考研数学

National Master's Mathematics Entrance Test

全面突破

（第二版）

华中理工大学数学系 主编

华中理工大学出版社

考研数学全面突破

（第二版）

华中理工大学数学系　主编

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学全面突破/华中理工大学数学系 主编. -2版

武汉:华中理工大学出版社,1998年5月

ISBN 7-5609-1580-9

Ⅰ. 考…

Ⅱ. 华…

Ⅲ. 数学-研究生-入学考试-参考资料

Ⅳ. O01

考研数学全面突破

华中理工大学数学系 主编

责任编辑:李立鹏 林化夷

*

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编:430074)

新华书店湖北发行所经销

武汉市科普教育印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:25.25 字数:572 000

1998年5月第2版 1998年5月第2次印刷

印数:3 001-9 000

ISBN 7-5609-1580-9/O·171

定价:29.50元

(本书如有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

内 容 简 介

本书是根据国家教委制订的《1998年全国工学、经济学硕士研究生入学考试大纲》,并结合历届数学考试大纲与试题的研究编写而成.

本书共分三篇:高等数学;线性代数;概率论与数理统计初步,并附有1998年全国攻读硕士研究生数学入学考试试题详析.本书每章的基本概念、基本理论与基本方法均有内容提要,并在每章都选取了大量的典型例题与习题(包括习题的答案与提示).本书对于准备报考硕士研究生的读者,是一本很好的考研辅导书与指导书;对于大学生学习数学,也是一本很重要的辅助教材.

前　言

本书根据国家教委制订的《1998 年全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学考试大纲》(以后简称 98 考纲)编写而成. 从 1997 年起数学考试大纲和以往历届的数学考试大纲比较,有明显的不同. 从总体上看,加强了数理统计部分,减轻了概率论部分,取消了复变函数部分. 当然,《98 考纲》的其他部分也有某些变动,这些都在本书中反映出来了.

本书的撰稿人,是几位具有数十年丰富教学经验并且迄今一直耕耘在教学第一线上的老教师,他们对于历届数学考试大纲与试题有充分的研究与积累,都尽可能的在本书中反映出来,以帮助读者们进行有效的复习.

本书在结构与写法上,力求简明扼要,去粗存精,学以致用;侧重解题分析,启发读者思考,培养读者解决问题的能力,举一反三.

本书由华中理工大学数学系主编. 分管教学的副主任林益(高等学校工科数学课程教学指导委员会委员)主持了编写和统稿工作. 王汉蓉副教授编写了“微分学”部分;李静瑶副教授编写了“积分学”部分;林益副教授编写了“解析几何”、“级数”与“常微分方程”部分;林升旭副教授编写了“线性代数”部分;刘次华副教授编写了“概率论与数理统计初步”部分;谢鹏副教授精心地绘制了全书的插图.

华中理工大学出版社的领导与责任编辑们对本书的诞生与完善,并及时出版起了关键性作用. 为此,谨向他们表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,加之本书出版工作时间紧迫,因此书中难免有不当或错误之处,恳请读者批评指正,以便再版时加以改进.

华中理工大学数学系
1997 年 8 月

目　　录

第一篇　高等数学

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计初步

第一篇　高等数学

第一章　一元函数的极限与连续

本章重点是掌握函数的极限概念，熟练地进行极限运算，运用极限进行无穷小的比较，函数连续性与间断点类型的判断.本章难点在于利用极限与连续函数的性质证明某些命题或函数的一些性质.

§1.1　函数

内 容 提 要

设 D 为某一实数的集合，若当变量 x 取 D 中一值时，变量 y 按一定的规则总有一个确定的数值与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，且记为 $y=f(x), x\in D$. D 称为**函数 $f(x)$ 的定义域**.而所有 y 值的集合 $\{y|y=f(x), x\in D\}$ 称为**函数 $f(x)$ 的值域**.

1.　函数的主要特性

有界性　设函数 $y=f(x)$ 在区域 D 内有定义，若存在正数 M，使得 $\forall x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 中是**有界函数**，否则称 $f(x)$ 是**无界**的.

奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 中有定义，若 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**，如果 $\forall x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

单调性　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall x_1, x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）则称 $f(x)$ 在区间 I 上是**严格单调增加**（或**减少**）的，特别，当 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$）时称 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加(减少)**的.

周期性　设 D 为 $f(x)$ 的定义域，若存在正数 $T>0$，使得 $\forall x\in D$，有 $x+T\in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为**周期**.一般周期函数的周期是 $\forall x\in D$ 使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T.

2.　复合函数

设 $y=f(u)$ 定义于 U，$u=\varphi(x)$ 定义于 D，如果 $\varphi(x)$ 的值域 $U_1\subset U$，则称 y 是 x 的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)], x\in D$.

3.　反函数

设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Y，如果 $\forall y\in Y$，在 D 中只有一个 x 满足 $f(x)=y$，令 x 对应这个 y，便得到由 $y=f(x)$ 定义的**反函数** $x=f^{-1}(y)$.特别，在区间上严格单调增(减)的函数必有反函数，且该反函数也是严格单调增(减)的.

4.　初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤得到的能用一个分析式表示的

函数称为初等函数.

例题分析

例 1 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

分析 用解析式表示的函数,其定义域为使解析式有意义的自变量取值范围.在求定义域时应考虑以下原则:(1)分母不为零;(2)对数的真数大于零;(3)被开偶次方的数非负;(4)某些三角函数或反三角函数的定义域的限制.本题是以两个解析式表示的函数,故函数定义域应是使这两个解析式有意义的公共部分.

解 所给函数应满足

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0;\\ \sin x>0.\end{cases}$$

解上述不等式得 $-4\leqslant x<-\pi$ 与 $0<x<\pi$,故函数定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

例 2 求 $y=\dfrac{1}{\sqrt{(\lg x)^3-\lg x^4}}$ 的定义域.

分析 因当 $(\lg x)^3-\lg x^4>0$ 时函数有定义,又由对数函数 $\lg x$ 的定义域知必须有 $x>0$,当 $x>0$ 时,此不等式可改写为

$$(\lg x)^3-4\lg x>0 \text{ 即 } [(\lg x)^2-4]\lg x>0,$$

或

$$(\lg x+2)(\lg x-2)\lg x>0.$$

解 根据上面分析可得四组不等式:

$$1)\begin{cases}\lg x+2>0;\\ \lg x-2<0;\lg x<0,\end{cases}\qquad 2)\begin{cases}\lg x+2>0;\\ \lg x-2>0;\lg x>0,\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}\lg x+2<0;\\ \lg x-2<0;\lg x>0,\end{cases}\qquad 4)\begin{cases}\lg x+2<0;\\ \lg x-2>0;\lg x<0.\end{cases}$$

这四组不等式只有(1),(2)两组有解,它们的解依次为 $1/100<x<1$ 和 $x>100$,故函数 y 的定义域为 $(1/100,1)\cup(100,+\infty)$.

例 3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域($a>0$).

解 由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 及 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 可得

当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,所求定义域为 $[a,1-a]$;当 $a>\dfrac{1}{2}$ 时,其定义域不存在.

函数符号的理解对于函数运算和进行理论研究起着极其重要的作用,下面例题侧重于函数记号运用方面的训练.

例 4 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & \text{当 } x<0;\\ 1, & \text{当 } x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

分析 求函数表达式的问题,关键在于正确理解和使用函数的记号,原题设函数是分段函数,按其定义可知 $f[f(x)]$ 也是分段函数.

解

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0;\\ 1, & f(x)>0.\end{cases}$$

而 $x<-1$ 时 $f(x)<0$,$x\geqslant -1$ 时 $f(x)\geqslant 0$,故

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1;\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

例5 设 $f(x)=x/(x-1)$,试验证 $f\{f[f(f(x))]\}=x$ 并求 $f(1/f(x))$ $(x\neq 0,x\neq 1)$.

分析 设 $f_1(x)=f(x)=x/(x-1),f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots;f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]$,现在只需证 $f_4(x)=x$.

证 因 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{1-1/x},\dfrac{1}{f(x)}=1-1/x$,

$$\therefore\ f_2(x)=f[f_1(x)]=f[f(x)]=\frac{1}{1-1/f(x)}=\frac{1}{1-(1-1/x)}=x,$$

$$f_3(x)=f[f_2(x)]=f(x)=x/(x-1)=1/(1-1/x);$$

$$f_4(x)=f[f_3(x)]=f[f(x)]=x.$$

下面再求 $f(1/f(x))$.因 $1/f(x)=1-1/x$ 故

$$f(1/f(x))=f(1-1/x)=\frac{1-\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}-1}=1-x\qquad(x\neq 0,x\neq 1).$$

例6(881)① 已知 $f(x)=e^{x^2},f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$并写出它的定义域.

分析 由 $f(x)=e^{x^2}$得 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}$,再按题意可知 $e^{\varphi^2(x)}=1-x$.
由此解出 $\varphi(x)$后再定出定义域.

解 因 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$,而 $\varphi(x)\geqslant 0$.故有

$$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}.$$

再由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,解出 $1-x\geqslant e^0=1$,亦即 $x\leqslant 0$ 为 $\varphi(x)$的定义域.

例7 设函数 $f(x)$满足关系式
$f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$,且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

分析 先由所给方程解出

$$f(\ln x)=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4x^2\ln x}}{2}=x(1\pm\sqrt{1-\ln x}).$$

再按题意与上式可知令 $x=1$ 时有 $f(0)=1\pm\sqrt{1-0}=0$,故应取

$$f(\ln x)=x(1-\sqrt{1-\ln x}).\tag{1}$$

解 为求 $f(x)$,可令 $\ln x=t$,从而 $x=e^t$,于是由(1)得,$f(t)=e^t(1-\sqrt{1-t})$.故所求函数为 $f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x})$.

例8(921) 填空题 设函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\0,|x|>1,\end{cases}$则函数 $f[f(x)]=$________.

分析 由已知条件知 $\forall x$,总有 $|f(x)|\leqslant 1,x\in(-\infty,+\infty)$,现将 $f(x)$视作 $f[f(x)]$的自变量时,自然有 $f[f(x)]=1$.

解 应填 1.

例9(923) 选择题 设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & ,x\leqslant 0;\\x^2+x,x>0,\end{cases}$则

① 括号中的“881”是指该题是1988年高等数学Ⅰ试题,下同.

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, x\leqslant 0;\\ -(x^2+x), x>0;\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), x<0;\\ -x^2, x\geqslant 0;\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, x\leqslant 0;\\ x^2-x, x>0;\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, x<0;\\ x^2, x\geqslant 0.\end{cases}$

分析　欲建立 $f(-x)$的表达式,应从 $-x\leqslant 0$ 与 $-x>0$ 入手进行讨论:

当 $-x\leqslant 0$ 即 $x\geqslant 0$ 时,$f(-x)=(-x)^2=x^2$;当 $-x>0$ 即 $x<0$ 时,$f(-x)=(-x)^2+(-x)=x^2-x$,故

$$f(-x)=\begin{cases}x^2, x\geqslant 0;\\ x^2-x, x<0.\end{cases}$$

解　应选择(D).

例 10　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是奇函数,$f(1)=a$,且对任何 x 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

1)试用 a 表示$f(2)$与 $f(5)$.2)a 取何值时,$f(x)$是以 2 为周期的周期函数.

分析　由题意知 $f(x)$为奇函数,且

$$f(x+2)-f(x)=f(2) \tag{1}$$

故当 $x=-1$ 时,由 $f(1)-f(-1)=f(2)$可得 $f(2)=2f(1)=2a$,继续利用已知关系式(1)便可求出 $f(2)$与 $f(5)$.

解　在(1)中令 $x=1$ 得 $f(3)-f(1)=f(2)$,故

$$f(3)=f(1)+f(2)=3a,$$

在(1)中令 $x=3$ 得 $f(5)-f(3)=f(2)$故

$$f(5)=f(3)+f(2)=5a.$$

又由 $f(2)=2a$ 知当且仅当$a=0$ 时 $f(2)=0$,此时 $f(x+2)=f(x)$.

故 $a=0$ 时 $f(x)$是以 2 为周期的周期函数.

§1.2　一元函数极限

内容提要

1.　数列极限

已知数列$\{x_n\}$和实数A,若$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当 $n>N$ 时有$|x_n-A|<\varepsilon$,则称 A 是数列$\{x_n\}$的**极限**或称当$n\to\infty$时$\{x_n\}$**收敛于**A,且记作$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

2.　函数极限

设 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义(在 x_0 处可以没有定义),A 为一常数.若$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称常数 A 是**$f(x)$在 x 趋于x_0 时的极限**,且记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

若上述定义中的不等式$0<|x-x_0|<\delta$ 换成$x_0<x<x_0+\delta$(或 $x_0-\delta<x<x_0$),则称 A 为**$f(x)$在 x_0 点的右极限**(或左极限)并记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A, f(x_0-0)=A).$$

若$\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当$|x|>X$ 时有$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称 A 为**$f(x)$在 x 趋于∞时的极**

限，且记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.如果当$x>X$(或$x<-X$)时$|f(x)-A|<\varepsilon$,则称$A$为$f(x)$当$x$**趋于$+\infty$(或$-\infty$)时的极限**,且记作$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(或$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$).

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在的**充要条件**是$f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$.

3. 无穷小与无穷大

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$,则称函数$f(x)$当$x\to x_0(x\to\infty)$时为**无穷大**.

特别,若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=+\infty(-\infty)$,则称$f(x)$当$x\to x_0$时$(x\to\infty)$为**正(负)无穷大**.

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$,则称函数$f(x)$当$x\to x_0(x\to\infty)$时为无穷小.

注意 所谓无穷小或无穷大都是针对自变量某一变化过程而言.

4. 无穷小的比较

设$\alpha(x),\beta(x),\alpha_1(x),\beta_1(x)$都是在$x$的同一变化过程中的无穷小量.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称当$x\to x_0$时$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小,且记为

$$\alpha(x)=o(\beta(x)).$$

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$,则称当$x\to x_0$时$\alpha(x)$是与$\beta(x)$同阶的无穷小,且记为

$$\alpha(x)=O(\beta(x)).$$

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称当$x\to x_0$时$\alpha(x)$是与$\beta(x)$等价的无穷小,且记为

$$\alpha(x)\sim\beta(x).$$

设$\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\beta(x)\sim\beta_1(x),(x\to x_0)$.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$存在,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也存在,且$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

注 上面各式中$x\to x_0$可改换为$x\to\infty$.

5. 极限存在准则

(1)单调有界函数必有极限

(2)"两边夹"准则

如果$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$,则$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

6. 两个重要极限

$\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$;$\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{u\to\infty}(1+\dfrac{1}{u})^u=\mathrm{e}$.

注 上面公式中的u可以是x的函数.

7. 极限运算法则

设$\lim\limits_{x\to(\cdots)}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to(\cdots)}g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to(\cdots)}[f(x\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to(\cdots)}f(x)\pm\lim\limits_{x\to(\cdots)}g(x)=A\pm B$;

$\lim\limits_{x\to(\cdots)}f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to(\cdots)}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to(\cdots)}g(x)=A\cdot B$;$\lim\limits_{x\to(\cdots)}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to(\cdots)}f(x)}{\lim\limits_{x\to(\cdots)}g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

注 上面各式中$x\to(\cdots)$可以是$x\to x_0$或$x\to\infty$.

8. 罗必塔法则

定理 1 如果

1)函数 $f(x),g(x)$均在 x_0 的某一邻域内可导(x_0 点可以除外),且 $g'(x)\neq 0$;

2)当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to 0,g(x)\to 0$,

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为∞),则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$也存在(或为∞),且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注 定理中将 $x\to x_0$ 改为 $x\to\infty$,结论依然成立.

定理 2 如果(1)函数 $f(x),g(x)$均在 x_0 的某一邻域内可导(x_0 点可以除外)且 $g'(x)\neq 0$,

当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to\infty,g(x)\to\infty$.

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或为∞),则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$也存在(或为∞)且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注 在定理 2 中将 $x\to x_0$ 改为 $x\to\infty$,同时将"函数 $f(x)$与 $g(x)$在 x_0 的某一邻域内可导"改为"函数 $f(x)$与 $g(x)$在$|x|>G(G>0)$可导"时结论依然成立.

注 定理 1,定理 2 实际上是解决$\dfrac{0}{0}$与$\dfrac{\infty}{\infty}$型这两种不定型的极限问题,而对其它不定型 $0\cdot\infty,\infty-\infty,0^0,1^\infty,\infty^0$ 则要设法化为$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{\infty}{\infty}$型后再利用罗必塔法则求极限.

例题分析

1. 利用极限存在准则求数列极限

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$.

分析 令 $x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$,易知数列$\{x_n\}$单调减且 0 是它的一个下界,从而极限存在.注意到 x_n 是由形如$\dfrac{m}{m+1}$的因子连乘而得,而$\dfrac{m}{m+1}>\dfrac{m-1}{m}$,于是可将 x_n 适当放大.

解 令 $x_n=\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$,因$\dfrac{m}{m+1}>\dfrac{m-1}{m}$,所以

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}<\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}.$$

于是

$$x_n^2<\frac{1}{2n+1}.$$

由于 $0<x_n<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ 所以由夹挤定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 即原极限为 0.

例 2 设 $x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$,证明此数列是收敛的,并求出极限值.

分析 易看出对一切 $n,0<x_n<3$,因此只需证明数列$\{x_n\}$的单调性即可.

证 由于 $0<x_n<\dfrac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{x_{n-1}}}<3$ $(n=2,3,\cdots)$,所以数列$\{x_n\}$是有界数列,又因

$$x_{n+1}-x_n=\frac{3(1+x_n)}{3+x_n}-\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}=\frac{6}{(3+x_n)(3+x_{n-1})}(x_n-x_{n-1}),$$

于是$(x_{n+1}-x_n)$与(x_2-x_1)同号,这表明数列$\{x_n\}$是单调的,因此它是收敛的.设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,根据

$$x_{n+1}=\frac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}},令\ n\to\infty,得\ A=\frac{3(1+A)}{3+A}$$

解出 $A=\sqrt{3}$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{3}$.

例 3(961) 设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

分析 容易看到 $x_n>0$,现判断数列$\{x_n\}$的单调性,若将递推公式中的 x_n 改成x,x_{n+1}改成 y,则得到函数 $y(x)=\sqrt{6+x}$,利用导数可判定它是严格单调增的,从而当 $x_2=4<x_1$ 时,$y(x_2)<y(x_1)$即 $x_3<x_2$,以此类推可判定数列$\{x_n\}$的单调性了.

证 令 $y=\sqrt{6+x}$,所以 $y(x_n)=\sqrt{6+x_n}=x_{n+1}(n=1,2,\cdots)$. 由于 $y'=\frac{1}{2}(6+x)^{-\frac{1}{2}}>0$,故 y 是严格单调增函数. 从 $x_2=\sqrt{6+10}=4<x_1$ 可知 $y(x_2)<y(x_1)$,即 $x_3<x_2$. 以此类推得知数列$\{x_n\}$是单调减的,又由于 $x_n>0$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 存在.

在 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边令 $n\to\infty$时取极限得

$$A=\sqrt{6+A},由此解出\ A=3\ 或\ A=-2,$$

因为 $x_n>0$,所以 $A\geqslant0$,因此舍去 $A=-2$. 故得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

2. 求函数极限的方法

函数极限是研究函数的局部性态,即研究函数在一点的邻域内的性态,若按极限定义求极限不仅麻烦而且也给应用带来困难,在实际计算中一般可通过多种途径间接求出极限,求函数极限常用的方法有以下几种:

(1)利用初等函数的连续性求极限.

例 4 求 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(\cos^2x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin2x}+(1+x)^x\right]$.

分析 设 $f(x)$是初等函数,x_0 是其定义区间内一点,当 $f(x)$在 x_0 处连续时有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,从而可将求 $f(x)$在 x_0 处的极限归结为求函数值 $f(x_0)$.

此题中因 $y_1=\frac{\ln(\cos^2x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin2x}$与 $y_2=(1+x)^x=e^{x\ln(1+x)}$都在 $x=0$ 处连续,所以 y_1+y_2 也在 x_0 处连续,从而可利用函数连续性与极限的四则运算法则求出原式极限.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos^2x+\sqrt{1-x^2})}{e^x+\sin2x}+\lim\limits_{x\to0}(1+x)^x=\frac{\ln(\cos^20+\sqrt{1-0^2})}{e^0+\sin(2\cdot0)}+(1+0)^0=\ln2+1$.

(2)利用基本初等函数在定义区间端点的性质求极限.

计算中常用到

$$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0;\ \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}x=\pi/2,\ \lim_{x\to-\infty}\mathrm{arctg}x=-\pi/2.$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to0}\cos e^{-1/x^2}$.

分析 当 $x\to-\infty$时,$e^x\to0$,当 $x\to0$,$-1/x^2\to-\infty$,从而 $e^{-1/x^2}\to0$,再由余弦函数的连

续性求出原式极限.

解 $\lim\limits_{x\to0}\cos e^{-1/x^2}=\cos(\lim\limits_{x\to0}e^{-1/x^2})=\cos 0=1.$

(3)利用有界变量与无穷小量之积仍是无穷小量求极限.

例 6 求$\lim\limits_{x\to0}x^2\sqrt{\cos(1/x)}$.

分析 因为当 $x\to0$ 时,x^2 是无穷小量 $0\leqslant\sqrt{\cos(1/x)}\leqslant1$,$\sqrt{\cos(1/x)}$是有界量,从而可直接利用无穷小量与有界量之积仍为无穷小得出结论.

解 $\lim\limits_{x\to0}x^2\sqrt{\cos(1/x)}=0.$

值得注意的是因为 $x\to0$ 时$\sqrt{\cos(1/x)}$没有极限.所以若利用极限运算法则计算为$\lim\limits_{x\to0}x^2\sqrt{\cos(1/x)}=\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\lim\limits_{x\to0}\sqrt{\cos(1/x)}=0$ 是错误的.

例 7 计算$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}$.

分析 因 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}=1$.

故$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$不存在,但由函数 $y=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$在点 $x=0$ 的左右极限均存在可知 y 在 0 点的某邻域内有界,又$\lim\limits_{x\to0}x=0$,故利用有界量与无穷小的乘积仍是无穷小得出结论.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}=0.$

(4)利用两个重要极限求极限.

$$\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1; \tag{1.1.1}$$

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{1/u}=e \text{ 或} \lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u})^u=e. \tag{1.1.2}$$

说明 1)公式中的 u 可以是 x 的函数.

2)公式(1.1.2)的特点是$(1+\text{无穷小})^{\text{无穷大}}$,且无穷小与无穷大互为倒数.

3)在利用公式(1.1.2)计算极限时往往将待求极限 1^∞凑成公式的标准形后再利用公式(1.1.2)求出极限值.

例 8 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin^2x}$.

分析 当 $x\to0$ 时此极限为不定型 1^∞,注意到 $\cos x=1+(\cos x-1)$,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}(-\dfrac{1}{\cos x+1})=-\dfrac{1}{2}$及 $\cos x=(1-\sin^2x)^{1/2}$故下面有两种方法求解.

解一 原式$=\lim\limits_{x\to0}\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\}^{\frac{\cos x-1}{\sin^2x}}=e^{-1/2}$.

解二 原式$=\lim\limits_{x\to0}(1-\sin^2x)^{1/2\sin^2x}=\lim\limits_{x\to0}[(1-\sin^2x)^{-\frac{1}{\sin^2x}}]^{-1/2}=e^{-1/2}$.

例 9(951) 填空题 $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{2/\sin x}=$________.

分析 当 $x\to0$ 时,原极限属 1^∞型,可先将$(1+3x)^{2/\sin x}$凑成$[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{2\cdot3x}{\sin x}}$然后再利用公式(2)计算.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$.

例 10(961) 填空题 设$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$,则 $a=$________.

分析 与例 9 一样先将$\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x$凑成$\left[(1+\frac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}$然后再利用(1.1.2)计算出极限值后,再求 a.

解 因$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{3a}{x-a})^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=e^{3a}$.故由 $e^{3a}=8$ 解出 $a=\ln 2$.

例 11 计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x}{x^2-2x+1}\right)^{x-1}\cdot a\left(1+\frac{b}{100x}\right)^x$.

分析 此题第一个因子属 1^{∞}型,故想法凑成公式(1.1.2)的标准形求极限,第二个因子的计算方法类似.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{[1-\frac{1}{(x-1)^2}]^{-(x-1)^2}\right\}^{\frac{-1}{x-1}}\cdot a[(1+\frac{1}{100x/b})^{\frac{100x}{b}}]^{\frac{b}{100}}=e^0\cdot a\cdot e^{b/100}=a e^{b/100}$.

例 12 填空题$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)^2(\mathrm{tg}^2x+1)=$________.

分析 这是 $0\cdot\infty$型,为了利用公式(1.1.1)计算,先令 $t=x-\pi/2$,则当 $x\to\pi/2$ 时 $t\to 0$,$2x-\pi=2t$.于是

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)^2(\mathrm{tg}^2x+1)=\lim_{t\to 0}4t^2/\cos^2(t+\frac{\pi}{2})=\lim_{t\to 0}4t^2/\sin^2 t=4.$$

例 13 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

分析 当 $x\to 0$ 时,这是$\frac{0}{0}$型,先将分母有理化后再利用公式(1.1.1)计算.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{(1+x\sin x)-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot(\frac{x}{2})^2}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+1}{\frac{1}{2}+1}=\frac{4}{3}.$$

(5)利用等价无穷小求极限

在某一变化过程中,设 α,β 是无穷小量,$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$,这表明为了确定$\frac{0}{0}$型待定型$\lim\frac{\alpha}{\beta}$可将分子、分母分别换成与它们等价的无穷小量计算.

当 $x\to 0$ 时,以下无穷小是等价的:

$\sin x\sim x$;$\mathrm{tg}x\sim x$;$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$;$\ln(1+x)\sim x$;$e^x-1\sim x$;$a^x-1\sim x\ln a$;$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$.

例 14 求 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{x^2}-1)^2\mathrm{ctg}x^4$.

分析 因为当 $x\to 0$ 时,$e^{x^2}-1\sim x^2$,故$(e^{x^2}-1)^2\sim x^4$,又 $\mathrm{tg}x^4\sim x^4$,故可利用“代替法”求极限