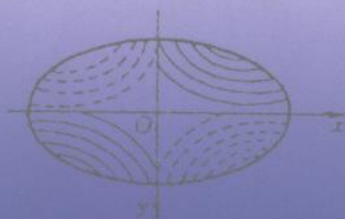
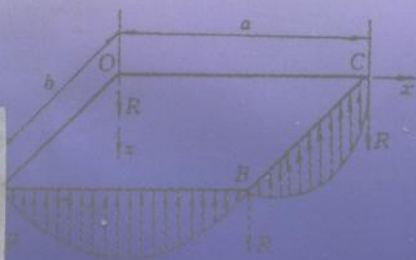


弹性力学

沃国纬 王元淳 编



上海交通大学出版社

上海交通大学“九五”重点教材

弹 性 力 学

沃国纬 王元淳 编

上海 交通 大学 出版 社

弹性力学
沃国纬 王元淳 编

上海交通大学出版社出版发行
上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030
电话 64281208 传真 64683798
全国新华书店经销
常熟市印刷二厂·印刷

开本: 850×1168(mm) 1/32 印张: 13.75 字数: 354 千字

版次: 1998 年 9 月 第 1 版

印次: 1998 年 9 月 第 1 次 印数: 1-1500

ISBN 7-313-02010-4/0·138

定价: 23.50 元

本书任何部分文字及图片, 如未获得本社书面同意,
不得用任何方式抄袭、节录或翻印。

(本书如有缺页、破损或装订错误, 请寄回本社更换)

DL67/15

内 容 提 要

本书系统地阐述了弹性力学的基本理论,研究弹性力学的基本方法以及解决工程实际问题方面的内容。全书共分 12 章,主要包括以下内容:平面问题、柱形杆的扭转和弯曲、弹性接触、薄板的弯曲、热应力、弹性波的传播、弹性力学的复变函数方法和变分方法等。

本书可作为高等院校工科各专业的弹性力学教材,同时也可供工程技术人员参考。

前 言

本书是在编者沃国纬 1984 年所写的“弹塑性力学”讲义的基础上,经增补和删减,为高等院校工科各专业“弹性力学”课程而编写的一本教学用书。

本书采用从特殊到一般的编写体系,内容叙述由浅入深、由易到难、循序渐进,即使学时数不多,读者仍能对弹性力学的基本理论和研究弹性力学的基本方法有比较完整的了解。根据编者多年来的教学实践,用这一体系组织教学,能收到较好的教学效果。

对于学时较少的课程,可删去一些章节,并不影响余下内容的衔接。本书编有较多的习题,通过做题可以加深对理论内容的理解。读者可以根据学时数的多少选做其中一部分习题。

在本书编写过程中,曾得到上海交通大学汤任基教授和金永杰教授的帮助。全书初稿完成后诚请汤任基教授全面审阅。在审稿中,他对本书提出了宝贵的修改意见,在此一并深表感谢。

全书共分 12 章,其中第 5、6、10 章由王元淳执笔,其

他各章由沃国纬执笔。

由于编写时间的仓促,限于编者的水平,书中难免有许多不足之处,恳望广大师生和读者批评指正。

编者

1998 年 2 月

目 录

第 1 章 绪论	1
§ 1-1 弹性力学的内容和研究方法	1
§ 1-2 弹性力学的基本假设	3
§ 1-3 规定的符号	5
第 2 章 平面问题的基本理论	8
§ 2-1 平面应力问题和平面应变问题	8
§ 2-2 平衡微分方程	10
§ 2-3 几何方程和刚体位移	12
§ 2-4 物理方程 虎克定律	18
§ 2-5 边界条件	21
§ 2-6 圣维南原理	27
§ 2-7 按应力求解平面问题	30
§ 2-8 平面问题的应力函数方法	33
§ 2-9 按位移求解平面问题	40
习题	42
第 3 章 平面问题的直角坐标解法	48
§ 3-1 多项式解法	48
§ 3-2 矩形梁的纯弯曲	50
§ 3-3 悬臂梁自由端受集中力	60
§ 3-4 用三角级数求解平面问题	67
习题	74
第 4 章 平面问题的极坐标解法	80
§ 4-1 极坐标表示的基本方程	80
§ 4-2 应力分量的坐标变换式	87
§ 4-3 轴对称应力问题	88

§ 4-4	厚壁圆筒	93
§ 4-5	小圆孔引起的应力集中	100
§ 4-6	圆弧曲梁的纯弯曲	106
§ 4-7	楔形体问题	112
§ 4-8	半无限平面体在边界上受法向力	119
§ 4-9	非均匀半无限平面体问题	124
§ 4-10	旋转圆盘	132
	习题	137
第 5 章	平面问题的复变函数解法	144
§ 5-1	应力函数的复变函数表示	144
§ 5-2	应力和位移的复变函数表示	145
§ 5-3	边界条件的复变函数表示	147
§ 5-4	极坐标中应力和位移的复变函数表示	149
§ 5-5	保角变换和曲线坐标	150
§ 5-6	多连体中应力和位移的单值条件	152
§ 5-7	无限大多连体的情形	154
§ 5-8	具有单孔的无限大弹性体的复变函数解法	157
§ 5-9	椭圆孔口	160
§ 5-10	裂纹尖端附近的应力集中	163
	习题	166
第 6 章	平面热应力问题	168
§ 6-1	平面热传导问题的微分方程	168
§ 6-2	平面热弹性力学的基本方程	171
§ 6-3	热弹性位移势函数	174
§ 6-4	圆环和圆筒的轴对称热应力	178
	习题	182
第 7 章	空间问题的基本理论	184
§ 7-1	平衡微分方程	184
§ 7-2	物体内任一点的应力状态	186

§ 7-3	主应力 应力状态不变量	189
§ 7-4	应力张量及其分解	194
§ 7-5	几何方程式	196
§ 7-6	一点的应变状态	200
§ 7-7	应变张量及其分解	204
§ 7-8	应力与应变关系	207
§ 7-9	各向同性体的广义虎克定律	219
§ 7-10	球对称问题的基本方程	223
§ 7-11	按应力求解空间问题	226
§ 7-12	解的唯一性定理	229
习题		232
第 8 章 柱体的扭转与弯曲		237
§ 8-1	等截面直杆的扭转	237
§ 8-2	椭圆截面杆的扭转	243
§ 8-3	薄膜比拟	249
§ 8-4	矩形截面杆的扭转	254
§ 8-5	薄壁杆件的扭转	259
§ 8-6	等截面直杆的弯曲	263
习题		270
第 9 章 空间轴对称与弹性接触问题		274
§ 9-1	空间轴对称问题的基本方程	274
§ 9-2	半空间体受重力及均布压力	279
§ 9-3	半空间体在边界上受法向集中力	283
§ 9-4	半空间体在边界上圆形区域内受法向分布力	286
§ 9-5	两弹性体之间的接触问题	291
习题		302
第 10 章 弹性波的传播		305
§ 10-1	弹性体的运动微分方程	305
§ 10-2	弹性体中的无旋波与等容波	306

§ 10-3	平面波的传播	308
§ 10-4	表层波的传播	311
§ 10-5	球面波的传播	314
	习题	316
第 11 章	能量原理与变分法	317
§ 11-1	泛函和变分的概念	317
§ 11-2	弹性体的应变势能	319
§ 11-3	虚位移原理与最小势能原理	321
§ 11-4	位移变分法	333
§ 11-5	位移变分法应用于杆件	336
§ 11-6	位移变分法应用于平面问题	343
§ 11-7	虚应力原理与最小余能原理	349
§ 11-8	应力变分法	355
§ 11-9	应力变分法应用于平面问题	358
§ 11-10	应力变分法应用于柱体的扭转	361
	习题	365
第 12 章	薄板的弯曲	370
§ 12-1	基本概念和假设	370
§ 12-2	弹性曲面的微分方程	373
§ 12-3	边界条件	382
§ 12-4	四边简支矩形板	388
§ 12-5	简支边矩形薄板的纳维叶解法	393
§ 12-6	矩形薄板的李维解法	398
§ 12-7	用变分法解薄板弯曲问题	403
§ 12-8	薄板基本方程的极坐标表达式	409
§ 12-9	圆形薄板的轴对称弯曲	411
§ 12-10	在静水压力作用下圆薄板的弯曲	419
	习题	424
	主要参考文献	429

第 1 章 绪 论

§ 1-1 弹性力学的内容和研究方法

弹性力学是可变形固体力学的一个分支学科,是研究物体在外力作用下和温度变化时所引起的应力和变形,以及由变形所产生的位移的一门学科。物体在外力作用下要产生变形,从变形开始到破坏一般总要经历弹性变形和塑性变形两个阶段。当作用在物体上的外力取消后,物体内部可以恢复的变形称为弹性变形,不能恢复的变形称为永久变形或塑性变形。弹性力学所研究的是物体在弹性变形阶段的力学问题。

弹性力学不但能解决材料力学和结构力学中的问题,而且能解决它们所不能解决的问题,其研究范围更为广泛,方法更加精确。

材料力学的研究对象主要是杆件,就是对杆件也不能全面研究。例如,对杆内小孔的孔边应力集中问题、非圆截面杆的扭转问题等,材料力学就不能研究,而需直接引用弹性力学的结论。弹性力学的研究对象,除杆件以外,还包括板、壳以及实体(例如滚珠)等。

虽然在弹性力学和材料力学里都可以研究杆件,然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆件,除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析外,一般还要对杆件的应变或应力分布作一些假设,这就大大简化了数学运算,因此,得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆件,一般都不必引用那些假设,因而得出的结果就比较精确,并可用来校核材料力学的近似程度。

例如,在材料力学中研究梁的弯曲时,引用了平面截面假设,即变形前的平面截面在变形后仍保持为平面,因而正应力沿梁高按照线性规律分布(图 1-1b)。进一步研究表明,只有当截面的尺

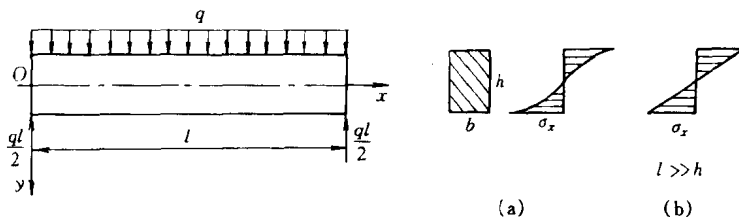


图 1-1

寸远小于梁的跨度时,以上假设才能适用。如果梁的高度并不远小于梁的跨度,那么,横截面上的正应力沿梁并不按线性规律分布,而是按曲线变化的,如图 1-1a 所示。在这种情况下材料力学给出的最大正应力值可能有较大的误差。

在弹性力学里就不作平面截面假设,而是从变形的连续性出发建立几何方程和变形协调条件,即变形前的连续物体,变形后仍保持连续,不发生重叠现象或出现裂纹情况。因此,在大多数的情况下,物体变形后为了保持连续性,原来的平面截面就不再保持为平面。

材料力学在研究构件的平衡时,是用假想截面从构件中切截出一个分离体来考虑,因而只能保证整体平衡,而不能保证构件各微小部分的平衡。例如图 1-2 所示的变截面杆,按照材料力学方法

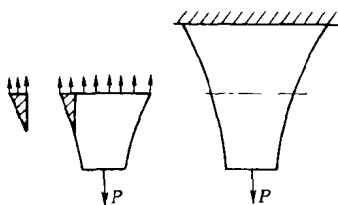


图 1-2

计算时,认为截面上应力是均匀分布的,而且在截面上无切应力作用。现如在侧面附近取出一微小单元体来考虑,那么用材料力学方法的计算结果就无法说明这单元体的平衡问题。弹性力学研究平衡是以构件内任一微小

单元体为对象,建立平衡微分方程,并同时建立微元体间的变形协调条件。这样的研究方法,反映了弹性体变形的普遍规律,所得的结果更符合实际情况。

弹性力学可分为数学弹性力学和实用弹性力学两个部分。前者只用精确的数学推演而不引用任何关于应变状态或应力分布的假定。本书绝大部分内容属于数学弹性力学范畴。在实用弹性力学里,和材料力学类同,也引用一些关于应变或应力分布的假设,以便简化繁复的数学推演,得出具有相当实用价值的近似解。本书中的薄板的弯曲章节就属于这种情况。

综上所述,可以看出弹性力学的基本任务是:

(1) 和材料力学、结构力学一起,综合地、不同层次地解决各类工程实际问题;

(2) 校核初等理论所得出公式的可靠性,精确性以及适用范围;

(3) 为后继课程提供基本方程和研究方法。

§ 1-2 弹性力学的基本假设

固体材料通常分为晶体和非晶体两种。晶体是由许多离子,原子或分子按一定规则排列起来的晶格构成的。普通固体,例如,金属材料低碳钢、黄铜、铝、铅等是由许多晶粒随机地组合起来的。它们中间常有一些缺陷存在。非晶体一般是由许多分子集合组成的高分子化合物。由此可见固体材料的微观结构是多样化的、复杂的。如果在研究工程结构的力学问题时,考虑固体材料的上述特征,并精确地考虑所有各方面的因素,必将带来数学上的极大困难,实际上使力学问题不可能建立方程求解。为了形成一种理论,一门学科,就必须作一些假设,使实际问题简化、抽象化,以便能建立方程,求得解答。下面引进一些假设:

(1) 假设物体是连续的 即假设物体整个体积内毫无空隙地

都充满着介质。这一假设显然与上述介质是由不连续的粒子所组成的观点相矛盾。但采用连续性假设,一方面可以避免数学上的困难,更重要的是根据这一假设所作的力学分析被广泛的实验与工程实践所证实。可用统计平均的观点把连续性假设与现代物质构造理论统一起来。从统计学的观点看,只要所讨论物体的尺寸足够大,物体的性质就与体积的大小无关。在力学分析中,从物体中取出的任一微小单元,在数学上是一个无穷小量,但却含有大量的晶粒,因而连续性假设实际上是合理的。

根据连续性假设,物体内的一些物理量,例如应力、应变、位移等,才可能是连续的,因而才可用坐标的连续函数来表示它们的变化规律,从而可运用数学工具进行力学分析。

弹性力学的理论基础是牛顿力学。连续性假设和牛顿力学定律相结合产生了连续介质力学。当确定了固体材料的物理关系以后,也就必然会得到弹性力学的基本方程;

(2) 假设物体是均匀的 即假设整个物体是由同一性能的材料所组成的。对于实际材料,其各组成部分存在着不同程度的差异。例如常见的金属材料,它是由晶粒和晶界物质组成的,它们的性能并不相同。但是,我们所研究的构件尺寸远大于晶粒和晶界物质的尺寸,例如 1cm^3 的钢材中含有几十万个晶粒。因此,从统计学的观点看,仍可将材料看成均匀的,认为构成物体的材料在其内部的每一点处,具有完全相同的力学性质,即各点的物理性质,如 E 、 ν (弹性模量、泊松比)等,不随坐标位置不同而改变。按此假设,可以认为从构件内任意一点处所截取的微小单元,都与构件具有完全相同的性质。同样,在构件内任一部位截取的试件所测得的材料力学性能,都可作为构件的力学性能;

(3) 假设物体是各向同性的 即认为材料沿各个方向的力学性能相同。生活中常见的玻璃即为各向同性材料。由木材和竹材做成的构件都不能当作各向同性体。工业中常用的各种金属材料,就其组成部分——晶粒来说,应属于各向异性体,但我们所研究的

构件包含着无数的、排列极不规则的晶粒。所以,从统计学的观点看,仍可将金属材料视为各向同性体。即认为其某一点沿各个方向的力学性质 E 、 ν 等都相同;

(4) 假设物体是完全弹性的 完全弹性意味着当引起物体变形的因素消除后,物体能恢复原状,而没有任何剩余的变形。完全弹性体的应力未超过比例极限时,应力与应变呈线性关系,即符合虎克定律。物体在任一瞬时的变形完全取决于这一瞬时所受的力,即力与变形一一对应。由材料力学已知,塑性材料的物体,在应力未达到屈服极限以前,是近似的完全弹性体;脆性材料的物体,在应力未超过比例极限以前,也是近似的完全弹性体;

(5) 小变形假设 即认为物体在外力作用下各点的位移都远小于其本身的几何尺寸,而应变和转角都远小于 1。这样,在建立物体变形以后的平衡方程时,就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的尺寸。此外,物体的变形和各点的位移表达式中二阶微量可以略去不计,从而使得几何变形线性化;

(6) 假设物体处于自然状态 即假设物体无初应力。不考虑物体在制造和加工过程(铸造、焊接、碾压、锻压等)中的初应力。

§ 1-3 规定的符号

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。这些概念,在材料力学和结构力学里已经用过,在一般的弹性力学教科书中,有着多种不同的符号系统,本节中只介绍一种常用的符号。

作用在物体的外力可以分为体积力和表面力,简称为体力和面力。所谓体力,就是分布在物体体积内的力,例如重力、惯性力、电磁力等。体力是矢量,它在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的投影 X, Y, Z 称为体力分量,以沿坐标轴正方向为正,反之为负。它们的因次是 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$ 。

所谓面力,是分布在物体表面上的力,例如流体压力、物体表面接触力等。面力也是矢量。它在坐标轴 Ox , Oy , Oz 上的投影 $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ 称为面力分量,以沿坐标轴正方向为正,反之为负。它们的因次是 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$ 。

应力及其分量的因次是 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$ 。在物体内部取出一个微小的平行六面体,它的棱边平行于坐标轴。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力,分别与三个坐标轴平行,如图 1-3 所

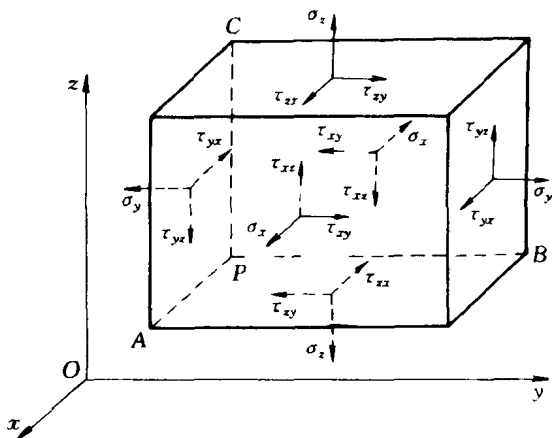


图 1-3

示。正应力用 σ_x , σ_y , σ_z 表示,脚标表示这个正应力的作用面和作用方向。例如,正应力 σ_x 是作用在垂直于 Ox 轴的面上,并沿着 Ox 轴的方向作用的。剪应力用 τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zy} , τ_{zx} , τ_{xz} 表示。剪应力前一个脚标表示作用面的外法线方向,后一个脚标表示剪应力作用方向沿着哪一个坐标轴。例如,剪应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 Ox 轴的面上而沿着 Oy 轴方向作用的。

如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向,这个截面就是一个正面。而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴反方向为负。相反,如果某一个截面上的外法线是沿

着坐标轴的反方向,这个截面就称为一个负面。而这个面上的应力分量就以沿坐标轴反方向为正,沿坐标轴正方向为负。图上所示的应力分量全都是正的。注意,上述正负号规定,对于正应力说来,和材料力学中的规定相同,拉为正,压为负;但对于剪应力说来,就和材料力学中的规定不完全相同。

所谓变形,就是形状的改变。物体的形状总可以用它各部分的长度和角度来表示。因此,物体的变形总可以归结为长度的改变和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的应变状态,在这一点沿着坐标轴 Ox , Oy , Oz 的正方向取三个微小线段 PA , PB , PC , 如图 1-4。物体变形后,各线段的每单位长度的伸缩,称为线应变,以 ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z 表示。 ϵ_x 表示 x 方向的线段 PA 的线应变,余类推。线应变以伸长为正,缩短为负。各线段之间的直角的改变,用弧度表示,称为剪应变,以 γ_{xy} , γ_{yx} , γ_{yz} , γ_{zy} , γ_{zx} , γ_{xz} 表示。 γ_{xy} 表示 x 和 y 两方向的线段(即 PA 与 PB)之间的直角的改变,余类推。剪应变以直角变小时为正,反之为负。线应变和剪应变都是无因次的数量。

所谓位移,就是位置的移动。物体内存任一点 P , 变形后移动到 P' 点(见图 1-4), P 点的位移,用它在 Ox , Oy , Oz 三轴上的投影 u , v , w 来表示,以沿坐标轴正方向的为正,反之为负。 u , v , w 称为该点的位移分量。位移及其分量的因次是[长度]。

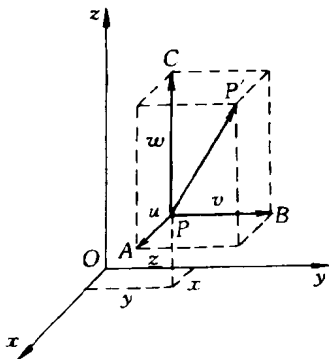


图 1-4

一般而言,物体内存任一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量,都是随着该点的位置而变动,因而都是位置坐标的函数。