\neq 0,\\ |x|-x>0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq -1,\\ x<0.\end{cases}$

3. 函数 $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$的值域是（　　）.

A. $(-1,1]$　B. $[-1,1]$　C. $[-1,1)$　D. $[0,1]$

答 $\underline{A}$　$\because y=\frac{1-x^2}{1+x^2}=\frac{2}{1+x^2}-1$，又 $1\leqslant 1+x^2<+\infty\Rightarrow 0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1\Rightarrow 0<\frac{2}{1+x^2}\leqslant 2$，$\therefore -1<y\leqslant 1$.

4. 下列函数对中，函数相同的是（　　）.

A. $f(x)=\frac{x}{x}$，$g(x)=1$

B. $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$，$g(x)=1$

C. $f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

D. $f(x)=x$，$g(x)=|x|$

答 B 因为两函数相同，必须定义域相同，对应法则也相同. 本题中 A,C 两组定义域不同，故不是同一函数；D 对应法则不同，比如：$f(-1)=-1$，$g(-1)=1$. 故选 B.

5. 求函数 $y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4, \\ 2^x, & 4<x<+\infty \end{cases}$ 的反函数.

解 ∵ 在 $-\infty<x<1$ 的反函数为 $x=y$ $(-\infty<y<1)$，

在 $1\leqslant x\leqslant 4$ 的反函数为 $x=\sqrt{y}$ $(1\leqslant y\leqslant 16)$，

在 $4<x<+\infty$ 的反函数为 $x=\log_2 y$ $(16<y<+\infty)$，

$$\therefore \text{反函数为 } y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16, \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty. \end{cases}$$

6. 求下列函数的反函数：

1) $y=\sqrt[3]{x+1}$；　　2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$；

3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq 0)$，并问当 a,b,c,d 满足什么条件时，反函数与直接函数相同.

解 1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x=y^3-1$，故所求反函数为

$$y=x^3-1.$$

2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解出 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，故所求反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解出 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$，故所求反函数为

$$y=\frac{b-dx}{cx-a}\quad \left(x\neq \frac{a}{c}\right).$$

又令 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{b-dx}{cx-a}$，得 $(ac+cd)x^2+(d^2-a^2)x-(ab+bd)=0$，

$$\Rightarrow \begin{cases} ac+cd=0, \\ d^2-a^2=0, \\ ab+bd=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c(a+d)=0, \\ (a+d)(a-d)=0, \\ b(a+d)=0. \end{cases}$$

① 当 $a+d=0$ 时，上述 3 个方程都满足.

② 当 $a+d\neq 0$ 时，则可得 $b=c=0$，$a=d\neq 0$. 因此，反函数与直接函数是同一函数的条件是 $a+d=0$ 或 $b=c=0$，$a=d\neq 0$.

7. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$.

解 由于 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，故 $x\neq 1$.

$$f[f(x)]=\frac{1}{1-f(x)} \quad (\text{此时又要求 } f(x)\neq 1\text{，即 } x\neq 0)$$

$$=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x} \quad (x\neq 0,1).$$

8. 1) 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$ __________.

2) 设 $\varphi(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leqslant \dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 则

$$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)+\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)\varphi(0)+\varphi(-2)= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

3) 设 $g(x)=x^2$，则 $g(x+\Delta x)-g(x)=$ __________.

4) 设 $\Delta x\neq 0$ 且 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则

$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

5) $f(x)=\begin{cases}5, & x<2,\\ 3, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$ 且 $a>0$，则 $\dfrac{f(2+a)}{f(2-a)}=$ __________.

答 1) $\underline{\dfrac{1}{1-x}}$ 因为 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}-1}=\dfrac{1}{1-x}$.

2) $\underline{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}}$ 因为 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(0)=\cos 0=1$，$\varphi(-2)=0$.

3) $\underline{2x\Delta x+(\Delta x)^2}$

4) $\underline{\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}}$