

● 理科研究生丛书



黄宣国 著

李群基础

复旦大学出版社

理科研究生丛书

李群基础

黄宣国 编著

复旦大学出版社

● 理科研究生丛书



黄宣国 著

李 群 基 础

复 旦 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是作者在多年来讲授《李群与李代数》课程讲义的基础上逐步修改而成的,是一本李群与李代数的入门教材.全书包括:微分流形的简单叙述、拓扑群的扼要理论、李群和李代数的基础知识、半单纯李代数的基本内容、李群和李代数表示理论介绍等.

本书可供从事数学研究的大学教师和研究生阅读,可作为硕士研究生的教材,也可供从事理论物理研究的专业人员参考.

李 群 基 础

黄宣国 编著

复旦大学出版社出版

(上海国权路 579 号)

新华书店上海发行所发行 上海新文印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 8 字数 200,000

1995 年 6 月第 1 版 1995 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—2000

ISBN7-309-01416-2/O · 148

定价:17.00 元

理科研究生丛书编委会

主编 李大潜

编委 倪光炯 高 滋 苏德明
郑绍濂 袁 桢 丁荣源

编辑说明

自恢复研究生招生以来,我校广大的研究生指导教师及担任研究生教学工作的同志,结合教学任务,编写讲稿,编印讲义,在研究生的教材建设方面进行了大量的工作,但由于种种条件的限制,目前正式出版的研究生教材为数很少.为了进一步提高研究生的教学质量,方便广大研究生和有志深造的同志学习或自学,并有利于学术交流,都有必要迅速改变这一状况,大力加强研究生的教材建设.

这套研究生丛书,正是适应为国家培养高层次人材这一需要而编辑出版的.本丛书分文科及理科两大类,目前将主要出版硕士研究生专业基础课的教材,同时也酌情出版一些适应面较广、并具有较高质量的硕士研究生选修课教材及博士研究生专业基础课教材.我们的目标,是逐步地建设起一套比较完整的研究生教材,使它们不仅可用作研究生专业基础课或选修课的教材或参考书,部分内容也可用作大学高年级学生的选修课教材或补充读物,同时也可用作有关的自学和课外阅读材料.

收入本丛书的教材大都是在编成讲义后经过教学实践,再修改定稿.但由于我们对编辑工作缺乏经验,仍可能存在某些不妥和不足的地方,热忱欢迎广大读者提出宝贵意见,以便将来再版时改正.

复旦大学研究生院

1989年5月

前 言

1978年2月,我考入复旦大学数学研究所攻读微分几何.导师胡和生教授主持了一个讨论班,学习谷超豪教授著的《齐性空间微分几何学》一书的第一章至第四章.在1981年3月,我获得硕士学位,当时胡和生教授在数学系主讲李群,我作辅导.我的李群知识就是从这时开始逐步积累起来的.

在导师胡和生教授的不断鼓励下,我花了约一年时间,编写了《李群讲义》,并且在数学研究所对一年级硕士研究生讲授过多次.在此基础上,将讲义逐步修改成书.

凭我自己的体会,学位基础课(一学期)《李群与李代数》应在硕士生一年级第二学期开设,这时学生已有了微分流形、抽象代数和代数拓扑等基础知识,再开始学习李群和李代数,效果较佳.作为一学期的课程,本书可以从第二章拓扑群开始讲起,每周三节课,共18周时间,可把第二章、第三章和第四章大部分内容讲完.

第三章的许多习题是我多年来主讲《李群与李代数》课程考试用的试题,有助于学生灵活掌握第三章基本内容.

第五章内容很少,是李代数和李群表示论的引言,可以作为一年级硕士生在暑假里阅读的材料,所以第五章后面无习题.

感谢复旦大学数学研究所的领导和复旦大学研究生院,在他们的推荐和支持下,本书得以出版.

编著者

1993年12月

目 录

第一章 微分流形	1
§ 1 微分流形	1
§ 2 切空间和余切空间	8
§ 3 子流形.....	13
习题	17
第二章 拓扑群	19
§ 1 拓扑群.....	19
§ 2 商群.....	21
§ 3 Abel 拓扑群	23
习题	29
第三章 李群	31
§ 1 李群.....	31
§ 2 李代数.....	36
§ 3 左不变切向量场.....	39
§ 4 单参数子群.....	46
§ 5 指数映射.....	51
§ 6 微分形式.....	58
§ 7 李群基本定理.....	71
§ 8 李子群和闭子群.....	87
§ 9 同态和商群.....	98
§ 10 伴随表示.....	103
§ 11 覆盖群.....	106
§ 12 黎曼流形.....	116
习题.....	123

第四章 半单纯李代数的结构	126
§ 1 可解李代数和可解李群	126
§ 2 幂零李代数和幂零李群	133
§ 3 半单纯李代数和紧致李群的分解	137
§ 4 半单纯李代数的根系	148
§ 5 半单纯李代数的素根系	160
§ 6 典型李代数的根系和素根系	173
§ 7 复单纯李代数的 Dynkin 图	180
习题.....	190
第五章 李代数和李群表示论初步	192
§ 1 三维单纯李代数的不可约表示	192
§ 2 $SU(2)$ 的不可约酉表示	197
§ 3 $SO(3, R)$ 的不可约酉表示	213
§ 4 半单纯李代数的不可约表示	218
§ 5 完全可约性定理	239
参考书目	245

第一章 微分流形

§1 微分流形

m 维 Euclid 空间 R^m 和它的开子集 U 是众所周知的空间. 在这一节我们将发现许多复杂的空间是由 R^m 中的一些开子集拼接而成的.

M 是一个 Hausdorff 空间, 对于 M 内某一点 a , 如果存在 M 内一个包含 a 的开集 U_a , 它同胚于 R^m 内某个开子集 U , 即存在同胚 $\varphi_a: U_a \rightarrow U$, 我们称 M 在点 a 是 m 维局部 Euclid 的. 称 (U_a, φ_a) 为 M 内 (含 a) 的一个坐标图.

定义 1.1 M 是 Hausdorff 空间, 如果 M 内任一点都是 m 维局部 Euclid 的, 则称 M 为一个 m 维流形.

M 是一个 m 维流形, $\forall$ (表示任意) $a \in M$, 有一个包含 a 的开集 U_a , φ_a 为 U_a 到 R^m 的某个开子集上的一个同胚, 称 (U_a, φ_a) 为含 a 的一个坐标图, 称 U_a 为坐标邻域, 称 φ_a 为局部坐标映射, 所有的 U_a 之并覆盖 M , m 称为流形的维数. 当 $U_a \cap U_b \neq \emptyset$ 时, $\forall p \in U_a \cap U_b$, $\varphi_a(p) = (x_1(p), \dots, x_m(p))$, 称 $x_i(p) (1 \leq i \leq m)$ 为在坐标图 (U_a, φ_a) 里点 p 的局部坐标. 类似地有 $\varphi_b(p) = (y_1(p), \dots, y_m(p))$. 于是, 我们有一个点 p 的局部坐标之间的变换:

$$(x_1(p), \dots, x_m(p)) \xleftrightarrow[\varphi_b \varphi_a^{-1}]{\varphi_a \varphi_b^{-1}} (y_1(p), \dots, y_m(p)),$$
 这里, $\varphi_a^{-1}, \varphi_b^{-1}$ 分别表示 φ_a, φ_b 的逆映射. 上述对应是 $\varphi_a(U_a \cap U_b)$ 和 $\varphi_b(U_a \cap U_b)$ 之间的同胚对应. 于是可以写成 $y_i(p) = f_i(x_1(p), \dots, x_m(p))$, $x_i(p) = g_i(y_1(p), \dots, y_m(p))$. 由于 p 是 $U_a \cap U_b$ 中的任一点, 所以在上面的表示式中, 一般省略 p , 写成函数

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_m), x_i = g_i(y_1, \dots, y_m).$$

当 p 固定时, 如果 m 个函数 f_i 在点 $(x_1(p), \dots, x_m(p))$ 处是 C^∞ 的, m 个函数 g_i 在点 $(y_1(p), \dots, y_m(p))$ 处也是 C^∞ 的, 则称坐标图 (U_a, φ_a) 和 (U_b, φ_b) 在点 p 是 C^∞ 相关的. $\forall p \in U_a \cap U_b$, 若 (U_a, φ_a) 和 (U_b, φ_b) 在点 p C^∞ 相关, 则称这两个坐标图 C^∞ 相关. 当 $U_a \cap U_b = \emptyset$ 时, 也称这两个坐标图 C^∞ 相关. Hausdorff 空间内两个坐标图 C^∞ 相关可完全同样地定义.

定义 1.2 设 M 是一个 Hausdorff 空间, M 上的微分结构就是在 M 内的具有下列性质的一族坐标图 $F = \{(U_a, \varphi_a), a \in M\}$:

- (1) F 内全体 U_a 覆盖 M , $\varphi_a(U_a)$ 是 R^m (m 固定) 内的一个开子集.
- (2) F 内任两个坐标图 C^∞ 相关.

(3) 如 M 内的某个坐标图 (U, φ) 与 F 的所有坐标图 C^∞ 相关, 则 $(U, \varphi) \in F$.

显然, 具有微分结构的 Hausdorff 空间必定为一个流形. 具有微分结构的 m 维流形称为 m 维微分流形.

如果 F 只具有性质 (1)、(2), 则称 F 为覆盖 M 的一族 C^∞ 坐标图. 如果 F 具有性质 (1)、(2) 和 (3), 则称 F 为最大 C^∞ 坐标图族. F 内每个坐标图称为可容许坐标图, 简称(微分流形) M 内坐标图.

定理 1 设 M 是一个 Hausdorff 空间, F 为覆盖 M 的一族 C^∞ 坐标图, 则 F 唯一确定一个包含 F 本身的最大 C^∞ 坐标图族.

证明 记 M 内与 F 的所有坐标图 C^∞ 相关的一切坐标图族为 F^* . 显然 $F \subset F^*$. 下面证明 F^* 满足性质 (1)、(2) 和 (3). 由于 $F \subset F^*$, F^* 内坐标邻域全体覆盖 M , 则有 (1). 在 F^* 内任取两个坐标图 (U_a, φ_a) , (U_b, φ_b) , 如果 $U_a \cap U_b = \emptyset$, 则上述两坐标图 C^∞ 相关. 如果 $U_a \cap U_b \neq \emptyset, \forall p \in U_a \cap U_b$, 则由于 F 具有性质 (1), 存在 F 内坐标图 $(V, \psi), p \in V, (U_a, \varphi_a)$ 与 (V, ψ) 在点 p C^∞ 相关, (U_b, φ_b) 与 (V, ψ) 在点 p 也 C^∞ 相关. 由 C^∞ 相关的定义容易知道, (U_a, φ_a) 与 (U_b, φ_b) 在点 p 是 C^∞ 相关的 (利用 C^∞ 函数的 C^∞ 函数还是 C^∞ 函数这一性质). 由于 p 的任意性, 因此, F^* 具有性质 (2). 如果 (U, φ) 是与 F^* 的所有坐标图 C^∞ 相关的一个坐标图, 则由 $F \subset F^*$ 知, (U, φ) 与 F 的所有坐标图 C^∞ 相关, 即 $(U, \varphi) \in F^*$, F^* 具有性质 (3).

如果另有一个 $\tilde{F}$ 也是包含 F 的具有性质(1)、(2)和(3)的 C^∞ 坐标图族, 那么 $\tilde{F}$ 内的任一坐标图必与 F 内任一坐标图 C^∞ 相关. 则 $\tilde{F} \subset F^*$. 对于 F^* 内的任一坐标图, 类似前面可证: 它必与 $\tilde{F}$ 内任一坐标图 C^∞ 相关, 所以有 $\tilde{F} = F^*$.

例如, 在 n 维 Euclid 空间 R^n 中, $\forall x \in R^n, x = (x_1, \dots, x_n)$, 定义局部坐标映射 φ 为恒等映射, 即 $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_n)$. 于是 (R^n, φ) 就是覆盖 R^n 的 C^∞ 坐标图, 由定理 1, 可确定 R^n 为一个 n 维微分流形.

又如, R^n 的任何开子集 N 是一个 n 维微分流形. 利用上例中恒等映射 φ , 则 (N, φ) 就是覆盖 N 的一个 C^∞ 坐标图.

下面我们再举一些微分流形的例子.

例 1 $GL(n, R)$ 表示 $n \times n$ 可逆实矩阵的全体, 称为实一般线性群. 证明 $GL(n, R)$ 是一个 n^2 维微分流形.

证明 因为在矩阵乘法下, $GL(n, R)$ 的确是一个群. 用 M_n 表示 $n \times n$ 实矩阵全体, $\forall A \in M_n$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

令 $\varphi(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$, 这里 a_{ij} 是实数. 于是, φ 是 M_n 到 R^{n^2} 上的一个 1—1 对应. 在 M_n 上赋予拓扑, M_n 的一个集合 U 称为开集, 当且仅当 $\varphi(U)$ 是 R^{n^2} 内的一个开集. 于是 φ 为 M_n 到 R^{n^2} 上的一个同胚. (M_n, φ) 就是覆盖 M_n 的一个 C^∞ 坐标图. M_n 是一个 n^2 维的微分流形. 以后我们经常讲 M_n 等同于 R^{n^2} , 就是指在上述意义下两者的关系. 求行列式值的运算 $\det: M_n \rightarrow R$ 是一个连续映射, 易知 $GL(n, R) = M_n - \det^{-1}(0)$, $GL(n, R)$ 是 M_n 的一个开子集. $(GL(n, R), \varphi)$ 就是覆盖 $GL(n, R)$ 的一个 C^∞ 坐标图, 因此, $GL(n, R)$ 是一个 n^2 维微分流形.

例 2 n 维球面 $S^n = \{(a_1, \dots, a_{n+1}) \in R^{n+1} \mid \sum_{j=1}^{n+1} a_j^2 = 1\}$. 证明 S^n 是一个 n 维微分流形.

证明 令 $p = (0, \dots, 0, 1)$ 是北极, $q = (0, \dots, 0, -1)$ 是南极. 开集 $U(p) = S^n - \{p\}$ 和 $U(q) = S^n - \{q\}$ 之并覆盖 S^n . 下面定义映射 φ 和 ψ , 使得 $(U(p), \varphi)$ 和 $(U(q), \psi)$ 是覆盖 S^n 的两个 C^∞ 坐标图. 映射 φ 和 ψ 由球极平面投影确定.

$\forall a \in U(p)$, 记 λ 是由点 p 和 a 确定的直线, π 是 R^{n+1} 内由 $x_{n+1} = 0$ 确定的平面, $\pi(a)$ 表示 R^{n+1} 内直线 λ 和 π 相交的点. 当 $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ 时, 易得 $\pi(a) = (x_1, \dots, x_n, 0)$, 这里 $x_i = \frac{a_i}{1 - a_{n+1}}$ ($1 \leq i \leq n$). 令 φ

$(a) = (x_1, \dots, x_n) = (\frac{a_1}{1 - a_{n+1}}, \dots, \frac{a_n}{1 - a_{n+1}})$, φ 是 $U(p)$ 到 R^n 上的一个同胚. 因为如果 $(x_1, \dots, x_n)$ 已知, 则由计算可得 $a =$

$$\left[\frac{2x_1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{2x_2}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}, \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2} \right].$$

类似地定义 $\psi: U(q) \rightarrow R^n$, $\psi((a_1, \dots, a_{n+1})) = (y_1, \dots, y_n)$, 这里 $y_i = \frac{a_i}{1 + a_{n+1}}$. 如果 $(y_1, \dots, y_n)$ 已知, 则 $a =$

$$\left[\frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}, \frac{1 - \sum_{i=1}^n y_i^2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \right].$$

由于 $U(p) \cap U(q) = S^n - (\{p\} \cup \{q\})$, $\forall a \in U(p) \cap U(q)$, $\varphi(a) = (x_1, \dots, x_n)$, $\psi(a) = (y_1, \dots, y_n)$. 而 $y_i = \frac{a_i}{1 + a_{n+1}} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 + 1}$, $x_i = \frac{a_i}{1 - a_{n+1}} = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i^2 - 1}$. 所以, $\psi\varphi^{-1}$ 和 $\varphi\psi^{-1}$ 都是 C^∞ , 于是 S^n 是一个 n 维微分流形.

$\psi\varphi^{-1}$ 都是 C^∞ , 于是 S^n 是一个 n 维微分流形.

下面的例子是有趣的.

在 $R^{n+1} - \{0\}$ (这里, 0 表示 R^{n+1} 内的原点) 上, 定义点与点之间的一个关系 " $\sim$ ", $x \sim y$ 当且仅当存在非零的实数 t , 满足 $y = tx$. 用分量

表示, 记 $x = (x_1, \dots, x_{n+1}), y = (y_1, \dots, y_{n+1})$, 则 $y_i = tx_i$, “ $\sim$ ” 是一个等价关系. 记 x 的等价类为 $[x]$, 或记为 $[(x_1, \dots, x_{n+1})]$. 把每个等价类作为一点, 记等价类的全体为 $P_n(R)$, 称 $P_n(R)$ 为 n 维实射影空间. 则有一个自然映射 $\pi: R^{n+1} - \{0\} \rightarrow P_n(R)$, $\pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = [(x_1, \dots, x_{n+1})]$. 在 $P_n(R)$ 上赋予商拓扑, 即 $U^* \subset P_n(R)$ 是开集, 当且仅当 $\pi^{-1}(U^*)$ 在 $R^{n+1} - \{0\}$ 内是开集. 因而 π 是连续的, 且 $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \in R - \{0\}} tU$. 这里 $tU = \{(tx_1, \dots, tx_{n+1}) \mid (x_1, \dots, x_{n+1}) \in U\}$, $R - \{0\}$ 表示非零实数的全体. 由 tU 同胚于 U 可知: 当 U 是 $R^{n+1} - \{0\}$ 内的一开集时, $\pi^{-1}(\pi(U))$ 是开集, 则 $\pi(U)$ 是开集. 因此 π 是开映射. 由此可以直接证明 $P_n(R)$ 是 Hausdorff 空间, 这个证明留给读者.

令 $U_\alpha = \{[(x_1, \dots, x_{n+1})] \in P_n(R) \mid x_\alpha \neq 0\}$, $1 \leq \alpha \leq n+1$. 每个 U_α 是 $P_n(R)$ 内的开集, $P_n(R) = \bigcup_{\alpha=1}^{n+1} U_\alpha$. 定义 $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n$, $h_\alpha[(x_1, \dots, x_{n+1})] = \left(\frac{x_1}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_\alpha} \right)$. 显然, h_α 是有确定意义的. 定义 $h_\alpha^*: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow R^n$, $h_\alpha^*(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_\alpha} \right)$, 易知 h_α^* 是连续的开映射. 从 $\pi^{-1}h_\alpha^{-1}(U) = h_\alpha^{*-1}(U)$ 和 $h_\alpha(U^*) = h_\alpha \pi(\pi^{-1}(U^*)) = h_\alpha^*(\pi^{-1}(U^*))$ 可知, h_α 是连续的开映射, 又 h_α 是 1-1 的, 所以 $h_\alpha: U_\alpha \rightarrow h_\alpha(U_\alpha)$ 是一个同胚. 因此 (U_α, h_α) 是 $P_n(R)$ 内的一个坐标图.

如果 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \forall [(x_1, \dots, x_{n+1})] \in U_\alpha \cap U_\beta, x_\alpha x_\beta \neq 0$, 不妨设 $\alpha > \beta$. 于是我们有局部坐标变换:

$$(x_1^*, \dots, x_n^*) = \left(\frac{x_1}{x_\beta}, \dots, \frac{x_{\beta-1}}{x_\beta}, \frac{x_{\beta+1}}{x_\beta}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_\beta} \right)$$

$$\xrightarrow[h_\beta h_\alpha^{-1}]{h_\alpha h_\beta^{-1}} \left(\frac{x_1}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_\alpha} \right) = (y_1^*, \dots, y_n^*).$$

显然, $y_1^* = \frac{x_1^*}{x_{\alpha-1}^*}$ (注意 $x_{\alpha-1}^* = \frac{x_\alpha}{x_\beta}$), $\dots, y_{\beta-1}^* = \frac{x_{\beta-1}^*}{x_{\alpha-1}^*}, y_\beta^* = \frac{1}{x_{\alpha-1}^*}, y_{\beta+1}^* = \frac{x_{\beta+1}^*}{x_{\alpha-1}^*}, \dots, y_{\alpha-1}^* = \frac{x_{\alpha-2}^*}{x_{\alpha-1}^*}, y_\alpha^* = \frac{x_\alpha^*}{x_{\alpha-1}^*}, \dots, y_n^* = \frac{x_n^*}{x_{\alpha-1}^*}$. 于是, $y_i^* (1 \leq i \leq n)$ 是

$x_1^*, \dots, x_n^*$ 的 C^∞ 函数. 类似地, x_i^* 也是 $y_1^*, \dots, y_n^*$ 的 C^∞ 函数, (U_α, h_α) 与 (U_β, h_β) 是 C^∞ 相关的. 所以, $\{(U_\alpha, h_\alpha) | 1 \leq \alpha \leq n+1\}$ 是覆盖 $P_n(R)$ 的一族 C^∞ 坐标图, 由定理 1 可知, $P_n(R)$ 为一个 n 维微分流形.

例 3 在 R^{n+1} 上给定一个 C^∞ 函数 $f(x_1, \dots, x_{n+1})$. 集合 $M = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} | f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0\}$. 如果 M 不是空集, 且 $\forall (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) \in M, \frac{\partial f}{\partial x_i} (1 \leq i \leq n+1)$ 在 $(x_1^0, \dots, x_{n+1}^0)$ 处不全为零, 则 M 是一个 n 维微分流形.

证明 令 $U_i = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} | \frac{\partial f(x_1, \dots, x_{n+1})}{\partial x_i} \neq 0\}$. U_i 是 R^{n+1} 内的开集. 易得 $\bigcup_{i=1}^{n+1} (U_i \cap M) = M$. M 作为 R^{n+1} 内的子空间, 是一个 Hausdorff 空间, $U_i \cap M$ 是 M 内的开集. 下面对于非空的 $U_i \cap M$ 构造坐标图.

$\forall x^0 = (x_1^0, \dots, x_{n+1}^0) \in U_i \cap M$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 在 x^0 不为零. 对于 $f(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$, 由隐函数存在定理, 一定有 R^{n+1} 内的一个包含点 x^0 的开集 V 和包含点 $(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_{n+1}^0)$ 的 R^n 的开集 V^* , 使得在 V^* 上, 有 $x_i = g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$, g_i 是 V^* 上的 C^∞ 函数, 且 $x_i^0 = g_i(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \dots, x_{n+1}^0)$. 另外, 在 $V \cap U_i \cap M$ 上, 点可以写成 $(x_1, \dots, x_{i-1}, g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}), x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$, 由此构造出坐标图 $(V \cap U_i \cap M, \varphi^i)$, $\forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in V \cap U_i \cap M, \varphi^i(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$. 易知, φ^i 是到 R^n 内的一个 1-1 的、连续的开映射, 则 φ^i 是 $V \cap U_i \cap M$ 到 $\varphi^i(V \cap U_i \cap M)$ 上的一个同胚. 因此, 对于 $\forall x^0 \in U_i \cap M$, 我们有了 M 内一个包含 x^0 的开集 $V \cap U_i \cap M$ 和相应的坐标图 $(V \cap U_i \cap M, \varphi^i)$. 显然 $(V \cap U_i \cap M, \varphi^i)$ 与 $(W \cap U_j \cap M, \varphi^j)$ 是 C^∞ 相关的. 对于不同的 i, j , 设 $i < j$, 如果 $(V \cap U_i \cap M) \cap (W \cap U_j \cap M) \neq \emptyset$, 取其交集内的任一点 $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, 则有 $\varphi^i(x) = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$, $x_i = g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$, $\varphi^j(x) = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$, $x_j = g_j(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$. g_i, g_j 都是 C^∞ 函数. 则局部坐标有变换关系: $(x_i, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_{n+1}) \xleftrightarrow[\varphi^j \varphi^i{}^{-1}]{\varphi^i \varphi^j{}^{-1}}$

$(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$, 从 g_i, g_j 都是 C^∞ 函数可知, 两坐标图 $(V \cap U_i \cap M, \phi^i)$ 和 $(W \cap U_j \cap M, \phi^j)$ 是 C^∞ 相关的. 因此, M 是一个 n 维微分流形.

例如, R^3 内环面

$$T = \{(x, y, z) \in R^3 \mid f(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 - r^2 = 0\},$$

这里常数 $a > r > 0$. 由计算可得在环面 T 上任一点处, $(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2 = 4r^2 > 0$, 因此 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial z}$ 在 T 上任一点处不全为零, 从而 T 是一个二维微分流形.

又如, $SL(n, R) = \{A \in M_n \mid \det A = 1\}$. 令 $A = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & \cdots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$,

记 $f(x_{11}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn}) = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ & \cdots & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} - 1$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = A_{ij}$,

这里 A_{ij} 是 A 的行列式的第 i 行、第 j 列的代数余子式. 由于在 $SL(n, R)$ 上, 对任意固定的 i , 有 $\sum_{j=1}^n x_{ij} A_{ij} = 1$, 则 A_{ij} 不可能同时为零. 所以, $SL(n, R)$ 是一个 $n^2 - 1$ 维微分流形. 称 $SL(n, R)$ 为实单模群.

例 4 设 M 与 N 分别是 m 维与 n 维的两个微分流形, 我们能够作出它们的拓扑积 $M \times N$, 这就是由点偶 (p, q) 的全体组成的集合, 这里 $p \in M, q \in N$. $M \times N$ 的拓扑是用集合 $U \times V$ 作为基来生成的, 此处 U, V 分别是 M, N 的任一开集. 证明: 有一种很自然的方式, 可定义 $M \times N$ 为一个微分流形.

证明 $\forall (p_0, q_0) \in M \times N$, 此处 $p_0 \in M, q_0 \in N$. 由于 M 是微分流形, 则有含 p_0 的坐标图 (U, φ) . 同样, N 内有含 q_0 的坐标图 (V, ψ) . 定义 $M \times N$ 内含 (p_0, q_0) 的坐标图 $(U \times V, \varphi \times \psi)$, $\forall (p, q) \in U \times V, \varphi \times \psi(p, q) = (\varphi(p), \psi(q)), \varphi \times \psi(U \times V) = \varphi(U) \times \psi(V)$ 为 R^{m+n} 内的一个开子集, $\varphi \times \psi$ 是一个同胚. 如果对两个坐标图 $(U \times V, \varphi \times \psi)$ 和 $(U^* \times V^*, \varphi^* \times \psi^*)$, $(U \times V) \cap (U^* \times V^*) \neq \emptyset$, 在上述交集内任取点偶 $(p, q), \varphi$

$\times \psi(p, q) = (\varphi(p), \psi(q)), \varphi^* \times \psi^*(p, q) = (\varphi^*(p), \psi^*(q)), (U, \varphi)$ 与 (U^*, φ^*) 是 C^∞ 相关的, (V, ψ) 与 (V^*, ψ^*) 也是 C^∞ 相关的, 然而 $\varphi(p)$ 与 $\psi^*(q)$ 无关, $\varphi^*(p)$ 也与 $\psi(q)$ 无关, 则 $(U \times V, \varphi \times \psi)$ 和 $(U^* \times V^*, \varphi^* \times \psi^*)$ 的确是 C^∞ 相关的. 所以, $M \times N$ 是一个 $m+n$ 维的微分流形.

例如, 圆周 S^1 是一个一维微分流形, 则 $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n 个) 是 n 维微分流形, 称为 n 维环面. 又例如, $R^p \times S^{n-p} (1 \leq p \leq n-1)$ 也是 n 维微分流形, 称为 n 维超柱面.

§ 2 切空间和余切空间

M 是一个 m 维微分流形, $W \subset M$ 为一个非空开集, 如果 $f: W \rightarrow R$ 是一个连续映射, 则称 f 为 W 上的一个连续函数. 对于 W 内某点 p_0 , 给定含点 p_0 的坐标图 $(U_{p_0}, \varphi_{p_0}), \forall p \in W \cap U_{p_0}, f(p) = (f \varphi^{-1}) \varphi(p)$, 则有 $f \varphi^{-1}: \varphi(W \cap U_{p_0}) \rightarrow R, f \varphi^{-1}$ 为一个 m 元连续函数. 用 $f \varphi^{-1}$ 代替 f 进行各种运算, 是比较方便的. 如果 $f \varphi^{-1}$ 在点 $\varphi(p_0)$ 是 C^∞ 的, 则称函数 f 在点 p_0 是 C^∞ 的, 这个定义与可容许坐标图的选择无关. 我们将在包含点 p_0 的小邻域内有定义且在点 p_0 C^∞ 的函数的全体记为 $C^\infty(p_0)$.

定义 1.3 M 是一个 m 维微分流形, p_0 为 M 内一点, 称 $C^\infty(p_0)$ 到 R 内的映射 L 是在点 p_0 的一个切向量, 当且仅当

(1) $\forall f, g \in C^\infty(p_0), \forall \alpha, \beta \in R, L(\alpha f + \beta g) = \alpha Lf + \beta Lg$ (线性性质).

(2) $\forall f, g \in C^\infty(p_0), L(fg) = Lf \cdot g(p_0) + f(p_0) \cdot Lg$ (Leibniz 法则).

定理 2 M 是一个 m 维微分流形, p_0 是 M 内任意一点, 则所有在点 p_0 的切向量组成一个实 m 维的线性空间.

证明 所有在点 p_0 的切向量组成 $T_{p_0}(M)$, 先证明 $T_{p_0}(M)$ 是一个实线性空间.

$\forall L_1, L_2 \in T_{p_0}(M), \forall f, g \in C^\infty(p_0)$ 和 $\forall \alpha, \beta \in R, (L_1 + L_2)(\alpha f +$