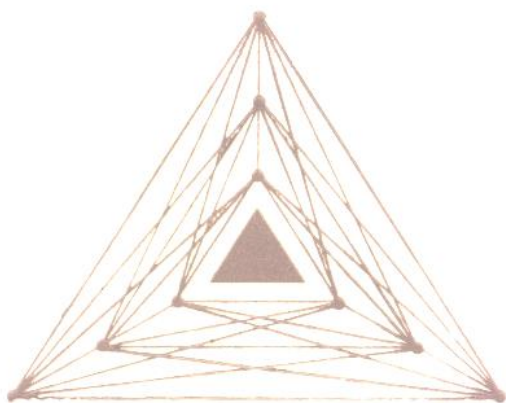


# 计算机和难解性

## NP 完全性理论导引

〔美〕 M. R. 加里 D. S. 约翰逊 著



科学出版社

# 计算机和难解性

NP 完全性理论导引

〔美〕 M. R. 加里 D. S. 约翰逊 著

张立昂 沈 泓 毕源章 译

吴允曾 校

科学出版社

1990

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了 NP 完全性理论的概念和方法。全书共分七章和两个附录。第一章粗略地介绍计算复杂性的一些基本概念和 NP 完全性理论的意义。第二章至第五章介绍 NP 完全性的基本理论和证明方法。第六章集中研究 NP 难问题的近似算法。第七章概述了大量计算复杂性中有关的理论课题。附录 A 收集了范围广泛、内容丰富的 NP 完全问题和 NP 难的问题。附录 B 补充了 NP 问题的一些最新进展,既有理论方面的,又有关于具体问题的。

本书可作为有关专业大学生和研究生的教材,也可供从事算法设计、计算复杂性、运筹学以及组合数学的理论研究人员和实际工作人员参考。

Michael R. Garey David S. Johnson

### COMPUTERS AND INTRACTABILITY

*A Guide to the Theory of NP-Completeness*

W. H. Freeman and Company, 1979

## 计 算 机 和 难 解 性

### NP 完全性理论导引

[美] M. R. 加里 D. S. 约翰逊 著

张立昂 沈 泓 毕源章 译

吴允曾 校

责任编辑 刘晓融

科 学 出 版 社 出 版

〔北京东黄城根北街 16 号〕

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1987 年 1 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1990 年 7 月第二次印刷 印张: 19 3/8

印数: 2 901—3 500 字数: 439,000

ISBN 7-03-001679-3/TP·126

定 价: 19.30 元

## 译 者 的 话

S. A. Cook 在他的著名论文“定理证明过程的复杂性”[Cook, 1971a] 中成功地证明了第一个 NP 完全问题,从而为 NP 完全性理论奠定了基础,给计算复杂性理论开辟了一个新的领域。自那时起,十多年来 NP 完全性理论一直是数学和理论计算机科学工作者研究的重要领域之一,已经成为计算复杂性理论的十分重要的组成部分。P 与 NP 的问题已被公认为数学和理论计算机科学中至今尚未解决的最重要的问题之一。由于这一卓越的成就, Cook 荣获了 1982 年度的图灵奖,这是当今世界上对计算机科学家的最高荣誉奖赏。

由 M. R. 加里 (M.R. Garey) 和 D. S. 约翰逊 (D. S. Johnson) 合著的《计算机和难解性——NP 完全性理论导引》一书,系统地总结了 NP 完全性理论,并在附录中收集了大量的 NP 完全问题。它不但是学习、研究 NP 完全性理论的一本好教材,而且是计算机理论研究人员和算法设计人员不可多得的关于 NP 完全问题的好资料。后来, D. S. 约翰逊在“*Journal of Algorithms*”上从 1981 年第四期起又开辟了“NP 完全性专栏:进展介绍”,介绍 NP 完全性理论的新成果。实际上,这个专栏是他们合著的这本书的继续。因此,我们翻译了该书并收集了专栏的前九期作为本书的附录。为了使这个译本保持形式上的统一,我们把原书的附录作为附录 A,把这九期专栏作为附录 B,为每期添了标题,并作了少量的文字删改工作。专栏的第十期 (*J. Algorithms* 5, pp. 147—160, 1984) 是对前九期的内容进行更新和改正。凡有

改正的地方，我们均按改正的内容翻译。原书的参考文献和作者索引放在附录 A 的后面，专栏的每一期都有自己的参考文献，仍附在各自的后面。该专栏至今连载不断，有兴趣的读者请继续往下查阅。

参加本书翻译工作的有：张立昂（正文及附录 D4 至 B9），沈泓（附录 A），毕源章（附录 B1 至 B3）。吴允曾教授校订正文及附录 B，张立昂、陈沐天校订附录 A。由于译者水平所限，错误在所难免。恳请读者批评指正。

译 者

1984 年 12 月

## 序 言

很少有几个术语能像“NP 完全”那样迅速地为大家所知道。自从这个词在七十年代初问世以来，在很短的时间内已经成为固有难解性深渊的象征。当算法设计人员试图解决比较大且比较复杂的问题时，愈来愈面临着这样的深渊。现在已经知道经常碰到的数学、计算机科学以及运筹学中的很多问题都是 NP 完全的，而且这类问题几乎每天不断地增加着。的确，NP 完全问题分布得非常广泛，使得与这些领域的计算方面有关的人都必须熟悉这个概念的意义和蕴涵。

我们计划把这本书写成 NP 完全性理论的详细指南，着重介绍把这个理论应用于实际问题最有力的那些概念和方法。本书可看成由三部分组成。

第一部分从第一章到第五章，它包括 NP 完全性的全部基本理论。第一章相对说来比较粗浅地介绍一些计算复杂性的主要概念，并且讨论 NP 完全性在这方面的意义。第二章至第五章为透彻地理解和应用这个理论提供所必需的详细定义和证明方法。

第二部分是第六章和第七章，它对两个可能的进一步研究方向作一般性的评介。第六章集中研究 NP 完全问题的有效“近似”算法，我们已经看到这个领域内的发展与 NP 完全性理论的相互影响。第七章概述计算复杂性中的大量理论课题，其中许多是关于 NP 完全性的早期工作的结果。我们只打算把这两章（特别是第七章）作为这些领域的简单介绍，其目的是使任何希望更详细地研究具体课题的读者能够通过查

阅引证的参考资料从事这方面的工作。

本书的第三部分,即最后一部分,是附录。它是一份非常广泛、非常丰富的 NP 完全问题和 NP 难问题的汇编(总共有 300 多条和几倍于这个数字的结果)。条文的注释讨论所述问题的子问题和各种变形的复杂性。

本书适合作为算法设计、计算复杂性、运筹学以及组合数学等课程的补充教材,也可以作为研究生或大学高年级学生近似算法、计算复杂性讨论班的起点。D. S. Johnson 曾用初稿作为研究生近似算法讨论班的基本教材,大约用五周的时间讲完了第一章至第五章,然后讨论第六章中的课题,并补充许多参考文献中的材料。计算复杂性讨论班可以类似地进行,只需要用第七章代替第六章作为研究这方面文献的入门。当然,在联合的讨论班上同时研究这两章也是可能的。

更一般地,本书既可以作为任何有兴趣学习 NP 完全性理论的人的自学教材,又可以作为与算法及其复杂性有关的理论研究者 and 实际工作者的参考书。任何熟悉 NP 完全性的主要概念的人,即使不读这本书的主要章节,也能够使用附录中的 NP 完全问题汇编。对于初学者来说,只要略读第一章到第五章就能够熟悉这些概念。他可以先专心于非形式地讨论定义和方法,只是当需要进一步澄清时才去阅读那些更形式化的材料。为了便于那些把本书作为参考资料的人,我们在名词及问题索引中列入了大量的术语,并且在广博详尽的参考文献和作者索引中给出了在正文中提及的每一篇文献的章节号码。

我们感谢在写这本书的过程中帮助过我们的朋友们。Hal Gabow, Larry Landweber 和 Bob Tarjan 以这本书的初稿进行了讲授,并根据他们的经验向我们提供了有价值的建议。下述诸位阅读了本书初稿的全部或部分,并作了建设性的评

论: Al Aho, Shimon Even, Ron Graham, Harry Hunt, Victor Klee, Albert Meyer, Christos Papadimitriou, Henry Pollak, Sartaj Sahni, Ravi Sethi, Larry Stockmeyer 以及 Jeff Ullman. 许多学者——要想在这里提及他们实在太多了,但可以去查参考文献与作者索引——对我们需要 NP 完全性结果的要求作出了积极的反应,并为使我们的 NP 完全问题汇编能像现在这样广泛丰富出了力。我们在贝尔实验室的几位同事,尤其是 Brian Kernighan 给了我们非常宝贵的帮助,为我们提供了 UNIX® 系统进行计算机排字。最后,还要特别感谢 Jeanette Reinbold,她把我们的手稿准确无误地输入排字系统,大大地减轻了这本书的书写工作。

M. R. 加里

D. S. 约翰逊

1978 年 10 月于新泽西州莫瑞山



# 目 录

译者的话

序言

|                   |    |
|-------------------|----|
| 第一章 计算机、复杂性和难解性   | 1  |
| 1.1 引言            | 1  |
| 1.2 问题、算法和复杂性     | 4  |
| 1.3 多项式时间算法和难解问题  | 7  |
| 1.4 可证的难解问题       | 12 |
| 1.5 NP 完全问题       | 14 |
| 1.6 全书概貌          | 16 |
| 第二章 NP 完全性理论      | 19 |
| 2.1 判定问题、语言和编码方案  | 19 |
| 2.2 确定型图灵机和 P 类   | 26 |
| 2.3 非确定型计算和 NP 类  | 31 |
| 2.4 P 与 NP 的关系    | 37 |
| 2.5 多项式变换和 NP 完全性 | 39 |
| 2.6 Cook 定理       | 45 |
| 第三章 NP 完全性证明      | 53 |
| 3.1 六个基本的 NP 完全问题 | 53 |
| 3.1.1 三元可满足性      | 56 |
| 3.1.2 三维匹配        | 59 |
| 3.1.3 顶点覆盖和团      | 64 |
| 3.1.4 哈密顿回路       | 67 |
| 3.1.5 划分          | 72 |
| 3.2 NP 完全性的证明方法   | 75 |
| 3.2.1 限制法         | 76 |

|       |                         |     |
|-------|-------------------------|-----|
| 3.2.2 | 局部替换法 .....             | 80  |
| 3.2.3 | 分量设计法 .....             | 88  |
| 3.3   | 练习 .....                | 91  |
| 第四章   | 用 NP 完全性分析问题 .....      | 95  |
| 4.1   | 分析子问题 .....             | 98  |
| 4.2   | 数字问题和强 NP 完全性 .....     | 111 |
| 4.2.1 | 几个附加定义 .....            | 113 |
| 4.2.2 | 强 NP 完全性证明 .....        | 118 |
| 4.3   | 把时间复杂性表成自然参数的函数形式 ..... | 131 |
| 第五章   | NP 难度 .....             | 134 |
| 5.1   | 图灵可归约性和 NP 难的问题 .....   | 134 |
| 5.2   | 术语的历史 .....             | 145 |
| 第六章   | 处理 NP 完全问题 .....        | 150 |
| 6.1   | 近似算法的性能保证 .....         | 152 |
| 6.2   | 把 NP 完全性应用于近似问题 .....   | 170 |
| 6.3   | 性能保证和“在实践中”的执行情况 .....  | 184 |
| 第七章   | NP 完全性之外的问题 .....       | 187 |
| 7.1   | NP 的结构 .....            | 187 |
| 7.2   | 多项式谱系 .....             | 196 |
| 7.3   | 计数问题的复杂性 .....          | 205 |
| 7.4   | 多项式空间完全性 .....          | 208 |
| 7.5   | 对数空间 .....              | 218 |
| 7.6   | 难解性证明和 P 与 NP .....     | 224 |
| 附录 A  | NP 完全问题汇编 .....         | 231 |
| A1    | 图论 .....                | 234 |
| A1.1  | 覆盖和划分 .....             | 234 |
| A1.2  | 子图和超图 .....             | 242 |
| A1.3  | 顶点排序 .....              | 250 |
| A1.4  | 同构及其它 .....             | 254 |
| A1.5  | 杂类 .....                | 256 |

|            |                   |            |
|------------|-------------------|------------|
| <b>A2</b>  | <b>网络设计</b>       | <b>261</b> |
| A2.1       | 生成树               | 261        |
| A2.2       | 切割与连通性            | 267        |
| A2.3       | 确定路线问题            | 271        |
| A2.4       | 流问题               | 275        |
| A2.5       | 杂类                | 282        |
| <b>A3</b>  | <b>集合与划分</b>      | <b>286</b> |
| A3.1       | 覆盖、击中(HITTING)及分裂 | 286        |
| A3.2       | 加权集的问题            | 290        |
| <b>A4</b>  | <b>存贮与检索</b>      | <b>294</b> |
| A4.1       | 数据存贮              | 294        |
| A4.2       | 紧缩与表示             | 298        |
| A4.3       | 数据库问题             | 303        |
| <b>A5</b>  | <b>排序与调度</b>      | <b>311</b> |
| A5.1       | 单处理机排序            | 311        |
| A5.2       | 多处理机调度            | 316        |
| A5.3       | 作业调度              | 320        |
| A5.4       | 杂类                | 324        |
| <b>A6</b>  | <b>数学规划</b>       | <b>326</b> |
| <b>A7</b>  | <b>代数与数论</b>      | <b>332</b> |
| A7.1       | 可除性问题             | 332        |
| A7.2       | 方程的可解性            | 335        |
| A7.3       | 杂类                | 338        |
| <b>A8</b>  | <b>游戏与玩具</b>      | <b>340</b> |
| <b>A9</b>  | <b>逻辑</b>         | <b>348</b> |
| A9.1       | 命题逻辑              | 348        |
| A9.2       | 杂类                | 353        |
| <b>A10</b> | <b>自动机与语言</b>     | <b>357</b> |
| A10.1      | 自动机理论             | 357        |
| A10.2      | 形式语言              | 362        |
| <b>A11</b> | <b>程序优化</b>       | <b>369</b> |

|                 |                               |     |
|-----------------|-------------------------------|-----|
| A11.1           | 代码生成 .....                    | 369 |
| A11.2           | 程序和图式 .....                   | 374 |
| A12             | 杂类 .....                      | 380 |
| A13             | 悬而未决的问题 .....                 | 390 |
| 参考文献与作者索引 ..... |                               | 397 |
| 附录 B            | NP 完全性专栏: 进展介绍 .....          | 434 |
| B1              | 附录 A 中“悬而未决的问题”的进展 .....      | 435 |
|                 | 参考文献 .....                    | 445 |
| B2              | 嵌入问题 .....                    | 448 |
|                 | 参考文献 .....                    | 460 |
| B3              | 划分、覆盖和填装 .....                | 461 |
|                 | B3.1 引言 .....                 | 461 |
|                 | B3.2 划分、覆盖和填装问题 .....         | 462 |
|                 | B3.3 最近结果 .....               | 474 |
|                 | 参考文献 .....                    | 476 |
| B4              | 装箱问题和排序问题 .....               | 478 |
|                 | B4.1 引言 .....                 | 478 |
|                 | B4.2 (几乎总是) $P \neq NP$ ..... | 478 |
|                 | B4.3 装箱问题与椭球算法 .....          | 480 |
|                 | B4.4 排序和排列问题 .....            | 484 |
|                 | 参考文献 .....                    | 491 |
| B5              | 路线问题 .....                    | 493 |
|                 | B5.1 引言 .....                 | 493 |
|                 | B5.2 图的路线问题 .....             | 493 |
|                 | B5.3 平面上点的互连 .....            | 497 |
|                 | 参考文献 .....                    | 507 |
| B6              | 密码问题、线性规划问题及其它 .....          | 509 |
|                 | B6.1 引言 .....                 | 509 |
|                 | B6.2 裂化的背包 .....              | 510 |
|                 | B6.3 关于线性规划的新方法 .....         | 514 |
|                 | B6.4 简要汇编 .....               | 514 |

|    |                            |     |
|----|----------------------------|-----|
|    | 参考文献 .....                 | 524 |
| B7 | 并行计算(一) .....              | 527 |
|    | B7.1 引言 .....              | 527 |
|    | B7.2 以硬设备换取时间 .....        | 527 |
|    | B7.3 并行处理机的调度 .....        | 533 |
|    | B7.4 调度问题的目录辅助 .....       | 538 |
|    | 参考文献 .....                 | 542 |
| B8 | 并行计算(二) .....              | 545 |
|    | B8.1 引言 .....              | 545 |
|    | B8.2 带着死锁操作 .....          | 546 |
|    | B8.3 数据库的并发性 .....         | 552 |
|    | 参考文献 .....                 | 562 |
| B9 | 游戏与玩具 .....                | 564 |
|    | B9.1 引言 .....              | 564 |
|    | B9.2 玩具的进展 .....           | 565 |
|    | B9.3 人们不玩的游戏 .....         | 570 |
|    | B9.4 带偶然的和其它不确定因素的游戏 ..... | 575 |
|    | 参考文献 .....                 | 580 |
|    | 名词及问题索引 .....              | 582 |

# 第一章 计算机、复杂性和难解性

## 1.1 引言

本书的内容最好是通过下述有些异想天开的例子来引入。

假如你和作者一样在一家工业公司工作。一天老板把你叫到他的办公室里告诉你公司即将进入高度竞争的“班德斯耐奇”<sup>1)</sup>市场。因此需要有一个好的方法来确定一个新的班德斯耐奇元件是否能够符合任意给定的一组规格。如果能够，则做出符合这些规格的设计。因为你是公司的算法总设计师，所以你的任务是寻找解决这个问题的有效算法。

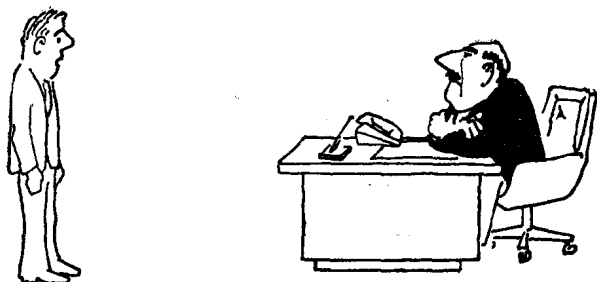
在向班德斯耐奇门市部搞清了这个问题之后，你急忙回到自己的办公室，找出了参考书，然后以极大的热情投入这项工作。几周以后办公室里堆满了一大堆揉成团的草稿纸，你的热情也大大地减少了。到现在为止，你还不能提出任何在实质上比搜索所有可能的设计方案更好的算法。这尤其不能使你得到老板的欢心，因为这种算法对于一组规格就要若干年的计算时间，而班德斯耐奇门市部已经有13种元件落后于原订计划。你确实不想回到老板的办公室并向他报告说：

“我不能找到一个有效的算法，我想我是太笨了。”（见下页上图。）

如果你想不严重损害你在公司里的地位，最好能够证明班德斯耐奇问题是固有难解的，没有一个算法能够快速地解

---

1) bundersnath，一种想象中的猛兽，意指一种想象中的装置。——译者注



决它。于是你可以大胆地跨进老板的办公室声称：



“我不能找到一个有效的算法，因为这样的算法是不可能的！”

遗憾的是证明固有难解性可能与寻找有效算法一样困难。甚至最好的理论家在试图对经常遇到的困难问题给出这样的证明时也会处于困境。但是在读了这本书之后你将发现一件大概是很好的事情。NP 完全性理论提供了许多简单的方法用来证明一个给定问题与大量的其他问题“一样的难”，而这些问题普遍地被认为是很困难的，专家们经过多年努力也没有解决。如果你掌握了这些方法就能够证明班德斯耐奇问题是 NP 完全的，因而它等价于所有这些困难的问题。于是你可以走进老板的办公室宣称：



“我不能找到一个有效的算法，但是所有这些名人也都没有能够找到。”

至少这将告诉你的老板最好不要开除你而去雇用其他的算法专家。

当然，如果写这本书的唯一目的是保护算法设计人员的利益，我们自己的老板是不会赞成的。其实，发现一个问题是 NP 完全的通常只是研究这个问题的开始。班德斯耐奇门市部的需要不会在一个晚上就消失掉，仅仅因为已经知道他们的问题是 NP 完全的。然而，知道它是 NP 完全的就给我们提供了有价值的信息，告诉我们采用什么样的途径可以是最富有成效的。一定不要去优先寻找有效的、精确的算法。现在比较适当的途径是集中精力致力于其他较低目标的方法。例如，你可以寻找解决这个问题的各种特殊情况的有效算法。寻找在大多数情况下看来能快速运算的算法，虽然不能保证它在任何情况下都能快速地运算。或者你甚至可以放松问题的某些方面，寻找一个只能给出满足大部分元件规格的设计的快速算法。简言之，NP 完全性理论的初步应用是帮助算



法设计人员找到最有可能得到有用的算法的努力方向。

在这本 NP 完全性“导引”的第一章中,我们介绍许多基本概念,讨论应用这些概念的可能性(并提出某些告诫)以及略述这本书其余部分的概貌。

## 1.2 问题、算法和复杂性

为了详细说明“固有难解的”问题和问题具有“等价的”难度意味着什么,我们首先就几个最基本的术语的含义取得一致意见是很重要的。

让我们从“问题”这一概念开始。就我们来说,问题是需要回答的一般性提问,通常含有若干个参数,或自由变量,这些自由变量的值还没有给定。问题的描述是通过给定:(1)所有参数的一般性描述,(2)陈述答案或解必须满足的性质。给问题的所有参数指定了具体的值,就得到问题的一个实例。

例如,考虑经典的“巡回售货员问题”。这个问题的参数由有穷的“城市”集合  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ , 以及  $C$  中每两个城市  $c_i, c_j$  之间的“距离”  $d(c_i, c_j)$  组成。解是这些城市的一个排列次序  $\langle c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(m)} \rangle$  使得

$$\left[ \sum_{i=1}^{m-1} d(c_{\pi(i)}, c_{\pi(i+1)}) \right] + d(c_{\pi(m)}, c_{\pi(1)})$$

最小。这个表达式给出从  $c_{\pi(1)}$  出发,依次经过每一个城市,然后从最后一个城市  $c_{\pi(m)}$  直接回到  $c_{\pi(1)}$  的“旅行”长度。

如图 1.1 所示,取  $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ ,  $d(c_1, c_2) = 10$ ,  $d(c_1, c_3) = 5$ ,  $d(c_1, c_4) = 9$ ,  $d(c_2, c_3) = 6$ ,  $d(c_2, c_4) = 9$ ,  $d(c_3, c_4) = 3$ , 给出巡回售货员问题的一个实例。排列次序  $\langle c_1, c_2, c_4, c_3 \rangle$  是这个实例的解,相应的旅行路线长度为 27, 这是可能的最短旅行路线长度。