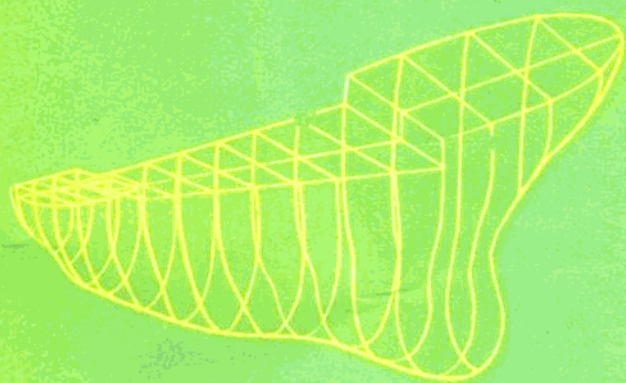


电子计算机

辅助船舶设计

杨 樵
张 仁
仰 书
纲

编著



上海

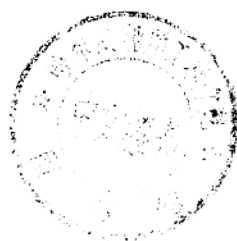
交通大学出版社

U662.9
130

1 20 458047

电子计算机辅助船舶设计

杨 樾 张仁颐 仰书纲 编著



00458047

2

上海交通大学出版社

内 容 简 介

本书着重阐明了电子计算机辅助船舶设计的基本原理、方法和过程。全书共计十二章,主要包括:数值计算方法的应用、最优化方法及其应用、船舶初步设计和详细设计计算、样条函数及其应用、船体型线生成及光顺、图形技术、数据库系统及计算机辅助设计系统。

本书可作为高等院校船舶设计与制造专业的教材,亦可供造船工程技术人员参考。

电子计算机辅助船舶设计

*

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

常熟文化印刷厂排版印装

开本 787×1092毫米 1/16 印张 21.375 字数 527000

1985年5月第1版 1985年7月第1次印刷

印数 1—2400

统一书号: 13324·16 教材书目: 2541

定价: 5.00 元

前 言

1983年中国船舶工业总公司在哈尔滨召开的教材会议上,确定本书为船舶设计与制造专业的教学参考书。

本书原是上海交通大学船舶及海洋工程系船舶设计专业研究生的学位课程教材。在编写时,考虑到该专业的本科生在学习了有关的专业基础课和专业课的情况下,能自学这门课程,内容的介绍力求深入浅出。

本书内容较为广泛,涉及数值计算方法的应用、最优化方法及其应用、船舶初步设计和详细设计中的计算机应用、样条函数及其应用、船体型线生成及光顺、图形技术、数据库系统及计算机辅助设计系统等。编者努力引用国内外的新资料和科研成果,以帮助造船科技人员在应用计算机进行船舶设计方面有一初步的认识。由于以上每一部分都有十分丰富的内容,限于篇幅,只能作实用性的叙述,避免较复杂的理论推导,进一步深入学习可参阅书后所列的参考文献。

本书编写过程中曾得到许多单位的同志大力支持与帮助,大连工学院纪卓尚等同志作了审阅,提出了许多十分宝贵的修改意见,特致深切谢意。

尽管同志们多方关怀和热心帮助,但由于我们水平和见识所限,特别是某些新内容还是一边学习一边编写的,因此,对书中某些问题理解欠妥,甚至造成谬误是在所难免的,恳请读者批评修正。

编 者

1984年4月

目 录

绪 论

第一章 电子计算机辅助船舶设计中一些常用的数值计算方法	1
§1-1 插值法	1
1. 一元三点插值	1
2. 拉格朗日插值	2
3. 等距二元抛-抛插值	3
4. 等距一元插值	4
5. 样条插值	6
§1-2 最小二乘法曲线拟合	10
1. 最小二乘法原理	10
2. 用最小二乘法求数据的曲线拟合	11
§1-3 数值积分	13
1. 复合辛浦生求积公式	13
2. 变步长辛浦生公式	14
§1-4 代数方程解法	18
1. 求实根的区间分半法	19
2. 迭代法	19
第二章 最优化方法	21
§2-1 概述	21
1. 引言	21
2. 设计的评价体系	23
§2-2 预备知识	26
1. 向量及其运算	26
2. 集合	27
§2-3 直接最优化方法	28
1. 引言	28
2. 一维搜索	28
3. 变量轮换法	39
4. 一阶梯度法	45
5. 共轭梯度法	52
6. 单纯形加速法	60
7. 模矢法	70
8. 解约束最优化问题的制约函数法	73
9. 综合约束双下降法	79

§2-4 动态规划概述	85
§2-5 多目标问题的解法	90
1. 满足主要要求, 兼顾其它要求	91
2. 化多目标为单目标	91
第三章 最优化方法在船舶设计中的应用	94
§3-1 概述——设计问题的数学表示	94
§3-2 把工程设计问题构造成最优化问题	96
1. 设计变量	97
2. 目标函数	98
3. 约束条件	99
§3-3 悬臂梁的最优设计	100
§3-4 船舶螺旋桨的最优设计	102
§3-5 船舶主尺度分析	106
§3-6 结构设计——矩形断面舱口盖	107
第四章 船舶设计过程中计算机的应用	111
§4-1 船舶设计过程	111
1. 用船部门提出营运要求	111
2. 方案设计	111
3. 初步设计	111
4. 技术设计	112
5. 施工设计	112
§4-2 船舶设计中电子计算机的应用	112
第五章 船舶初步设计	119
§5-1 船舶技术与经济论证	119
1. 营运要求、设计参数与经济指标	119
2. 计算步骤与数学模型	119
§5-2 初步设计	128
1. INDES 系统的功能	131
2. INDES 系统的内容	132
§5-3 多用途干货船初步设计集成系统	141
1. 总体性能部分	141
2. 结构设计计算	156
第六章 详细设计计算	163
§6-1 静水力曲线计算	163
§6-2 有效功率估算	164
1. 数组插值法	164
2. 数据的曲面拟合	165
3. 数据曲线拟合并插值	167
§6-3 船中横剖面结构设计	167

第七章 样条理论在 CAD 中的应用	181
§7-1 从木样条到样条函数	181
§7-2 三次样条函数	183
§7-3 三次基样条	190
§7-4 Bezier-Bernstein 曲线	193
§7-5 B 样条(B-spline).....	196
§7-6 样条曲面	200
§7-7 曲线和曲面的光顺	202
1. 曲线光顺的定义(即光顺的准则).....	203
2. 曲线的光顺.....	203
3. 曲面的光顺和 Gauss 曲率.....	207
第八章 船体的数学表达和型线生成	211
§8-1 船体曲面的数学表达	211
§8-2 船体曲面的分片	213
§8-3 曲面片的衔接	216
§8-4 球鼻首曲面	220
§8-5 母型船改造	223
1. 比例变换.....	223
2. 移动横剖面变换.....	224
§8-6 吃水函数法	232
§8-7 曲面法与交互设计	237
1. 用曲面片理论描写船体曲面.....	237
2. B-spline 曲面与交互设计	240
第九章 图形处理	242
§9-1 计算机图形处理	242
§9-2 数控绘图机和图形显示器	243
1. 数控绘图机.....	243
2. 图形显示装置.....	245
§9-3 图形数学处理	247
1. 点和直线的变换.....	248
2. 图形的变换.....	249
3. 图形的平移.....	250
4. 立体图形的变换.....	251
5. 裁剪(clipping)和显示窗	252
6. 叠影处理或隐藏线问题.....	253
§9-4 图形处理语言	255
第十章 数据库系统	262
§10-1 数据库的定义.....	262
§10-2 文件和文件管理.....	263

§10-3 数据库和数据库管理.....	268
1. 数据的分级.....	269
2. 数据结构.....	270
3. 数据库语义.....	270
§10-4 数据库方法.....	273
1. 层次模型.....	273
2. 网状模型.....	276
§10-5 关系结构与 QUERY/45	279
第十一章 总布置设计	285
§11-1 计算机辅助总布置设计的特点.....	285
§11-2 计算机辅助总布置设计(CAAD)的处理方法	286
§11-3 CAAD 中的交互设计.....	293
第十二章 计算机辅助设计系统	298
§12-1 计算机系统.....	298
§12-2 操作系统(Operating System)	301
§12-3 造船集成系统.....	306
§12-4 系统工程概述.....	321

第一章 电子计算机辅助船舶设计中 一些常用的数值计算方法

在船舶设计中,我们经常碰到计算一个自变量的函数所表示的曲线的坐标值问题。例如, $y=f(x)$ 这样的函数,如果 $f(x)$ 的方程是已知的,任意位置 x 的 y 值便可计算出来。如果函数的数值是根据经验或实验结果以图解法或列表法给出时,例如象船型数据,用型值表的形式给出,则在应用计算机方法求任意位置的坐标值之前,必须根据已知数据求出和它配合的方程。

处理按给定间距列成表格的数据,基本上可采用两种方法:第一种方法是用方程准确地配合已知数据以求其中间坐标值,这也就是插值法;第二种方法是用函数逼近已知数据,按此函数描出的曲线保留给定数据的一般特征,而不必要求一定要通过所有已知点,这就是曲线拟合(配合)法。由此可见,前一种方法是确认所提供的数据正确无误;而后一种方法则是对已知数据进行光滑化和配合的联合处理。

§1-1 插值法^[2]

在船舶设计中,所遇到的函数往往不便于计算或处理(例如求导或求积分)。有时候,函数关系没有明显的解析表达式,需要根据实验观测或其它方法来确定与自变量的某些值相应的函数值;有时候,虽然所遇到的函数有明显的解析表达式,但是解起来却费工费时。从实际需要来说,对于计算结果允许有一定程度的误差。这样,我们就希望对问题中的函数建立一个简单的便于计算和处理的近似表达式。

插值法就是建立这种近似公式的一种基本方法。

1. 一元三点插值

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0, x_1, x_2 上的值 y_0, y_1, y_2 已知,求一个多项式 $y=p(x)$,使 $p(x_j)=y_j$ ($j=0, 1, 2$)。其几何意义就是通过三点 $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ 作一曲线,若三点不在一直线上,通过三点的曲线就是抛物线。它是一个二次方程,其一般形式为:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

这里 a_0, a_1, a_2 为待定系数,可由曲线 $y=p(x)$ 通过 A, B, C 三点的三元一次联立方程求得。

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) + \frac{\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1} (x - x_0)(x - x_1)$$

$p(x)$ 是 x 的二次函数,称二次插值多项式。通过三点的插值问题称为二次插值或抛物线插值。

[例 1-1] 船舶初步设计阶段,给定主机功率 BHP 和转速 N ,求航速。方法是按 BHP 和船的排水量,先粗估一个航速 V_k (节)^[3],在它左右各取一个航速 V_{k-1} (节)和 V_{k+1} (节),分别求出此三个航速对应所需的主机功率,然后按给定的 BHP 插值得到所求的航速。

如一万五千吨载重量多用途干货船,主机功率 BHP=7400 马力,转速 $N=123$ 转/分,粗

估航速为 $V_k = 16$ 节。计算结果为:

航 速 (节)	V_1	V_2	V_3
	15	16	17
主 机 功 率 (马力)	P_1	P_2	P_3
	6512	8048	10033

用一元三点插值, 便得 $BHP = 7400$ 马力时的航速:

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + \frac{V_2 - V_1}{P_2 - P_1} (BHP - P_1) + \left(\frac{V_3 - V_1}{P_3 - P_1} - \frac{V_2 - V_1}{P_2 - P_1} \right) \times (BHP - P_1) \\
 &\quad \times (BHP - P_2) / (P_3 - P_2) \\
 &= 15 + \frac{16 - 15}{8048 - 6512} \times (7400 - 6512) + \left(\frac{17 - 15}{10033 - 6512} - \frac{16 - 15}{8048 - 6512} \right) \\
 &\quad \times (7400 - 6512) (7400 - 8048) / (10033 - 8048) \\
 &= 15.60 \text{ (节)}
 \end{aligned}$$

此即为所求的航速。

2. 拉格朗日插值^[4]

(1) 功能: 用拉格朗日插值公式在全区间插值, 允许不等距节点。

(2) 计算方法:

拉格朗日公式:

$$y(x) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{(x-x_1) \cdots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \cdots (x-x_n)}{(x_k-x_1) \cdots (x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1}) \cdots (x_k-x_n)}$$

(3) 哑元说明:

X : 体积为 N 的一维实数组, 自变量节点值;

Y : 体积为 N 的一维实数组, 为相应节点上的函数值;

X_0 : 实变量, 自变量;

Y_0 : 实变量, 插值结果;

N : 整变量, 节点个数;

P : 体积为 N 的一维实数组, 工作单元。

(4) FORTRAN 语言程序

```

SUBROUTINE INT21(X, Y, XO, N, P, YO)
  DIMENSION X(N), Y(N), P(N)
  DO 200 J=1, N
    P(J)=1.0
  DO 100 I=1, N
    IF (I-J) 80, 90, 80
  80 P(J)=P(J)*(XO-X(I))/(X(J)-X(I))
  90 CONTINUE
  200

```

```

100 CONTINUE
200 CONTINUE
    YO = 0.0
    DO 300 I = 1, N
        YO = YO + P(I)*Y(I)
300 CONTINUE
    RETURN
END

```

3. 等距二元抛-抛插值^[4]

(1) 功能: 对二元变量插值表进行抛-抛插值。

(2) 计算方法:

设插值区间 $[a, b]$ 被等分为 $N1-1$ 个区间, 节点数为 $N1$ 。

$$h = \frac{b-a}{N1-1}$$

$$i_1 = \left[\frac{x-a}{h} + \frac{1}{2} \right] = \frac{x-a}{h} + \frac{1}{2} \text{ 的整数部分。}$$

$$i = \begin{cases} 1 & i_1 < 1 \\ i_1 & 1 \leq i_1 \leq N1-2 \\ N1-2 & i_1 > N1-2 \end{cases}$$

$$t = \frac{x-a}{h} - i$$

$$y(x) = C_{i-1} y_{i-1} + C_i y_i + C_{i+1} y_{i+1}$$

$$C_{i-1} = \frac{1}{2}(t^2 - t)$$

$$C_i = 1 - t^2$$

$$C_{i+1} = \frac{1}{2}(t^2 + t)$$

(3) 哑元说明:

X : 实变量, 第一自变量;

Y : 实变量, 第二自变量;

$N1$: 整变量, 第一自变量节点数;

$N2$: 整变量, 第二自变量节点数;

A : 体积为 2 的一维实数组, 放第一自变量的两端点值;

B : 体积为 2 的一维实数组, 放第二自变量的两端点值;

YO : 体积为 $N1 \times N2$ 的二维实数组, 二维插值表, 矩阵形式如下:

$YO(1, 1), YO(1, 2), \dots, YO(1, N2),$

$YO(2, 1), YO(2, 2), \dots, YO(2, N2),$

$\vdots$

$YO(N1, 1), YO(N1, 2), \dots, YO(N1, N2)$

RES : 实变量, 插值结果。

(4) 所调用的过程:

SUBROUTINE INT31(X, N1, N2, I, A, YO, Y)

(5) FORTRAN 语言程序

```
SUBROUTINE INT32(X, Y, N1, N2, A, B, YO, RES)
  DIMENSION A(2), B(2), YO(N1, N2), Y1(3)
  H = (B(2) - B(1)) / (N2 - 1.0)
  I = (Y - B(1)) / H + 0.5
  IF (I - 1) 91, 95, 95
95 IF (I - (N2 - 2)) 92, 96, 96
96 I = N2 - 2
  GO TO 92
91 I = 1
92 I2 = I + 2
  DO 93 I1 = I, I2
  I11 = 1 - I + I1
93 CALL INT31(X, N1, N2, I1, A, YO, Y1(I11))
  T = (Y - B(1)) / H - I
  CO = 0.5 * T * (T - 1.0)
  C1 = 1.0 - T * T
  C2 = 0.5 * T * (1.0 + T)
  RES = CO * Y1(1) + C1 * Y1(2) + C2 * Y1(3)
  RETURN
END
```

4. 等距一元插值^[4]

(1) 功能: 对一变元等距插值表进行抛物插值, 专供 INT 32 调用。

(2) 计算方法: 同等距二元抛-抛插值。

(3) 哑元说明:

X: 实变量, 第一自变量;

N1: 整变量, 第一自变量节点个数;

N2: 整变量, 第二自变量节点个数;

I: 整变量, 第二个自变量的第 I 条曲线;

A: 体积为 2 的一维实数组, 第一自变量两端点值;

YO: 体积为 $N1 \times N2$ 的二维实数组, 二维插值表;

Y: 实变量, 插值结果。

(4) FORTRAN 语言程序

```
SUBROUTINE INT31(X, N1, N2, I, A, YO, Y)
  DIMENSION YO(N1, N2), A(2)
  H = (A(2) - A(1)) / (N1 - 1.0)
  I1 = (X - A(1)) / H + 0.5
  IF (I1 - 1) 6, 7, 7
```

7 IF (I1 - (N1 - 2)) 8, 9, 9

9 I1 = N1 - 2

GO TO 8

6 I1 = 1

8 AI = I1

T = (X - A(1))/H - AI

CO = 0.5 * T * (T - 1.0)

C1 = 1.0 - T * T

C2 = 0.5 * T * (1.0 + T)

Y = CO * YO(I1, I) + C1 * YO(I1 + 1, I) + C2 * YO(I1 + 2, I)

RETURN

END

[例 1-2] 推力减额 t 和伴流分数 w 是方形系数 C_B 和长宽比 L/B 的函数, 如图 1-1、1-2 所示。用二元抛-抛插值求 $C_B = 0.746$, $L/B = 6.82$ 时的 t 和 w 。

我们只要在源程序中写入

CALL INT32 (0.746, 6.82, 5, 6, A1, B1, YO5T, T)

CALL INT32 (0.746, 6.82, 5, 6, A1, B1, YO5W, W)

即调用 INT32 子程序, 经啞实结合, 便可求得 t 和 w 。

其中: $A1(1) = 0.6$,

$A1(2) = 0.8$,

$B1(1) = 5.0$,

$B1(2) = 7.5$ 。

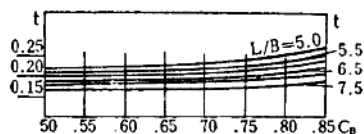


图 1-1

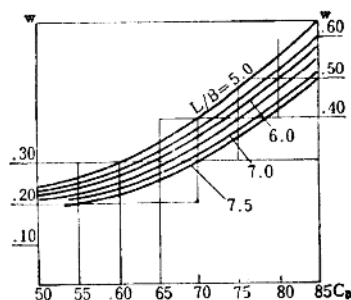


图 1-2

YO5T:

表 1-1

C_B	L/B					
	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
0.60	0.223	0.212	0.200	0.190	0.180	0.170
0.65	0.226	0.214	0.202	0.192	0.181	0.170
0.70	0.230	0.217	0.205	0.194	0.182	0.170
0.75	0.239	0.224	0.210	0.197	0.186	0.172
0.80	0.250	0.235	0.220	0.205	0.190	0.175

YO5T 和 YO5W 均为 5×6 的数组, 数组元素如表 1-1、1-2 所列。

YO5W:

表 1-2

C_B	L/B					
	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0	7.5
0.60	0.296	0.282	0.269	0.255	0.241	0.227
0.65	0.341	0.323	0.306	0.288	0.272	0.257
0.70	0.400	0.380	0.360	0.340	0.319	0.297
0.75	0.470	0.445	0.420	0.395	0.371	0.346
0.80	0.543	0.516	0.490	0.462	0.435	0.410

5. 样条插值^[2]

“样条”是绘图员用来描绘光滑曲线的一种简单的工具。在工程上, 例如船体的放样, 为了把一些指定点按某种要求联成一条光滑曲线, 往往用一条富有弹性的细长木条(称为样条)把各点联接起来, 使它们在联接处也是光滑的, 这样就把所有的点联成一条光滑曲线, 并使在联接处具有连续曲率。

我们对绘图员描画样条曲线进行数学模拟, 得到的函数称为样条函数。样条函数的概念在本世纪四十年代就产生了, 但得到广泛的重视与应用是在六十年代。近年来, 样条函数的理论和应用发展很快。在样条函数中, 三次样条函数(也称自然样条)最为常用。因此这里仅介绍三次样条函数。

(1) 三次样条插值

设在区间 $[a, b]$ 上给定一组节点 X :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

和一组坐标值 $Y: y_0, y_1, \dots, y_N$ 。

如果函数 $S(x)$ 具有如下性质:

(i) 在每个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$ 上 $S(x)$ 是一个不超过三次的多项式;

(ii) $S(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, N$;

(iii) $S(x) \in C^2[a, b]$, 即 $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上为二次连续可微, 则称 $S(x)$ 为在节点 X 上插值于 Y 的三次样条函数。有时, 为了表示 $S(x)$ 对函数值 y 的依赖关系, 也常记为 $S(y, x)$ 。

由此可见, 样条函数的基本思想是很简单的, 它无非是把插值函数逐段多项式化, 使整个函数成为“装配式”的, 同时又保证在接缝处具有一定的光滑性。因此, 它既保留了低次多项式在表达上的简便性, 又克服了它的不灵活性、不稳定性等缺点, 适合于数值计算的需要。

(2) 三次样条函数 $S(x)$ 的表达式

由三次样条函数的定义可知, 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上 $S''(x)$ 是线性函数, 用 M_k , $k = 0, 1, \dots, N$, 表示函数 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x)$ 在 x_k 处的值:

$$S''(x_k) = M_k, \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

则在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上 $S''(x)$ 可以写成

$$S''(x) = M_{k-1} \frac{x_k - x}{l_k} + M_k \frac{x - x_{k-1}}{l_k}, \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k \quad (1)$$

其中 $l_k = x_k - x_{k-1}$, 对 $S''(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上积分二次, 并要求 $S(x_k) = y_k$, 则在区间

$[x_{k-1}, x_k]$ 可得

$$S'(x) = -\frac{M_{k-1}(x_k - x)^2}{2l_k} + \frac{M_k(x - x_{k-1})^2}{2l_k} + \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} - \frac{(M_k - M_{k-1})}{6} l_k \quad (2)$$

以及

$$S(x) = \frac{M_{k-1}(x_k - x)^3}{6l_k} + \frac{M_k(x - x_{k-1})^3}{6l_k} + \left(\frac{y_k}{l_k} - \frac{M_k}{6}\right)(x - x_{k-1}) + \left(\frac{y_{k-1}}{l_k} - \frac{M_{k-1}}{6}\right)(x_k - x) \quad (3)$$

从(2)式可得

$$\begin{cases} S'(x_k^-) = \frac{l_k}{6} M_{k-1} + \frac{l_k}{3} M_k + \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} \\ S'(x_k^+) = -\frac{l_{k+1}}{3} M_k - \frac{l_{k+1}}{6} M_{k+1} + \frac{y_{k+1} - y_k}{l_{k+1}} \end{cases} \quad (4)$$

因为要求 $S'(x)$ 在连接点上连续,也就是说要求

$$S'(x_k^+) = S'(x_k^-)$$

所以应有

$$\frac{l_k}{6} M_{k-1} + \frac{l_k + l_{k+1}}{3} M_k + \frac{l_{k+1}}{6} M_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{l_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \quad (5)$$

由于这种利用 $y'(x)$ 连续性的方法仅对 $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ 可行,所以(5)式只有 $N-1$ 个方程。为了求解 $N+1$ 个未知数 $M_0, M_1, \dots, M_N$, 还需要添加两个条件,即所谓边界条件,例如,可以假设端点的切线斜率为已知:

$$S'(a) = y'_0, \quad S'(b) = y'_N$$

则由(4)式可得

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= \frac{6}{l_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{l_1} - y'_0 \right) \\ M_{N-1} + 2M_N &= \frac{6}{l_N} \left(y'_N - \frac{y_N - y_{N-1}}{l_N} \right) \end{aligned}$$

我们就是要求解(5)式和这两个方程的联立方程组。

一般可以写成

$$\begin{cases} 2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0 \\ \mu_N M_{N-1} + 2M_N = d_N \end{cases} \quad (6)$$

引入记号

$$\lambda_k = \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}}, \quad \mu_k = 1 - \lambda_k \quad (k=1, 2, \dots, N-1)$$

则(5)式可以写成

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = 6 \times \frac{\frac{y_{k+1} - y_k}{l_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k}}{l_k + l_{k+1}} \quad (k=1, 2, \dots, N-1) \quad (7)$$

这个方程组称为三弯矩方程。

联合(6)式和(7)式可得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & \lambda_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_{N-1} & 2 & \lambda_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_N & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{N-2} \\ M_{N-1} \\ M_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-2} \\ d_{N-1} \\ d_N \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中 d_j ($j=1, 2, \dots, N-1$) 表示(7)式的右端。

(6) 式给出了样条函数的边界条件。一般来说, 根据不同的要求, 可以有不同的边界条件。常用的非周期边界条件简列于下:

$x=a$

$$(i) \quad 2M_0 + M_1 = \frac{6}{l_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{l_1} - y'_0 \right)$$

$$(ii) \quad 2M_0 = 2y''_0$$

$$(iii) \quad 2M_0 + \lambda_0 M_1 = d_0$$

$x=b$

$$(i) \quad M_{N-1} + 2M_N = \frac{6}{l_N} \left(y'_N - \frac{y_N - y_{N-1}}{l_N} \right)$$

$$(ii) \quad 2M_N = 2y''_N$$

$$(iii) \quad \mu_N M_{N-1} + 2M_N = d_N$$

求解三次样条函数的步骤可归纳如下:

(i) 确定边界条件;

(ii) 用“追赶法”解方程组(8)式, 求出节点上的二阶导数 $\{M_k\}$ 。

“追赶法”解题思路如下:

设方程组

$$\left. \begin{aligned} b_1 x_1 + c_1 x_2 &= d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 &= d_3 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{N-1} x_{N-2} + b_{N-1} x_{N-1} + c_{N-1} x_N &= d_{N-1} \\ a_N x_{N-1} + b_N x_N &= d_N \end{aligned} \right\}$$

由方程(1)得 $x_1 = d_1/b_1 - c_1/b_1 \cdot x_2$

代入方程(2)得

$$x_2 = \frac{d_2 - \frac{a_2 d_1}{b_1}}{-a_2 \frac{c_1}{b_1} + b_2} - \frac{c_2}{-a_2 \frac{c_1}{b_1} + b_2} \cdot x_3$$

从第2、第3、 $\dots$ 、第N个方程中逐次消去 $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ 便得到等价的方程组

$$\begin{cases} x_k = q_k \cdot x_{k+1} + z_k & (k=1, 2, \dots, N-1) \\ x_N = z_N \end{cases}$$

式中: $q_k = -c_k/p_k$

$$p_k = a_k q_{k-1} + b_k$$

$$z_k = \frac{d_k - a_k \cdot z_{k-1}}{p_k}$$

到此为止,是“追”的过程,从 x_1 一直追到 x_N , 最后求得 x_N 。求得 x_N 后,便可“赶”回去,依次计算得 $x_{N-1}, x_{N-2}, \dots, x_1$ 。

(iii) 将 $\{M_k\}$ 代入样条函数的分段表示式 (3), 求分段多项式的系数及任一点的函数值。

(3) 三次样条函数 $s(x)$ 的计算框图

若已知边界条件为两端点的一阶导数值 y'_0, y'_N , 则计算框图如图 1-3 所示。

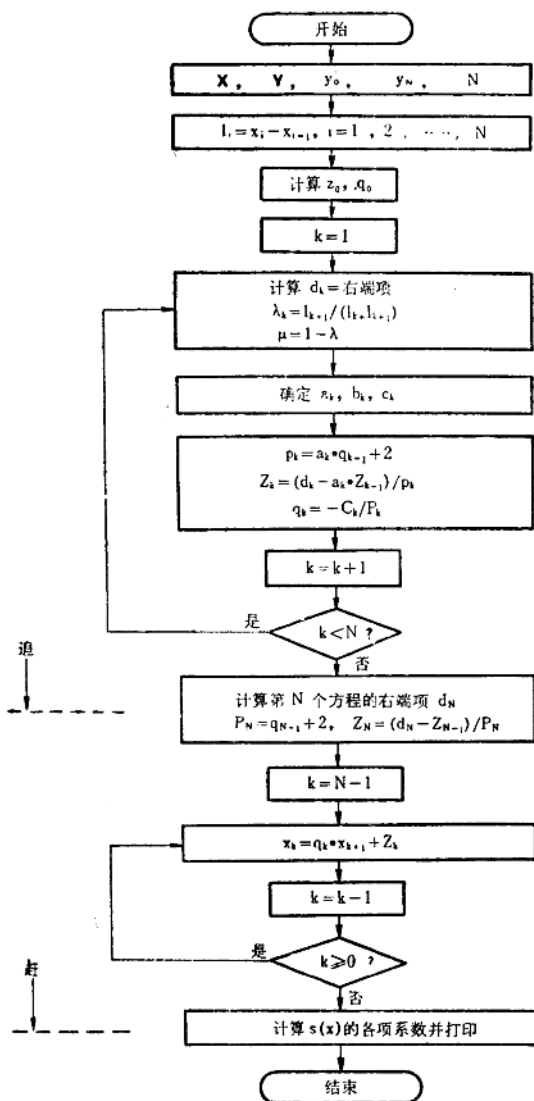


图 1-3