普通高等教育
兵工类规划教材

邓必鑫　编著

信号分析基础

北京理工大学出版社

信号分析基础

邓必鑫 编著

北京理工大学出版社

（京）新登字 149 号

内 容 简 介

本书是高等工科院校电子类专业基础课教材。它全面系统地论述了信号分析的基本原理。内容包括傅里叶分析，模拟线性系统中的信号分析，数字线性系统中的信号分析，随机过程和随机信号分析，非线性系统中的信号分析。

本书特点是起点较高，取材广泛，内容丰富，侧重分析方法，注重理论的科学性。本书文字简炼，叙述简明，重点突出，深入浅出，每章末都配有习题。

本书适用于电子类专业的硕士研究生和高年级本科生，也适用于广大科技工作者参考。

信号分析基础

邓必鑫　编著

*

北京理工大学出版社出版发行

各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

850×1168 毫米　32 开本16.25　印张　421 千字

1994 年 4 月第一版　1994 年 4 月第一次印刷

ISBN7－81013－927－8/TN·48

印数：1－2000 册　定价：15.20 元

出版说明

遵照国务院国发〔1978〕23号文件精神，中国兵器工业总公司承担全国高等学校兵工类专业教材的规划、编审、出版的组织工作。自1983年兵总教材编审室成立以来，在广大教师的积极支持和努力下，在国防工业出版社、兵器工业出版社和北京理工大学出版社的积极配合下，已完成两轮兵工类专业教材的规划、编审、出版任务。共出版教材211种。这批教材出版对解决兵工专业教材有无问题、稳定教学秩序、促进教学改革、提高教学质量都起到了积极作用。

为了使兵工类专业教材更好地适应社会主义现代化建设需要，特别是国防现代化培养人才的需要，反映国防科技的先进水平，达到打好基础、精选内容、逐步更新、利于提高教学质量的要求，我们以提高教材质量为主线，完善编审制度、建立质量标准、明确岗位责任，建立了由主审审查、责任编委复审和教编室审定等5个文件。并根据兵工类专业的特点，成立了九个专业教学指导委员会和两个教材编审小组。以加强对兵工类专业教材建设的规划、评审和研究工作。

为了贯彻国家教委提出的"抓好重点教材，全面提高质量，适当发展品种，力争系统配套，完善管理制度，加强组织领导"的"八五"教材建设方针。兵总教材编审室在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1991年制订了1991～1995年兵工类专业教材编写出版规划。共列入教材220种。这些教材都是从学校使用两遍以上、实践证明是比较好的讲义中遴选的。专业教学指导委员会从兵工专业教材建设的整体考虑对编写大纲进行了审查，认为符合兵工专业培养人才要求，符合国家出版方针。这批教材的出版必将

为兵工专业教材的系列配套，为教学质量的提高、培养国防现代化人才，为促进兵工类专业科学技术的发展，都将起到积极的作用。

本教材由甘圣予主审，经中国兵器工业总公司教材编审室审定。

限于水平和经验，这批教材的编审出版难免有缺点和不足之处，希望使用本教材的单位和广大读者批评指正。

中国兵器工业总公司教材编审室

1993 年 6 月

前　言

多年来，我们给硕士研究生开设了这门课程，并编写了讲义，本书是在讲义的基础上编写而成的，并结合近年来电子技术的发展，在内容上作了相应的加深和拓宽。本书可作为硕士研究生和本科高年级学生的教材，亦可作为科研工作人员和工程技术人员的参考书。

随着电子技术的不断发展，信号检测、信号处理、随机信号和非线性系统等理论的应用日渐广泛。作为电子类专业的硕士生和本科高年级学生，不仅应该掌握确定信号和线性系统的基本知识，还应该掌握确定信号和线性系统的较深入的知识、随机信号分析的知识、非线性系统对各种信号的响应的知识等等。本书就是为此而编写的一门教材。

本书共九章，参考学时约为68学时。第一章讨论傅里叶分析，重点介绍快速傅里叶变换算法及其应用。第二章深入讨论模拟信号和线性模拟系统的几个专门问题。第三章深入讨论数字信号和线性数字系统的几个专门问题。第四章讨论模拟信号和摸拟系统的数字处理，较系统地介绍了均方逼近和内插逼近的方法和应用。第五章介绍沃尔什函数和沃尔什变换。第六章介绍随机过程的基本概念和基本理论。第七章讨论随机信号分析，作为应用，简单介绍信号检测的基本方法。第八章讨论非线性系统中的几种信号分析方法。第九章讨论一类应用较为广泛的齐次非线性系统的信号分析方法。

本书的特点是：(1)起点较高，是在大学课程信号与线性系统、工程数学的基础上，用较多的数学工具深入讨论信号与系统中的有关内容；(2)科学性强，本书简要地介绍了傅里叶变换、离散傅里

叶变换、拉普拉斯变换、z 变换、沃尔什变换、希尔伯特变换、δ 函数、随机过程等数学知识，在此基础上，各部分内容都给出了较严谨的数学推导，但是严而有度，不去追求不必要的数学严密性；(3)取材广泛、内容丰富，包括了模拟信号和数字信号、确定信号和随机信号、线性系统和非线性系统等多方面的内容，本书介绍的模拟信号、模拟系统与数字信号、数字系统的关系，各种逼近技术、齐次非线性系统的内容，在国内外教材和专著中还不多见；(4)实用性强，本书介绍的虽然是基础理论的知识，但取材注意了信号检测、信号处理等后续课和应用的针对性，并在各部分内容尽量介绍理论的应用；(5)文字简炼、叙述简明，力求重点突出、深入浅出、图文并茂，重要的概念和理论都简明地介绍了它的意义和作用，并列举了大量例题。

在学习本课之前，读者应具备信号与线性系统、积分变换、概率论、复变函数等基础课程的知识。

北京信息工程学院甘圣予教授详细审阅了全书，提出了很多宝贵的建议；在本书出版过程中，得到了同行教师的热情支持和主管教材工作的领导的热情帮助，一并深表谢意。由于本人水平有限，难免有错误和不妥之处，恳请读者批评指出。

作者

1993 年 6 月

目　录

第一章　傅里叶分析

傅里叶（Fourier）变换是信号分析中最重要的数学工具。本章将深入地研究傅里叶变换、傅里叶级数和离散傅里叶变换之间的关系，并着重介绍离散傅里叶变换的数值计算方法——快速傅里叶变换算法。

§1.1　傅里叶变换

傅里叶变换是信号分析的最主要的数学工具。其原因是：（1）信号分析的基本方法是将复杂的信号分解为简单的信号来分析。傅里叶级数和傅里叶变换可以实现这一点，它可将复杂的信号分解为不同频率的正弦分量。正弦信号的主要特征是频率、振幅和相位，因而可形成直观的频谱图分析法。（2）过去对信号和系统的分析主要是在时域中进行，即时域法，有了傅里叶变换以后，分析就由时域转到频域中来进行，而且频域法成了分析的主要方法。

线性连续时间系统的数学模型是线性微分方程，时域法是直接求解微分方程，但对于复杂信号的求解就很困难，然而通过傅里叶变换，时域的微分方程求解问题就可转化成频域的较为简单的代数方程来解决。在时域中，系统输入与输出的关系是通过卷积积分来联系，即

$$g(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

卷积积分计算很困难分析也不方便，若通过傅里叶变换就可以将卷积运算转化为频域的简单的乘积运算，即

$$G(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

正是傅里叶变换在本课程中非常重要，以后各章都要用到，本节将概括地介绍傅里叶变换的基本概念和主要性质。

一、傅里叶变换的概念

信号 $f(t)$ 的**傅里叶变换**定义为

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

傅里叶逆变换可以得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

为了简便，傅里叶变换和傅里叶逆变换分别记为 FT 和 IFT。

傅里叶变换对记为

$$f(t) \xleftrightarrow{FT} F(\omega)$$

在不发生与其它变换对混淆的情况下，简记为

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

函数 $F(\omega)$ 称为信号 $f(t)$ 的 **频谱函数**，它一般是复函数，令

$$F(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

其中 $A(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 的**振幅函数**，它代表信号中各频率分量的相对大小；$\varphi(\omega)$ 是 $F(\omega)$ 的**相位函数**，它代表信号中各频率分量之间的相位关系。通常 $A(\omega)$ 与 $\varphi(\omega)$ 的曲线分别称为信号的 **振幅频谱**与**相位频谱**。

容易证明，若 $f(t)$ 是实信号，则 $F^*(\omega) = F(-\omega)$，其中 $*$ 表示复数共轭，因此，振幅函数 $A(\omega)$ 是偶函数，相位函数 $\varphi(\omega)$ 是奇函数。

若 $f(t)$ 是实信号，则

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\omega)\cos[\omega t + \varphi(\omega)]\mathrm{d}\omega$$

由此说明，非周期信号可以分解为 0 到 ∞ 之间的所有频率的正弦分量的叠加。正弦分量的振幅为 $\frac{A(\omega)}{\pi}\mathrm{d}\omega$。注意信号的振幅函数 $A(\omega)$ 并不是分量的振幅，而是密度函数。

函数的 FT 存在应该满足一定的条件，体现在下面定理。

狄利克莱（Dirichlet）定理 若函数 $f(t)$ 在$(-\infty, +\infty)$ 上满足下列条件：

（1）$f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\mathrm{d}t < \infty$$

（2）$f(t)$ 在任一有限区间上满足狄利克莱条件，即连续或有有限个第一类间断点，和只有有限个极值点

则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega = \begin{cases} f(t), & t \text{ 是 } f(t) \text{ 的连续点} \\ \dfrac{f(t^+) + f(t^-)}{2}, & t \text{ 是 } f(t) \text{ 的间断点} \end{cases}$$

其中 $f(t^+)$ 和 $f(t^-)$ 分别表示函数 $f(t)$ 在点 t 的右极限和左极限。

二、傅里叶变换的基本性质

1. 线性性质

若 $\quad f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$

则 $\quad a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \longleftrightarrow a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$

其中 a_1、a_2 是任意常数。

此性质说明 FT 是一种线性运算，它满足叠加原理。

2. 时移性质

若 $\quad f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$

则 $\quad f(t - t_0) \longleftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$

其中 t_0 是任意常数。

此性质说明，当 $t_0 > 0$，信号 $f(t)$ 在时域中沿时间轴右移（延

时)t_0 等效于在频域中频谱乘以因子 $e^{-j\omega t_0}$。也就是说，信号右移后，其振幅频谱不变，而相位频谱变化 $-\omega t_0$。当 $t_0<0$，可作类似讨论。时移性质是证明卷积定理的关键。

3. 频移性质

若 $\quad f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$

则 $\quad f(t)e^{j\omega_0 t}\longleftrightarrow F(\omega-\omega_0)$

其中 ω_0 为任意常数。

此性质说明，当 $\omega_0>0$，$F(\omega)$ 在频域中沿频率轴右移 ω_0 等效于在时域中信号乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$。当 $\omega_0<0$，可作类似讨论。

因为

$$f(t)\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}[f(t)e^{j\omega_0 t}+f(t)e^{-j\omega_0 t}]$$

$$\longleftrightarrow\frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0)+F(\omega-\omega_0)]$$

所以，若信号乘以载波信号 $\cos\omega_0 t$，等效于 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 一分为二，分别沿频率轴向左和向右各平移 ω_0，这就是频谱搬移的实现定理。

4. 尺度变换性质

若 $\quad f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$

则 $\quad f(at)\longleftrightarrow\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

其中 a 是非零常数。特别是，当 $a=-1$ 时，有

$$f(-t)\longleftrightarrow F(-\omega)$$

此性质说明，信号在时域中压缩 ($a>1$) 等效于在频域中扩展；反之，信号在时域中扩展($a<1$)则等效于在频域中压缩。对于 $a=-1$，它说明信号在时域中沿纵轴反褶等效于在频域中频谱也沿纵轴反褶。

5. 对称性质

若 $\quad f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$

则 $\quad F(t)\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

特别是，若 $f(t)$ 为偶函数，则 $F(t)\longleftrightarrow 2\pi f(\omega)$，这说明时域和频域的对称性成立。即波形 $f(t)$ 的频谱为 $F(\omega)$，则波形 $F(t)$ 的频谱若不计一个常数倍仍为函数 $f(\omega)$。

6. 共轭性质

若 $$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

则 $$f^*(t)\longleftrightarrow F^*(-\omega)$$

7. 微分性质

若 $$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

则 $$f'(t) = \mathrm{j}\omega F(\omega)$$

一般有

$$f^{(n)}(t)\longleftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$$

此性质说明，在时域中 $f(t)$ 对 t 取 n 阶导数等效于在频域中 $f(t)$ 的频谱 $F(\omega)$ 乘以 $(\mathrm{j}\omega)^n$。这个性质是时域的线性微分方程转化成频域的代数方程的依据。

类似地，频域有微分性质

若 $$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

则 $$-\mathrm{j}tf(t)\longleftrightarrow F'(\omega),$$

一般有 $$(-\mathrm{j}t)^n f(t)\longleftrightarrow F^{(n)}(\omega)$$

8. 积分性质

若 $$f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$$

则 $$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \longleftrightarrow \frac{1}{\mathrm{j}\omega}F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

其中 $\delta(\omega)$ 表示 δ 函数，详细讨论见§1.2。

9. 时域卷积定理

函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**卷积**定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau)f_2(\tau)\mathrm{d}\tau$$

若 $$f_1(t)\longleftrightarrow F_1(\omega),\ f_2(t)\longleftrightarrow F_2(\omega)$$

则 $$f_1(t) * f_2(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)F_2(\omega)$$

卷积定理说明，在时域中两个信号的卷积等效于在频域中频谱的乘积。这个特性是使信号分析从时域转到频域的主要依据，因此卷积定理在信号分析中占有特别重要的地位，以后将会看到它的许多应用。

10. 频域卷积定理

若 $$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega), f_2(\omega) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$

则 $$f_1(t)f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

11. 相关定理

$f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**互相关函数**定义为

$$r_{f_1f_2}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2^*(\tau)\mathrm{d}\tau$$

若 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$，$r_{ff}(t)$ 称为**自相关函数**，记为 $r_f(t)$。因为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积公式可改写为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t+\tau)f_2(-\tau)\mathrm{d}\tau$$

因此相关函数与卷积关系为

$$r_{f_1f_2}(t) = f_1(t) * f_2^*(-t)$$

显然，若 $f_2(t)$ 是实偶函数，则相关函数和卷积积分是一回事。

若 $$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega),$$

则 $$r_{f_1f_2}(t) \longleftrightarrow F_1(\omega)F_2^*(\omega)$$

特别，若 $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$，则

$$r_f(t) \longleftrightarrow |F(\omega)|^2$$

12. 帕塞瓦尔 (Parseval) 定理

若 $$f_1(t) \longleftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \longleftrightarrow F_2(\omega)$$

则 $$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2^*(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2^*(\omega)\mathrm{d}\omega$$

此公式称为**帕塞瓦尔公式**。

帕塞瓦尔公式建立了两个函数的乘积积分与它们频谱之间的

简明关系。在信号分析中这是一个重要的公式，以后经常用到。

特别，若 $f_1(t)=f_2(t)=f(t)$ ，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

利用角频率与线频率的关系 $\omega=2\pi f$ ，则

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|F(f)|^2\mathrm{d}f$$

以上两个关系式，通常称为**能量定理**。

上式表明，时域内信号的能量等于频域内信号的能量，即信号经过 FT，其总能量保持不变，符合能量守恒定律。

三、信号的矩与傅里叶变换

信号的 n 阶**矩**定义为

$$m_n=\int_{-\infty}^{\infty}t^n f(t)\mathrm{d}t$$

信号的矩与信号的 FT 有如下关系。

定理 若 $f(t)\longleftrightarrow F(\omega)$

则 $$m_n=\mathrm{j}^n F^{(n)}(0)$$

证 将 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ 中的 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$ 展成马克劳林(Maclaurin) 级数，得

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-j\omega t)^n}{n!}\Big]\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{j})^n m_n\frac{\omega_n}{n!}$$

另一方面，将 $F(\omega)$ 展成马克劳林级数

$$F(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\omega^n$$

对比上面两式，得到

$$F^{(n)}(0)=(-\mathrm{j})^n m_n$$

因此 $$m_n=\mathrm{j}^n F^{(n)}(0)$$ ▌