

计算流体力学基础

苏铭德 黄素逸

清华大学出版社

计算流体力学基础

苏铭德 黄素逸

清华大学出版社

(京) 新登字 158 号

内 容 提 要

本书是力学及相关专业高年级大学生和研究生“计算流体动力学”课程的教材。在 A 篇中简要介绍了几种主要流场的数学模型。在 B 篇中详细介绍了建立差分格式的基本方法、差分格式的稳定性和收敛性及其分析，并介绍了几种常用的离散化方法的基本思路及其理论分析，其中有特征线法，有限元法，有限解析法，谱方法等。C 篇则着重介绍这些方法在不同流场中的应用，以及针对不同问题所需采用的特殊措施。最后还简要地介绍了一些近年来发展起来的新的数值方法及其特点，供读者进一步开展计算流体动力学研究参考。

9208/18

图书在版编目 (CIP) 数据

计算流体力学基础/苏铭德, 黄素逸编著, -北京: 清华大学出版社, 1997
ISBN 7-302-02440-5

I. 计… II. ①苏… ②黄… III. 计算流体力学-基础理论 IV. 035

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97) 第 02693 号

出版者: 清华大学出版社 (北京清华大学校内, 邮编 100084)

印刷者: 北京大中印刷厂

发行者: 新华书店总店北京科技发行所

开 本: 787×1092 1/16 印张: 31.5 字数: 825 千字

版 次: 1997 年 3 月第 1 版 1997 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-02440-5/O·179

印 数: 0001—3000

定 价: 29.80 元

前 言

电子计算机的出现和迅速发展大大改变了科学技术发展的进程。流体力学的发展也因此出现了崭新的面貌。计算流体力学应运而生，新的计算方法层出不穷，每年的文献成千上万，目不暇接，计算流体力学的发展日新月异，前途似锦。可以预料，用电子计算机形象而又细致地再现复杂流体流动的理想已将不再是遥远的梦想了。

本书旨在为流体力学专业的大学生和研究生提供一本关于计算流体动力学的教材。书中在概述了几种流场的数学模型以后着重介绍了目前计算流体力学中最基本最常用的计算方法。特别强调方法的物理、数学背景，力图帮助读者建立这些方法中用到的基本概念，并且建立它们之间的关系，以便使读者达到触类旁通，举一反三的目的。在C篇中以大量的篇幅介绍各种方法在计算不同流动问题时会遇到的问题和解决的途径、其中包括网格生成及其求解引起的误差，并且分别介绍了无粘流、有粘流，不可压缩流和可压缩流以及工程中经常遇到的一些复杂流动的计算，其中有一些章节包括了作者的一些研究成果。通过这些章节的讨论使读者对于计算流体动力学在工程中的作用及具体应用方法有一个全面的了解。应当指出，计算流体动力学是一门实践性和应用性都很强的学科。读者为了深入理解各种方法的应用范围和解决实际问题时求解遇到的问题，唯一有效的方法是实践，在此作者愿与读者共勉之，在该篇结束时还简要介绍了近年来发展的新方法和新方向，供读者参考。

本书在编写过程中得到多位专家的热情指导和支持、原稿由核工业部研究生院华大平教授和金德圭教授细心审阅，另由于清华大学出版社的全力支持，使本书得以出版。在此作者向他们表示最深切的谢意。本书全部插图由清华大学出版社的描图小姐悉心绘制，在此作者表示衷心感谢。

由于作者才疏学浅，本书错误在所难免，敬请广大读者不吝赐教。

苏铭德 黄素逸

1997.1 于清华园

目 录

前言

A 篇 数值模拟和数学模型

第 1 章 关于数值模拟	1
1.1 数值模拟的概念	1
1.2 数值模拟产生的背景及其作用	2
1.3 数值模拟的意义、局限性和前景	3
参考文献	5
第 2 章 流场的数学模型	6
2.1 建立数学模型的基本方法	6
2.2 流体流动的几个主要数学模型	10
2.3 边界条件的分析和方程的特征分析	21
小结	31
参考文献	31
习题	31

B 篇 数值计算方法

第 1 章 发展方程的有限差分法	33
1.1 发展方程的有限差分法	33
1.2 差分格式的收敛性与稳定性	42
1.3 线性差分格式的 Lax 定理	46
1.4 差分格式稳定性分析	48
1.5 几种常用的差分格式及其稳定性分析	52
1.6 多维问题几种常用的差分格式	62
1.7 边界条件及其对稳定性的影响	66
1.8 修正方程及其应用	68
小结	72
参考文献	72
习题	72
第 2 章 偏微分方程常用的几种数值解法	75
2.1 双曲型方程的特征线法	75
2.2 有限单元法	89
2.3 泊松方程求解的直接方法	107
2.4 对流扩散方程的有限解析法	115
2.5 发展方程的谱方法	122

• I •

2.6 各种离散化方法之间的关系	130
参考文献	132
习题	133

C 篇 流场的数值计算

第 1 章 贴体坐标	140
1.1 贴体坐标的概念	140
1.2 贴体坐标的生成	142
1.3 转换关系	153
1.4 寄生截断误差	158
小结	160
参考文献	161
习题	161
第 2 章 无粘性流体流动的数值计算	166
2.1 等熵流动的数值计算	166
2.2 Burger 方程及其求解	179
2.3 激波的捕捉	184
2.4 Riemann 问题的解和 Godunov 格式	202
2.5 多维气体流动的数值计算	218
小结	226
参考文献	226
习题	227
第 3 章 粘性流体流动的数值计算	231
3.1 可压缩粘性流体流动数值计算的 MacCormack 显式格式	231
3.2 可压缩粘性流体流动数值计算的 Beam-Warming 隐式格式	243
3.3 可压缩粘性流体流动数值计算的反扩散和 NND 格式	249
3.4 可压缩粘性流体流动数值计算的通量分裂法和推进迭代法	256
3.5 用流函数-旋度方程求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程	269
3.6 用有限元法求解不可压缩粘性流体流动方程	275
3.7 用有限解析法求解不可压缩粘性流体流动方程	287
3.8 用有限差分法求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程	299
3.9 用推进迭代法求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程	307
3.10 用谱方法求解不可压缩粘性流体流动的 N-S 方程	314
小结	318
参考文献	319
习题	320
附录	322
第 4 章 工程中流场的数值计算	336
4.1 水击问题及其数值计算	336
4.2 铀分离器内转子流场的计算	343

4.3	管道内流场的计算	349
4.4	湍流边界层的数值计算	360
4.5	湍流运动的大涡模拟	370
4.6	圆柱绕流计算及高 Re 数问题	377
4.7	风对结构作用的数值计算	382
	小结	391
	参考文献	392
第5章	核动力工程中对流换热的数值计算	393
5.1	管道内的对流换热及其数值计算	393
5.2	外掠物体换热的数值计算	402
5.3	周期性通道流动对流换热的数值计算	406
5.4	封闭空间中的流动与换热计算	409
5.5	汽液两相流动与传热的数值计算	415
5.6	自然对流与强迫对流的数值计算	420
	小结	424
	参考文献	424
第6章	流场计算中的新方法	427
6.1	TVD 方法	427
6.2	关于 ENO 方法	435
6.3	自适应网格	444
6.4	多重网格法	451
6.5	并行计算与向量运算	457
6.6	无结构网格及其应用	467
	小结	475
	参考文献	475

附录 流场的图像显示

I.	绘图的数学基础	477
I.	等值线的绘制	488
II.	空间曲面的图像显示	490
IV.	流体质点踪迹显示和动态显示	496

A 篇 数值模拟和数学模型

第 1 章 关于数值模拟

1.1 数值模拟的概念

数值模拟也叫计算机模拟。它以电子计算机为手段,通过数值计算和图像显示的方法,达到对工程问题和物理问题乃至自然界各类问题研究的目的。

正如 P. J. Roache 所指出,在计算机上实现一个特定的计算,非常类似于履行一个物理实验。这时分析人员已跳出了数学方程的圈子来对待物理现象的发生,就像做一次物理实验。

数值模拟实际上应该理解为用计算机来做实验。比如某一特定机翼的绕流,通过计算并将其计算结果在荧光屏上显示,可以看到流场的各种细节:如激波是否存在,它的位置、强度、流动的分流、表面的压力分布、受力大小及其随时间的变化等。通过上述方法,目前人们已能清楚地看到激波的运动、涡的生成与传播。总之数值模拟可以形象地再现流动情景,与做实验没有什么区别。

从上面的例子可以看到,数值模拟包含以下几个步骤:

首先要建立反映问题(工程问题、物理问题等)本质的数学模型。具体说就是要建立反映问题各量之间的微分方程及相应的定解条件。这是数值模拟的出发点。没有正确完善的数学模型,数值模拟就无从谈起。牛顿型流体流动的数学模型就是著名的纳维-斯托克斯(Navier-Stokes)方程(简称 NS 方程)及其相应的定解条件。它及其简化后的数学模型将是本书研究的主要目标。

数学模型建立之后,需要解决的问题是寻求高效率、高准确度的计算方法。由于人们的努力,目前已发展了许多数值计算方法。本书将介绍目前最新发展的数值方法及其出发点。对于读者来说,分析各种方法的出发点是十分重要的。这有助于人们去寻求新的计算方法。计算方法不仅包括微分方程的离散化方法及求解方法,还包括贴体坐标的建立,边界条件的处理等。这些过去被人们忽略或回避的问题,现在受到越来越多的重视和研究。

在确定了计算方法和坐标系后,就可以开始编制程序和进行计算。实践表明这一部分工作是整个工作的主体,占绝大部分时间。由于求解的问题比较复杂,比如 NS 方程就是一个非线性的十分复杂的方程,它的数值求解方法在理论上不够完善,所以需要通过实验来加以验证。正是在这个意义上讲,数值模拟又叫数值试验。应该指出这部分工作决不是轻而易举的。

在计算工作完成后,大量数据只能通过图像形象地显示出来。因此数值的图像显示也是

一项十分重要的工作。目前人们已能把图作得像相片一样逼真。利用录像机或电影放映机可以显示动态过程，模拟的水平越来越高，越来越逼真。

以上这些步骤构成了数值模拟的全过程。其中数学模型的建立是理论研究的课题，一般由理论工作者完成。图像显示一般可由图像工作者完成。但在一些特定的情况下，数值模拟工作者也应当参加和进行计算机的作图工作。这是数值模拟中不可缺少的一个环节。

1.2 数值模拟产生的背景及其作用

16 世纪工业革命推动了自然科学的巨大发展，各种各样的自然规律被发现。牛顿奠定了力学的理论和数学分析的基础；伽利略开创了实验研究的范例。从此自然科学的研究在理论和实验两个方面得到了充分的发展。理论研究在探索大自然的奥秘及其发展的基本规律中发挥了重要的作用。实验研究则为理论研究提供了依据，并为揭示新的规律提供信息。这两种方法一直相辅相成、互相促进，推动科学不断发展。

随着研究的不断深化和问题本身的复杂化，理论研究受到了限制。实验研究同样也遇到了困难。电子计算机的产生和发展，使数值模拟这种研究手段应运而生。流体力学的发展证实了这一点。

理论流体力学从 18 世纪到 20 世纪中叶有了非常巨大的发展。尤其是随着航空事业的发展，人们早已在实验的基础上揭示了空气运动及其与飞行器相互作用的一般规律，并建立了流体运动所遵循的足够普遍和精确的方程——NS 方程，以及适用于各种不同范围的一些近似方程，求得了一些可以简化为线性方程及某些简单边界条件下的比较简单的解析解，及某些简化条件下的摄动解。

但由于 NS 方程是非线性的，实际问题又比较复杂，因此精确解和摄动解只能用于分析流场的某些基本特性和现象，很难用于实际工程。比如一架飞机表面在飞行时的压力分布这类实际问题在飞机设计中十分重要，但几乎不可能用解析法或摄动法得到，长期以来理论只能作估算，大量问题还是靠风洞试验来解决。理论研究越来越不能满足实际问题的需要。

正是这个原因，实验流体力学得到了迅速的发展。从 50 年代起各国都十分重视实验设备的建设和实验技术的发展。为了对型号设计能直接提供可靠数据，很多风洞都有较大的尺寸。如美国 NASA 低速风洞试验段截面为 40 英尺×40 英尺，前苏联 ЦАГИ 低速风洞试验段截面为 12m×14m，美国拥有试验段截面为 16 英尺×16 英尺的跨声速风洞。超声速风洞试验段截面为 2m×2m，而高超声速风洞试验段也达 1m×1m。与此同时，各种特种风洞也纷纷建造起来，而且仍有发展和扩大的趋势。实验技术也飞速发展，如激光测速技术、全息技术、各种新型传感器、流场显示技术，电子计算机的数据处理技术等均有改善和提高，而实验费用也越来越昂贵。一架飞机的研制和实验研究的耗费几乎按指数规律上升。图 A.1.1 所示的是

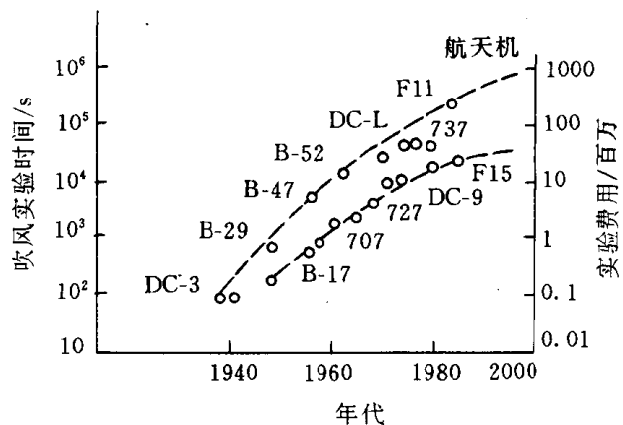


图 A.1.1

飞机及航天机吹风时间及费用的增长势头。按这一趋势估计，一架航天机吹风要花 10 年时间，耗资 1 亿美元以上。

实验研究无疑比较接近实际，但也有不足之处，比如洞壁、支架等干扰是无法避免和消除的。对于十分复杂的流动，如不定常流、高温和有化学反应流，气弹性变形流等都很难做实验，而且实验次数总是有限的，尺寸和实验条件的改变困难大、周期长。因此单凭实验研究也不能完全满足生产实际的需要。

由于高速电子计算机的出现，数值模拟这一手段使精确的空气动力设计由理想变为现实。

与图 A. 1. 1 的趋势相反，图 A. 1. 2 表明计算的费用以指数规律下降，平均每 8 年下降为原来的 1/10。30 年来下降到原来的近 1/10000。计算机的计算速度也有了极大的提高。CDC-7600 浮点运算速度达 4×10^7 次/s，IBM-370 为 4×10^6 次/s，Cray-I 为 10^9 次/s。最近日本、美国等还在研究制造更大和更快的计算机。除了超级巨型机的发展外，微处理机也有很大发展。由于计算机的发展，一些问题用数值模拟比做实验在时间和费用上都省得多，如道格拉斯公司对两个前缘形状不同的三元临界机翼的阻力特性分别进行计算和风洞试验，所得结果相近，但实验花了两年，耗资 60 万美元，而计算只花 4 天，花费 1 万美元。

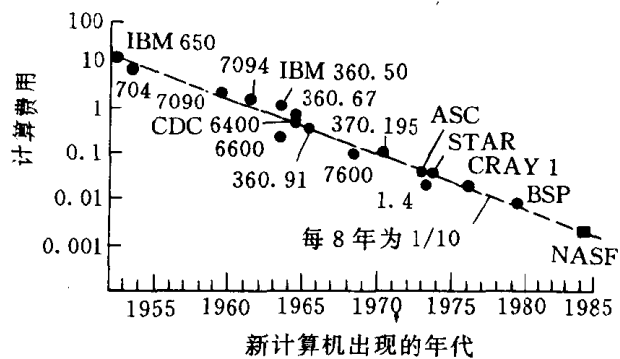


图 A. 1. 2

由于图形系统的出现和不断的完善，数值模拟的逼真性不断提高，它完全可以作为流动研究的一个手段，部分地替代一些实验研究。

1.3 数值模拟的意义、局限性和前景

由上述讨论可知，当问题本身遵循的规律比较清楚，所建立的数学模型比较准确并为实践证明能反映问题本质时，数值模拟具有较大的优越性。这是因为数值模拟具有耗费少，时间短，省人力等优点，便于优化设计，比实验研究更自由、更灵活，并且还能对实验难以量测的量做出估计，比如星体内部温度的推测、可控反应堆温度场分布、航天飞机飞行和返回时的复杂流场等。对核反应堆失水事故的模拟、反应堆在地震等特种条件下安全性的分析，这些都是实验研究难以模拟的情况。

数值模拟的另一个特点是具有很好的重复性，条件易于控制，可以重复模拟过程，这对湍流的数值模拟尤为重要。通过数值模拟还可以发现一些新的现象，比如两个孤立波相互作用的一些特性就是通过数值模拟首先被发现的。

由于数值模拟的优越性，所以得到越来越广泛的应用。不仅在航天航空工业中，也在其他工业中得到广泛的应用，比如核工程设备的设计和优化、水击分析、气轮机压缩机的设计与流场分析、石油输送管道的设计与优化、近海工程的设计、分析和优化、天气预报、海浪和风暴潮的预报等，都广泛应用数值模拟。

另一方面，数值模拟也有一定的局限性，面临不少问题。

首先是要有准确的数学模型。这不是所有问题都能做到的。对于不少问题，在其机理尚

未完全搞清楚之前，数学模型很难准确化。比如高速水流的气蚀现象、分层流界面的掺混问题、多相流各相间的相互作用、非牛顿流体的本构关系、物理化学流动中的复杂规律等，都难以用准确的数学模型加以描写，人们经常借助于各种半经验性的模型，这就大大地影响了数值模拟的正确性和可靠性。

其次是数值模拟中对数学方程进行离散化处理时，需要对计算中所遇到的稳定性、收敛性等进行分析。这些分析方法大部分对线性方程是有效的，对非线性方程来说只有启发性，没有完整的理论。对于边界条件影响的分析，困难就更大一些。所以计算方法本身的正确与可靠也要通过实际计算加以确定。在计算过程中有时还有一定的技巧性。因此为了验证计算结果的正确性，还必须与相应的实验研究结果进行比较。

再次，数值模拟本身还受到电子计算机本身条件的限制，即计算机运行速度和容量大小的限制、有些问题尽管已经有了成熟的数值模型，但是完全实现模拟并不现实。湍流运动的数值模拟是一个典型的例子。它的数学模型就是经典的纳维-斯托克斯方程。但由于流动是不定常的、三维的，各种涡的尺度变化很大，如果要详细描写湍流运动，至少需要在空间布置 $Re^{9/4}$ 个网格点，计算 $Re^{1/2}$ 个时间步长，每个点有 4 个变量（最少情况），对于 $Re = 10^4$ 的中等 Re 数流动而言，Cray-I 的 CPU 时间将为 10^4 小时。可见计算工作量之大是不现实的。因此为了能完全模拟湍流运动，还必须大力发展计算机，同时还要努力改进计算方法，提高计算效率。

总而言之，在强调数值模拟优越性的同时，也必须看到它的局限性，应该把它放在适当的位置。它与理论分析、实验研究相辅相成，作为研究流体流动的一个重要手段。

为了克服上述种种局限，不断提高数值模拟的能力和效益，目前出现了一些值得注意和令人鼓舞的新发展方向和前景。

在数学模型方面，人们开始注意一种全新的、根本不是由连续介质概念出发的完全离散的模型，即格子机。现在已有原子格子机和分子格子机等大体相近而又有区别的模型。在这种模型中，人们把流体看作由大量质点构成的，它们做类似于分子和原子的运动，它们之间的相互作用是十分简单的，因此运算也变得十分简单。但是质点的个数将是十分庞大的。利用这种模型人们可以描写流体的运动，而且已经取得了一些成果。为了有效地利用这种模型，人们需要设计专用的计算机。研究表明，该方法受到小 Re 数和低 M 数的限制，1992 年以来人们进一步发展了一种实数型格子器 Lattice Boltzman 方程，这是一种介于上述格子机和 NS 方程之间的一种全新的方法，已开始应用于一些复杂的流场的数值模拟，是一种全新的很有前途的方法，值得注意。

当然，目前人们最大量应用的仍是由偏微分方程离散化的方法来模拟流场，所以数值方法仍然是最主要的研究课题。目前主要在两个方向上发展。一是继续改进和设计新的计算方法。为了模拟复杂的、可压缩不定常、有间断（如激波）和有湍流的流动，人们设计了各种方法，如通量校正传输、通量分裂、守恒律系单调上风格式（MUSCL）、总变差减少法（TVD），有限元通量校正传输等方法，为世人瞩目。在计算水波，特别是破碎波方面，人们采用活动有限元法、自由拉格朗日法、无结构网格法。为快速求解椭圆型方程，人们发展了各种直接和半直接求解的方法、谱方法和多重网格法。我国数值流体力学工作者也作出了许多贡献，张涵信发展并广泛使用了反扩散法及无参数无振荡的耗散格式（NND），实践证明是行之有效的。黄兰洁 1980 年的工作被认为是 TVD 的一种早期格式，吴江航提出 L_∞ 收敛有限元-差分混合格式，沈孟育对有限体积法进行了改进。苏铭德将大涡模拟方法首先引入国内，并

且对复杂湍流运动进行了数值模拟。在另一方向上，人们考虑到并行机和向量机的出现，尽可能地采用适用于向量运算的计算方法。值得庆幸的是流体力学中的数值计算都可以实现或部分实现并行运算，这就为计算速度的提高开辟了广阔的前景、这一方向已经得到了人们的广泛重视。

向量计算及并行计算机的出现是计算机的一次重要革命。在计算中经常有大量的循环计算，它们有时是重复的而又互不相干的。这就可以同时进行计算，就好像几个人同时进行计算或在流水线上分别做各自的计算，然后将结果汇总。这种方法突破了目前的困境，因为计算机内信号的传递速度约为光速的 $1/5$ 。目前大规模集成电路的进一步微型化在技术上困难越来越大，进一步提高计算机运算速度面临很大的困难，事实上计算机运行速度提高的速率已有下降的趋势。目前 Cray 机的运行速度已达 10^9 次/s，再提高有困难。而向量机可在不提高运行速度的情况下使计算速度成倍地上升，人们对此给予极大的重视。近年来人们进一步将计算机联合运行，出现并行机，一个复杂的大型问题可以分成若干区在并行机的不同部位同时进行计算，从而使计算速度进一步提高。

其次，人们为了进一步提高数值模拟的效果，在图像显示方面也有了新的发展，已出现了录像设备和计算机直接联机的装置，计算结果可以通过高分辨率电视屏幕显示。所有这一切使模拟更加逼真。

总之，数值模拟尽管仍然有不少局限性，但在人们的努力下，其潜在的能力将得到不断的发挥，应用范围将不断扩大，前景是十分乐观的。数值模拟将以其自身的特点和独特的功能，与理论分析及实验研究一起，成为流体力学研究的重要手段。

参 考 文 献

1. Richtmayer RD, Morton KW. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. New York: J. Wiley & Sons, 1967
2. Peyret R, Taylor TD. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer-Verlag, 1967
3. Holt M. *Numerical Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, 1980
4. Boris JP. *New Directions in Computational Fluid Dynamics*. in: *Ann., Rew. Fluid Mech.*, 1989, 21: 341—385
5. Anderson DA, Tannehill JC. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Hemisphere Publishing Corporation, 1984

第2章 流场的数学模型

为了对流体流动进行数值模拟，首先要建立流体流动的数学模型。

所谓物理问题或工程问题的数学模型就是描写这些问题的各种量之间的数学关系，它们一般以微分方程（或积分型方程）出现，有时也附以一些代数方程。为确定这些方程的解还必须给出定解条件。这些方程连同定解条件一起就构成了数学模型。

为了确定数学模型，首先要确定描写问题的物理量或其他量，然后根据一些普遍的自然规律及与问题有关的特殊规律建立各量间的关系式，它们可以是微分方程，也可以是由理论分析或实验研究得到的各量间的定量关系（可以是微分方程或代数方程）。最后给出定解条件。

反映流体流动的量主要是速度（向量）、压力、密度、温度、熵、焓等物理量。流动所遵循的一般自然规律为质量守恒定律、动量守恒定律、能量守恒定律和热力学第一、二定律。如果流场与电磁场，化学反应等有关，还要遵循与此相关的定律。另外还要遵循由理论分析或实验研究所确定的规律，如热传导定律、相变规律、物性与状态参数之间的关系等。

在建立数学模型过程中，人们会碰到二种情况。一种情况是数学模型过于复杂，尽管它是精确的，但是人们无法求解。这时人们需要根据实际问题的特点对数学模型进行简化，这时的数学模型尽管是近似的，但它可以模拟流动的主要方面。另一种情况是有些规律在理论上难以分析，实验研究又比较困难，精确的规律尚不清楚，这时就需要引入一些模型，这些模型在某些方面反映了流场的实际情况。比如关于雷诺应力与流场速度分布之间的关系采用湍流应力模型，在两相流、非牛顿流、物理化学流中也都需要采用各种不同类型的模型。在这种情况下，数值模拟的效果很大程度上取决于模型的正确性和精确程度。同时可以看到，随着电子计算机的发展和科学技术的进步，数学模型将日益完善。

除了建立基本方程和基本关系式外，还需要给出定解条件。这也是一个十分困难的事。实际上不同类型的问题需要完全不同的定解条件。流体力学基本方程需要什么样的定解条件才能保证解的存在和唯一是一个尚未解决的问题。这需要人们对物理问题本身的特性有清晰的了解，才能对定解条件和数值方法有正确的认识。

本章介绍建立数学模型的一般方法，常见的流体力学的几种数学模型和定解条件的确立。

2.1 建立数学模型的基本方法

这里介绍的是连续介质力学数学模型建立的一般方法。描写流体运动的物理量所遵循的关系有二类，一类是由理论分析或实验研究得到的关系式，如气体的状态方程、热传导的富利埃定律、应力张量和应变速率张量之间的关系（线性的牛顿关系和非线性的非牛顿关系）等。这些定律和关系将在本章直接被引用。另一类关系是由自然界普遍规律得到的，一般是一些偏微分方程，人们常称它们为基本方程。本节讨论建立这些基本方程的方法。

建立基本方程的最常用的方法大体如下：首先在流场内任意地选取一控制体，这一控制体是想像的、任意的，并且对于所选用的坐标系是相对静止的，如图 A.2.1 所示。控制体的体积记作 V ，它的表面记作 S ，表面的外法向记作 n ，其长度为单位长。流体流动的速度记作

\mathbf{V} ,它是空间位置 \mathbf{r} 及时间 t 的函数。流体的密度记作 ρ_0 ,然后考虑在时间 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内通过控制体表面流体物理量(质量、动量、能量)的通量、体内物理量的变化以及控制体外流体对体内流体的作用量、三者之间可根据守恒定理得到平衡关系,这种关系是积分型式的。最后利用场论方法将表面积分转换为体积分。当控制体连续地收缩到一个点就得到了微分型的基本方程。

首先讨论连续方程的建立。连续方程是基于质量守恒定律得到的。在 t 到 $t + \Delta t$ 时间间隔内,在 Δt 足够小的情况下,通过控制面流出控制体的质量为

$$\oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \delta S \cdot \Delta t$$

这里面积元记作 δS ,这是因为它与时间 t 无关。下面公式中 δV 为体积元,与时间也无关。在这一时间间隔内控制体内由于密度随时间变化而使质量增加的量

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t$$

在没有其它质量来源的情况下,由质量守恒定律可知,控制体内质量的下降应当等于流出控制体的质量,故有平衡关系式:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t = - \oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \delta S \cdot \Delta t$$

约去 Δt 后得方程

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V + \oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \delta S = 0 \quad (\text{A. 2. 1. 1})$$

这就是积分型的连续方程。将控制体取作坐标网格单元,积分用平均量与面元面积或体元体积相乘来代替,就构成了有限体积法的基本思想。

利用奥-高定理,面积分可以改写为体积分

$$\oint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \delta S = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \delta V$$

将它代入 (A. 2. 1. 1) 式可得

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] \delta V = 0$$

由于控制体是任意选取的,所以当被积量为连续变化时必有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A. 2. 1. 2})$$

这就是微分型的连续方程。

动力学方程和能量方程分别由动量守恒定律和能量守恒定律得到的。

动力学方程的建立。

在 Δt 时间间隔内通过控制体表面 S 向控制体外流出的流体动量为

$$\oint_S (\rho \mathbf{V}) \cdot (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \delta S \cdot \Delta t$$

由外界流体在控制体表面处对控制体内流体作用的冲量为

$$\oint_S \sigma_n \delta S \cdot \Delta t$$

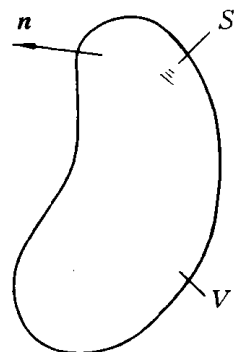


图 A. 2. 1

其中 σ_n 为 S 面处作用于控制体内流体的表面应力。在外界体积力作用于控制体内流体的冲量为

$$\int_V \rho f \delta V \cdot \Delta t$$

其中 f 是作用于单位质量上的向量力。在同一时间间隔内控制体内流体动量的增加为

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t$$

根据动量定律, 各量间的平衡可得方程

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} \delta V \cdot \Delta t = \left[- \oint_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \delta S + \oint_S \sigma_n \delta S + \int_V \rho f \delta V \right] \cdot \Delta t$$

约去 Δt 即得积分型动量方程

$$\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} \delta V + \oint_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \delta S = \oint_S \sigma_n \delta S + \int_V \rho f \delta V \quad (\text{A. 2. 1. 3})$$

由于

$$\sigma_n = \sigma \cdot \mathbf{n}$$

其中 σ 为应力张量, 它是一对称张量, 利用奥-高定理可得

$$\oint_S \sigma_n \delta S = \oint_S \sigma \cdot \mathbf{n} \delta S = \int_V \text{Div} \sigma \delta V \quad (\text{A. 2. 1. 4})$$

另外利用连续方程有

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} \delta V &= \int_V \mathbf{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V + \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \delta V \\ &= \int_V -\mathbf{V} \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})] \delta V + \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \delta V \end{aligned}$$

将上述关系代入 (A. 2. 1. 3) 式可得

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \delta V + \int_V \mathbf{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V - \int_V -\mathbf{V} \cdot [\nabla \cdot (\rho \mathbf{V})] \delta V + \oint_S \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \delta S \\ = \int_V (\text{Div} \sigma + \rho f) \delta V \end{aligned}$$

考虑到场论公式

$$\int_V [(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} (\nabla \cdot \mathbf{V})] \delta V = \oint_S \mathbf{a} V_n \delta S \quad (\text{A. 2. 1. 5})$$

取 $\mathbf{a} = \rho \mathbf{V}$, 再代入前一式即得

$$\int_V \rho \left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] \delta V = \int_V (\text{Div} \sigma + \rho f) \delta V$$

考虑到

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \equiv \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

以及控制体的任意性即可得微分型的动量方程:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho f + \text{Div} \sigma \quad (\text{A. 2. 1. 6})$$

能量方程的建立。

这里假定流体与外界的能量交换只限于机械能和热能。在有其他能量交换时可加入相应项。

在 Δt 时间间隔内, 控制体内流体能量由于外界体积力做功所增加量为

$$\int_V \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{f} \delta V \cdot \Delta t$$

外界流体对控制体内流体通过表面力所做的功为

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{V} \delta S \cdot \Delta t$$

流体通过控制体表面向外流出的能量 (动能和内能) 为

$$\oint_S \rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \delta S \cdot \Delta t$$

由于热传导通过控制体表面从外界得到的热能为

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} \delta S \cdot \Delta t$$

流体由于外界液体加热 (如辐射等) 所得热量为

$$\int_V \rho q_k \delta V \cdot \Delta t$$

流体在此期间增加的能量为

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] \delta V \cdot \Delta t$$

根据能量守恒定律可得到能量平衡方程为 (约去 Δt)

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] \delta V &= \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} \delta V + \oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{V} \delta S - \oint_S \rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \mathbf{V}_n \delta S \\ &+ \oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} \delta S + \int_V \rho q_k \delta V \end{aligned} \quad (\text{A. 2. 1. 7})$$

这就是积分型的能量方程。

考虑到应力张量是对称的, 利用奥-高定理有

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{V} \delta S = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{V} \delta S = \oint_S \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \delta S = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) \delta V$$

此外还有

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} \delta S = \int_V \nabla \cdot (k \nabla T) \delta V$$

$$\oint_S \rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \mathbf{V}_n \delta S = \int_V \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \mathbf{V} \right] \delta V$$

(A. 2. 1. 7) 式可改写为

$$\begin{aligned} &\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{V} \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] \right\} \delta V \\ &= \int_V [\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \rho q_k + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (k \nabla T)] \delta V \end{aligned}$$

1 B

同样由于 V 的任意性可得微分型的能量方程

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{V} \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] \\ & = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \rho q_k + \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot (k \nabla T) \end{aligned} \quad (\text{A. 2. 1. 8})$$

以上 (A. 2. 1. 1), (A. 2. 1. 3), (A. 2. 1. 7) 构成了三个积分型基本方程, (A. 2. 1. 2), (A. 2. 1. 6), (A. 2. 1. 8) 则构成了微分型的基本方程。应该指出, 这几个方程是不封闭的, 还需要附加其他关系才能得到完整的封闭方程。

2.2 流体流动的几个主要数学模型

一般说描述流体流动的基本方程是 NS 方程, 但它比较复杂, 所以人们针对不同问题进行了简化。本节将介绍 NS 方程及其在不同情况下简化所得的方程。关于边界条件将在下节介绍。

2.2.1 NS 方程

前面已经介绍了基本方程的建立。为使方程封闭, 必须附加其他条件。一个重要的附加关系是应力张量和变形速率之间的关系。对于牛顿流体, 这关系呈线性关系, 具体形式为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{V})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S} \quad (\text{A. 2. 2. 1})$$

其中 p 为压力, \mathbf{I} 为单位张量, μ 为流体粘性系数, μ' 为流体膨胀粘性系数, \mathbf{S} 为流体变形速率张量。一般将上式简写为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A. 2. 2. 2})$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 称作剪应力张量, 将它代入 (A. 2. 1. 6) 及 (A. 2. 1. 8) 式可得

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \text{Div} \boldsymbol{\tau} \quad (\text{A. 2. 2. 3})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{V} \left(\frac{V^2}{2} + e \right) \right] \\ & = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} + \rho q_k - \nabla \cdot (p\mathbf{V}) + \rho \Phi + \nabla \cdot (k \nabla T) + \mathbf{V} \cdot \text{Div} \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (\text{A. 2. 2. 4})$$

$$\text{其中} \quad \Phi = \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + 2\mu S_{ij} S_{ij} \quad (\text{A. 2. 2. 5})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Div} \boldsymbol{\tau} &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \\ \boldsymbol{\tau} &= \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{V})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{S} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 2. 2. 6})$$

对于 i, j 重复下标有求和约定。在直角坐标下有

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{A. 2. 2. 7})$$