

中国机械工程学会
第一届全国机械传动年会
论文选集

第一分册 齿轮传动

中国机械工程学会机械传动专业学会编



机械工业出版社

24083
-0
1

78.24083
140
2

中国机械工程学会 第一届全国机械传动年会论文选集

第一分册 齿轮传动

中国机械工程学会机械传动专业学会编



机械工业出版社

20016/05

**中国机械工程学会
第一届全国机械传动年会论文选集**

第一分册 齿轮传动

中国机械工程学会机械传动专业学会编

*

机械工业出版社出版 (北京苏州胡同141号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经营

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 $9 \frac{5}{8}$ · 插页 1 · 字数 224 千字

1965年10月北京第一版·1965年10月北京第一次印刷

印数 0,001—4,100 · 定价 (科六) 1.30元

*

统一书号: 15033·3719

編者的話

中国机械工程学会于一九六三年十二月二十日至二十七日，在太原市召开了中国机械工程学会机械傳动专业学会成立大会暨第一届全国机械傳动年会。

本届年会收到了各省市、自治区机械工程学会选送的学术论文共二百二十一篇。其中一般齿輪傳动方面的八十九篇；机构学和行星輪系方面的四十三篇；液压和液力傳动方面的四十篇；圓弧齿輪方面的三十一篇；其他方面的十九篇。

由于篇幅所限，本論文集仅編入了由本届年会評选出的論文。本論文集共分三册出版，第一分册为齿輪傳动，包括十一篇論文；第二分册为机构和行星輪系，包括十二篇論文；第三分册为液压和液力傳动，包括七篇論文。在每个分册的附录里，列出了各相应专题的本届年会所收到的全部論文目录。

本論文集的論文中，有些是生产中技术經驗的总结，有些是有理論分析并經实验验证的研究成果，也有些仅是理論推导和分析的論文。我們希望通过年会的学术交流和本論文集的刊印，对于今后的机械傳动科学研究和生产技术水平的提高能有所帮助。而且希望在今后学会的活动中，前两种論文的比重将会有所增加。

本論文集中所有論文均系作者本人的見解，不代表学会的意見。学会欢迎讀者对本論文集提出批評和建議，意見請寄至：北京第一机械工业部机械科学研究院轉中国机械工程学会机械傳动专业学会秘书处。

中国机械工程学会机械傳动专业学会

目 次

編者的話

- 共軛曲面原理及其应用的进展.....陈滌新、陈志新(1)
- 兩軸交叉齒輪傳动的几个特殊問題.....董学朱(13)
- 研究空間齒輪根切的新方法.....国 楷(29)
- 圓弧齒輪61型齒廓的蝸杆蝸輪傳动的研究.....
.....朱景梓、高国柱、黄力人、魏光譜、楊兰春、謝佩娟(36)
- 从潤滑和接触强度的观点分析蝸杆傳动的质量.....郭克强(49)
- β 傳动.....鮑显威(64)
- 圓弧-泛摆綫嚙合的工作原理和加工方法的新研究曹存昌(81)
- 精密齒輪箱的傳动精度分析.....孙麟治、謝金瑞(94)
- Y 7131型齒輪磨床的調整对磨齿精度的理論分析.....任傳丰(108)
- 齒輪加工机床和螺紋加工机床傳动精度的計算和分析.....王建琨(122)
- 滾齿机傳动精度計算.....陈启复(131)
- 附录** 第一届全国机械傳动年会齒輪傳动部分論文目录索引.....(147)

共軛曲面原理及其应用的进展

陈滌新、陈志新

本文对文献[1]作了进一步的发展,包括原理、应用及前景三部分。

在原理方面,主要論述共軛曲面原理的研究范疇,共軛曲面整体几何学中的奇异解,以及共軛曲面微分邻域几何学的研究成果。在本文內,推导出了計算誘导曲率值的計算公式,并討論了 Euler-Savary 公式在空間傳动中的形式。

在应用方面,本文主要討論齿曲面加工方面的进展。着重闡述第三曲面●的形成,“近似互換性”条件及有控点接触等三方面的問題。此外,对螺旋槽加工方面及两个新的应用领域,即傳动精度分析和切削运动学方面也作了論述。

在发展前景方面,本文提出了发展“彈性共軛曲面原理”的課題。

(一) 原理方面的进展

由于空間齿輪傳动日益广泛地被采用,以及即使在平行軸傳动时,也开始采用空間傳动的原則,即以螺旋齿曲面来完成或部分地完成接触的連續性,例如螺旋齿輪、圓弧点啮合齿輪等等。所以,对共軛曲面原理的研究,各国都很重視^{[1][2][3][4][5]}。在苏联,有人称这个原理为齿輪啮合理論^[2]。在美国,有人称之为运动几何学^[3],以区别于研究靜止空間的古典几何学。在日本,有人称之为齿形論^[5]。作者們建議称为共軛曲面原理。因为,首先,这个原理不仅适用于齿曲面,同样也适用于凸輪曲面,若称之为齿輪啮合理論或齿形論,就貶低了其所能概括的涵义。第二,“共軛”两字一方面包含共軛运动的条件,而且还含有所研究的曲面具有成对性的意思,而运动几何学則只側重了“运动”,忽略了成对性。第三,在研究任何共軛曲面問題时,共軛运动与“曲面”是不可分割、相互联系的两个方面,必須同时进行分析研究。因此,单纯地称为啮合理論,忽略了“曲面”,也是不够完善的。

近年来,共軛曲面原理在应用性理論方面的进展有如下两个特点。第一,純分析法日益广泛地被采用。这一方面是由于空間傳动齿曲面的研究,不便于采用图解分析混合法;另一方面,則是由于近年来电子計算机获得飞跃发展^[6]的緣故。例如,以采用半經驗半分析和图解分析混合法解决空間齿曲面問題著称于世界的 Gleason 公司,近年来也改变研究方針,开始轉向采用純分析法^{[4][7]}。第二,各类共軛曲面問題都得到广泛的研究和应用。尤其是第Ⅲ类共軛曲面問題,近年来也开始被重視^[4,8]。

在基础理論方面,共軛曲面原理主要的进展有三方面:对研究范疇的进一步明确,对共軛曲面整体几何学中奇异解的探討,以及对共軛曲面微分邻域(指二阶及二阶以下的微分量)几何学的研究。

● 这里的“第三曲面”系指形成共軛曲面的輔助曲面(媒介曲面或产形面)。——編者注

一) 共軛曲面原理的研究范疇

1) 研究范疇設有三个空間 O 、 I 、 II ，其中 O 代表参考空間， I 、 II 代表运动空間。并設 I 、 II 空間相对于 O 空間的运动各为 ϕ_1 、 ϕ_2 。运动 ϕ_1 、 ϕ_2 代表最广义的运动，它們可以是既有轉动又有移动的运动，并且可以是非等速的运动。再設曲面 A 和 I 空間固連，曲面 \bar{A} 和 II 空間固連。假如当 I 空間，包括其中的曲面 A ，相对于 O 空間按 ϕ_1 运动时，曲面 A 能連續地推动着 \bar{A} ，并随之推动着 II 空間相对于 O 空間完成运动 ϕ_2 ，我們就称曲面 A 、 \bar{A} 在共軛运动 ϕ_1 、 ϕ_2 条件下，是互为共軛的曲面。此时， A 、 \bar{A} 間的瞬时接触曲綫或接触点，在 O 空間內所构成的軌迹（曲面或曲綫）称为接触軌迹，以符号 B 代表。

共軛曲面原理所研究的范疇，就是揭示 A 、 \bar{A} 、 B 、 ϕ_1 、 ϕ_2 諸參量間的內在联系，并用数学的形式把它們表达出来，以指导生产实践。这种內在联系可以分成两大类：第一，是共軛曲面間，在整体上的內在联系，可称之为“共軛曲面整体几何学”。第二，是在共軛点邻近，諸微分量間的內在联系，可称之为“共軛曲面微分邻域几何学”。

2) 四类共軛曲面問題根据提法的不同，共軛曲面問題可以分成下列四类：

(1) 第 I 类共軛曲面問題：已知 A 、 ϕ_1 、 ϕ_2 ，求 \bar{A} 、 B 。

(2) 第 II 类共軛曲面問題：已知 B 、 ϕ_1 、 ϕ_2 ，求 A 、 \bar{A} 。Новиков^[9] 提出的研究共軛曲面的方法，仅是此类問題的变态。

(3) 第 III 类共軛曲面問題：已知 A 、 \bar{A} 、 ϕ_1 (或 ϕ_2)，求 B 、 ϕ_2 (或 ϕ_1)。

(4) 第 IV 类共軛曲面問題：已知 A (或 \bar{A})、 B 、 ϕ_1 (或 ϕ_2)，求 \bar{A} (或 A)、 ϕ_2 (或 ϕ_1)。在此类問題中，已知的 A 、 B 不能同时都是曲面。充分必要的条件是，已知 A 曲面和 B 上的一曲綫，或是已知 A 上一曲綫和 B 曲面。不然，可能发生已知条件間的相互矛盾。

上述四类問題中的前三类，已在文献[1]中加以討論。应该指出，在文献[1]和下文 中，运动 ϕ_1 、 ϕ_2 并不是最广义的运动。我們假定 I 、 II 空間相对于参考空間的迴轉軸綫向量 ω_1 、 ω_2 的方向，在傳动过程中都是固定不变的（位置允許变动）。但是由于这一假定符合生产实践中的情况，所以就原理的应用來說，并不会貶低所討論的問題的普遍性。

第 IV 类共軛曲面問題，也可以看成为第 I 类(若已知条件为 A 曲面、 B 上一曲綫及 ϕ_1)，或第 II 类(若已知条件为 A 上一曲綫、 B 曲面及 ϕ_1) 共軛曲面問題的变态。它的求解方法是先求得 ϕ_2 ，然后按第 I 类或第 II 类共軛曲面問題求解。这类問題在生产实践中的应用价值，还有待进一步的探索。

应该指出，从問題提法的可能性讲，还存在着 一类共軛曲面問題(或称为“第 V 类共軛曲面問題”)，即已知 A 、 \bar{A} 、 B ，求 ϕ_1 、 ϕ_2 。鉴于此类問題的已知条件中不包含任何运动参量 (ϕ_1 或 ϕ_2)，实际应用价值不大(至少目前是这样)。同时，为了避免已知条件間的相互矛盾，已知的 A 、 \bar{A} 、 B 間还必须滿足复杂的制約条件。所以暫不列入正式的共軛曲面問題。

二) 共軛曲面整体几何学中的奇异解

1) 尖点解 由文献[1]中的(4.1)式可知，在正常情况下，两共軛曲面上的点是一一对应的(共軛曲面一般有两叶，此处系假定只考虑其中的一叶)。但实际的齿曲面并不是无限扩展的，必然是有边界的，如齿頂圓与齿曲面的交綫等。在这些边界上，对应每一点的法綫方向将不是确定的，它可以由齿曲面的法綫連續地过渡到齿頂面的法綫。該点对应

的法綫方向余弦 $A : B : C$ 不再是定值, 而是在某一範圍內連續地变化。由 (4.1) 式可知, 与該点相共軛的也不再是一点而是一段曲綫, 对应于整段边界綫将是一曲面。此类解称之为“尖点解”。显然, 利用此类解, 可求得用范成法加工时, 齿曲面和齿根曲面之間的过渡曲面的形状。考虑到輪齿弯曲疲劳折断主要发生在过渡曲面处, 因此, 对尖点解的研究是有现实意义的。

2) 空解 (即解不存在) 若某点及其对应的法綫方向, 在給定的共軛运动条件下, 满足下式:

$$U^2 + V^2 < W^2, \quad (1)$$

式中

$$U = Aa_{11} + Ba_{12} + Ca_{13};$$

$$V = Aa_{21} + Ba_{22} + Ca_{23};$$

$$W = Aa_{31} + Ba_{32} + Ca_{33}.$$

并且以上三式內

$$a_{11} = Mh \cos \alpha + M(z + \sigma_1) \sin \alpha - \frac{df}{d\epsilon_1} \bullet;$$

$$a_{12} = - \left(Mf \cos \alpha + \frac{dh}{d\epsilon_1} - \sin \alpha \frac{d\sigma_2}{d\epsilon_1} \right);$$

$$a_{13} = - Mx \sin \alpha;$$

$$a_{21} = Mf \cos \alpha + \frac{dh}{d\epsilon_1} - \sin \alpha \frac{d\sigma_2}{d\epsilon_1};$$

$$a_{22} = Mh \cos \alpha + M(z + \sigma_1) \sin \alpha - \frac{df}{d\epsilon_1},$$

$$a_{23} = - My \sin \alpha;$$

$$a_{31} = y(1 + M \cos \alpha);$$

$$a_{32} = - x(1 + M \cos \alpha);$$

$$a_{33} = - \left(Mf \sin \alpha + \cos \alpha \frac{d\sigma_2}{d\epsilon_1} + \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_1} \right),$$

則由文献[1]中的 (4.1) 式可知, 将不能解得对应的 ϵ_1 值, 即解不存在。这种情况称为“空解”。这就是說, 該点及其对应的法綫方向, 在所要求的共軛运动下, 不可能进入共軛接触。共軛曲面上倘若存在着这些点 (包括对应的法綫方向) 所組成的区域, 那末該区域将是无效区域, 它对共軛运动的实现, 沒有任何帮助, 反而可能引起干涉, 应该把它去掉, 或改善它的形状。在平行軸傳动中, 若渐开綫齿曲面的基圓半徑大于和給定的共軛运动相当的节圓半徑, 則整个渐开綫齿曲面都成为无效区域, 不能完成所要求的共軛运动; 这是“空解”区域的一个简单例子。显然, 分析与研究“空解”区域 (无效区域), 对于在生产中, 結合共軛运动的要求, 正确选择基准曲面 (第三曲面) 的形状及其参量是有指导意义的。

3) 不定解 若共軛曲面上某点的座标 (x, y, z) 与其法綫的方向余弦 $(A : B : C)$ 满足下式:

$$\left. \begin{aligned} U &= Aa_{11} + Ba_{12} + Ca_{13} = 0; \\ V &= Aa_{21} + Ba_{22} + Ca_{23} = 0; \\ W &= Aa_{31} + Ba_{32} + Ca_{33} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

● 这里及以下各式中所用符号的說明見附录一。

则由文献[1]中的(4.1)式可知,对应的 ε_1 为不定值。这就是说,与该点对应的共轭轨迹,不是确定的一点,而是一群点。这种情况称为“不定解”。显然,在该点处,不仅有相对滑动速度,而且还有真实的相对滑动量,称为“弱”干涉。在平面传动中,零度压力角齿条会引起此类“弱”干涉。在设计现实的共轭齿曲面时,必须避免此类“弱”干涉。应该指出,在加工中,也有利用它的,例如采用零度压力角磨轮磨制渐开线齿曲面等。

4) 多值解 当一对有界共轭曲面,除在对应共轭点处共轭接触外,曲面的其余部分还发生相交(包括与边界曲面的相交)。这种情况称为“多值解”。显然,发生多值解后,必然造成干涉。“二次切削”与“曲率干涉”实质上都是“多值解”干涉。

三) 共轭曲面微分邻域几何学(有控点接触的理论基础)

1) 微量间的三个基本共轭关系式 设曲面 A 、 \bar{A} 按给定的共轭运动共轭, A_0 、 \bar{A}_0 点(图1)互为共轭点, \vec{N}_{10} 、 \vec{N}_{20} 各为该点处对应的单位法线向量。现设两曲面的初始位置是这样的,

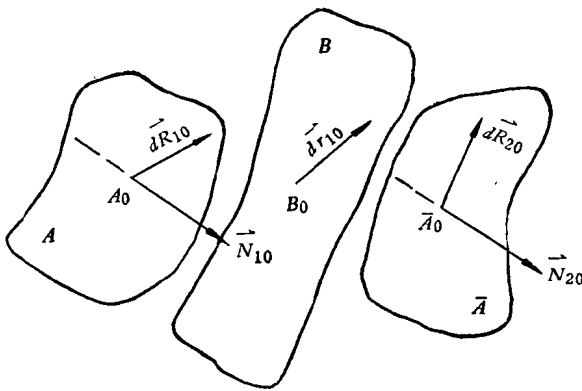


图1 共轭点处的共轭微量。

位置是这样的, A_0 、 \bar{A}_0 点已进入共轭接触,并接触于参考空间内的 B_0 点处。如果在 A 曲面上,过 A_0 点有一切向方向 $d\vec{R}_{10} = (dx)_0 \vec{i} + (dy)_0 \vec{j} + (dz)_0 \vec{k}$,曲面 A 在此方向上的单位法线向量 \vec{N}_{10} 的变化量为 $d\vec{N}_{10} = (dA)_0 \vec{i} + (dB)_0 \vec{j} + (dC)_0 \vec{k}$,那么,在曲面 \bar{A} 上,过 \bar{A}_0 点必然有一与 $d\vec{R}_{10}$ 对应的共轭运动方向 $d\vec{R}_{20}$ (所谓“对应”,系指对应于曲面 A 上,沿 $d\vec{R}_{10}$ 方向的 A_0 近旁的一点,在曲面 \bar{A} 上的共轭点将位于 $d\vec{R}_{20}$ 上);在参考空间内,过 B_0 点,也有对应的共轭运动方向 $d\vec{r}_{10}$ 。最后,令曲面 \bar{A} 在 \bar{A}_0 点处,沿 $d\vec{R}_{20}$ 方向的曲面单位法线向量的变化量为 $d\vec{N}_{20}$ 。利用文献[1]中的有关计算公式,可推得上述微量间的三个基本共轭关系式:

$$d\vec{R}_{20} = d\vec{R}_{10} + \vec{\lambda} d\varepsilon_1; \quad (3)$$

$$d\vec{r}_{10} = d\vec{R}_{10} + \vec{v} d\varepsilon_1; \quad (4)$$

$$d\vec{N}_{20} = d\vec{N}_{10} + \vec{\eta} d\varepsilon_1, \quad (5)$$

式中

$$d\varepsilon_1 = \frac{dU' - dW'}{V'_0}。 \quad (6)$$

上述四式内的 $\vec{\lambda}$ 、 \vec{v} 、 $\vec{\eta}$ 、 dU' 、 dW' 、 V'_0 的计算公式见附录二。

利用这些微量间的基本关系式,当已知一曲面在某点处的法线与曲率的情况下(即已知该点处的二阶及二阶以下的微分邻域性质),可以求得对应共轭点处的曲率状况。求法是这样的,先使该点位于共轭接触的位置(可利用文献[1]的公式求解此位置);然后,过该点任意假设一切向方向 \vec{t} (与曲面的法线向量垂直,即 $\vec{t} \perp \vec{N}_{10}$);再令 $d\vec{R}_{20} \parallel \vec{t}$,则利用式(3),可求得对应的 $d\vec{R}_{10}$ 。由于已知曲面在该点处的二阶及二阶以下微分邻域的性质是给定的,故可求得沿 $d\vec{R}_{10}$ 方向上的 $d\vec{N}_{10}$ 。再利用式(5),可求得对应的 $d\vec{N}_{20}$ 。最后,

按微分几何学中曲面法曲率的计算公式, 可求得相配共軛曲面上, 在对应点处沿 \vec{t} 方向的法曲率值为:

$$K_{2t} = \left| \frac{d\vec{N}_{20} \cdot d\vec{R}_{20}}{dR_{20} \cdot dR_{20}} \right|. \quad (7)$$

从而也就可计算出该方向上的诱导曲率值 K_t 为:

$$K_t = |K_{1t} \pm K_{2t}|, \quad (8)$$

式中 K_{1t} 为已知曲面在共軛点处沿 \vec{t} 方向的法曲率, 它为已知值。

确定“±”号的原则是这样的, 当两曲面沿 \vec{t} 方向的法截綫位于切平面的同一侧时, 采用“-”号; 位于异侧时, 采用“+”号。

由此可知, 就共軛点处对应曲率間存在着相互关联这个意义来说, 关系式(3)和(5)可以看成是平面传动中的 Euler-Savary 公式在空间传动中的推广形式。

必须指出, 上述的由已知共軛运动及共軛点处一曲面的曲率求另一曲面的曲率及诱导曲率问题, 实质上只是共軛曲面微分邻域几何学中的第 I 类共軛曲面问题。显然, 还存在着第 II、III、IV 类共軛曲面微分邻域几何学问题。它们的提法类似于文献[1]。因篇幅所限, 不再详述。

此外, 还应指出, 对綫性接触共軛曲面来说, 在共軛点处的任何切向方向上, 关系式(3)、(4)、(5)均成立; 但对一般点接触共軛曲面来说, 关系式(3)、(4)、(5)只是在共軛曲面的接触迹綫方向上才成立。所谓綫性接触, 并不一定指綫接触, 它的定义见下文。

2) 根切界限曲綫(无限大曲率曲綫) 由式(3)知, 当曲面 A 上的 A_0 点满足

$$d\vec{R}_{10} = -\vec{\lambda} d\epsilon_1 \quad (9)$$

时, 对应的 $d\vec{R}_{20} = 0$ 。此时, 对应的 $d\vec{N}_{20}$ 按式(5)计算, 一般不会为零向量。这样, 由式(7)得对应的 $K_{2t} \rightarrow \infty$, 即 A_0 点处, 曲率为无限大(脊点)。 A_0 点也就成为 A 曲面上的一个根切界限点。将曲面 A 上满足条件(9)式的点联接起来, 就形成对应的根切界限曲綫。在文献[10]中, 利用速度法也推得与(9)式类似的条件, 只是论证的角度不同。

利用(4)式, 可推得(9)式的等价条件为:

$$d\vec{r}_{10} = (-\vec{\lambda} + \vec{v})d\epsilon_1。$$

利用附录二内的计算公式, 上式又可化为:

$$d\vec{r}_{10} = \left[M_0 \vec{\omega}_2 \times \vec{R}_{20} + \left(\frac{d\sigma_2}{d\epsilon_1} \right)_0 \vec{\omega}_2 + \left(\frac{dl_{\vec{r}}}{d\epsilon_1} \right)_0 \right] d\epsilon_1. \quad (10)$$

方括号内的向量代表由于 A 曲面的运动, A_0 点(即 B_0 点处)相对参考空间的速度向量 \vec{V}_{A_0} 。 $d\vec{r}_{10}$ 则代表在接触轨迹曲面 B 上, B_0 点处的切向向量。条件(10)式的几何含意是, 速度向量 \vec{V}_{A_0} 必须落在 B_0 点处曲面 B 的切平面内。在一般齿輪传动中, $\frac{d\sigma_2}{d\epsilon_1} = \frac{dl_{\vec{r}}}{d\epsilon_1} = 0$, 曲面 A 的迴轉軸綫在曲面 B 上的投影曲綫上的点, 都能满足条件(10); 并且在曲面 B 上, 也只有这些点满足条件(10)。由于(9)、(10)两式系等价的, 这根投影曲綫也就成为对应的根切界限曲綫^[11]。显然, 当軸向位移 $\frac{d\sigma_2}{d\epsilon_1} \neq 0$ 及軸綫位移 $\frac{dl_{\vec{r}}}{d\epsilon_1} \neq 0$ 时, 文献[11]中所阐述的軸綫投影法則就不能适用, 应根据基本条件(10), 确定 B 上的对应根切界限曲綫。

3) 特征方向与特征微分邻域

(1) 特征共軛运动方向在任一共軛点处, 可以找到一个切向方向 \vec{dR}_0 , 沿此方向, 按式 (6) 可求得 $d\varepsilon_1 = 0$ 。该方向就是瞬时綫性接触方向, 或最小诱导曲率值的方向 (即诱导曲率主方向之一)。我們称这个方向为特征共軛运动方向。在共軛点处, 沿着特征共軛运动方向, 两共軛曲面的二阶及二阶以下的微分量相等, 三阶以上的微分量可以不相等。因此, 綫性接触并不一定是真正的綫接触, 当然包括真正的綫接触。

显然, 在特征共軛运动方向上

$$\vec{dR}_{10} = \vec{dR}_{20} = \vec{dR}_0; \quad (11)$$

$$d\vec{N}_{10} = d\vec{N}_{20} = d\vec{N}_0. \quad (12)$$

因而, 沿该方向上的诱导曲率也就等于零 (綫性接触共軛曲面)。

应该指出, 当 $\vec{dR}_{10} = \vec{dR}_{20}$ 或 $d\vec{N}_{10} = d\vec{N}_{20}$ 时, 并不意味着该方向就是特征共軛运动方向, 因为有可能 $\vec{\lambda} = 0$ (滚动接触共軛), 或 $\vec{\eta} = 0$ [无相对转动共軛, 或 $(\vec{\omega}_1 - M_0\vec{\omega}_2) \parallel \vec{N}_{10}$], 因而对应的 $d\varepsilon_1$ 不一定等于零。

(2) 特征微分邻域在某共軛点处, 若对应的微分邻域在共軛点的所有切向方向上满足下式:

$$dU' = dW', \quad (13)$$

则由式 (6) 可知, 在任何切向方向上 $d\varepsilon_1 = 0$, 即特征共軛运动方向无确定方向, 任何切向方向都是特征共軛运动方向。也就是说, 在所有切向方向上, 都是瞬时綫性接触, 即在該共軛点处获得“面”性接触。我們称此类微分邻域为特征微分邻域。“面”性接触的结果, 迫使連續傳动的任务, 必須由該共軛点本身来承担, 即造成瞬时的不定解, 或瞬时的“弱”干涉 (参看前文)。显然, 在设计共軛曲面时, 应该避免此类“弱”干涉。

在某共軛点处, 能满足 (13) 式的对应单位法綫向量与单位法綫向量的变化量, 即 \vec{dN} , 称为該共軛点处的特征微分值。由这些特征微分值可求得 Wildhaber^[12] 在分析空间交叉軸傳动时所提出的极限压力角与极限曲率半径。但是, Wildhaber 沒有揭示出极限压力角与极限曲率半径所对应的几何本质是“面”性接触, 因此, 他的論証就嫌不够清楚, 所得的结果也嫌不够普遍, 仅仅局限于圓錐曲面及等速转动。

順便指出, 当 $V'_0 = 0$ 时, 出現另一种特征情况。此时, 若对应的微分邻域不是特征微分邻域, 則为了使由 (6) 式求得的 $d\varepsilon_1$ 不趋向于无限大, 对应的 \vec{dR}_{10} 必須等于零。因而对应的 $d\vec{N}_{10}$ 也等于零。但二阶微量 d^2R_{10} 可取为不等于零。这时, 对应的 $d\varepsilon_1$ 仍可能有有限值。由 (14) 式可得:

$$d\varepsilon_1 = \lim_{\substack{V'_0 \rightarrow 0 \\ (dU' - dW') \rightarrow 0}} \frac{dU' - dW'}{V'_0} = \frac{d[dU' - dW']}{dV'_0}. \quad (14)$$

再由 (3)、(4)、(5)、(7) 諸式, 可求得:

$$\vec{dR}_{20} = \vec{\lambda} d\varepsilon_1; \quad (15)$$

$$d\vec{r}_{10} = \vec{v} d\varepsilon_1; \quad (16)$$

$$d\vec{N}_{20} = \vec{\eta} d\varepsilon_1; \quad (17)$$

$$K_{2r} = \left| \begin{array}{c} \vec{\eta} \cdot \vec{\lambda} \\ \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} \end{array} \right|. \quad (18)$$

由上列諸式可知, $d\vec{R}_{20}$ 、 $d\vec{r}_{10}$ 、 $d\vec{N}_{20}$ 的方向只与共軛运动、共軛点位置及其法綫的方向有关, 而与 $d^2\vec{R}_{20}$ 的方向和大小无关 ($d\vec{R}_{10}=0$); 至于它們的大小, 則通过 $d\varepsilon_1$ 与 $d^2\vec{R}_{10}$ 有关。由 (18) 式又知, 对应曲率值 K_{21} 的大小則仅由共軛运动、共軛点的位置及其法綫的方向所决定, 而与 $d^2\vec{R}_{10}$ (即 $d\varepsilon_1$) 无关。在平面傳动里, 这种情况相当于 Euler-Savary 公式中的压力角等于零。此时, 两共軛曲面中的一个曲面的对应曲率值, 仅由該共軛点的位置及共軛运动所决定, 而与另一曲面的对应曲率值无关。

显然, 在这种点处, 对应于 $d\vec{R}_{10}=0$ 和 $d^2\vec{R}_{10}\neq 0$ 的 $d\vec{R}_{20}$ 不等于零, 故它也是一种瞬时不定解, 即微分邻域內的“弱”干涉。在設計共軛曲面时, 与“面”性接触点一样, 一般也应该避开它。

(二) 应用方面的进展

共軛曲面原理的应用是多方面的。随着原理研究的深入发展, 它的应用也在不断深化(旧領域)和逐漸扩展(新領域)。主要的进展有下列四方面。

一) 齿曲面加工方面的进展

齿曲面的形成方式可分为两大类, 即对偶法与三曲面法。在对偶法中, 刀具曲面和一个配对齿曲面完全相同。利用配对齿曲面間的共軛运动, 可范成另一齿曲面。这是第 I 类共軛曲面問題最直接的应用。在三曲面法中, 刀具曲面为第三曲面, 用它范成两个配对齿曲面。为保証配对齿曲面間能按所要求的共軛运动綫接触共軛, 第三曲面与配对齿曲面間的共軛运动必須滿足“互换性”条件。在文献[1]中, 对“互换性”条件已进行了探討, 并求得了“互换性”条件的具体关系式。但文献[1]未对利用共軛曲面原理形成第三曲面及“近似互换性”条件进行討論。在生产实践中, 第三曲面的形成, 往往是范成齿曲面的主要关键, 应该予以重視和研究。同时, 由于上述“互换性”条件比較严, 在生产中有时不易实现, 加之一般齿輪上齿数較多, 每个齿曲面所承担的傳动轉角值不大, 所以, 探討“近似互换性”条件也是一个重要的課題。所謂“近似互换性”, 系指在某选定的基准点(計算点)处的微分邻域內滿足“互换性”条件。

此外, 齿輪在使用过程中, 不可避免地存在有安装誤差和变形量。为了提高輪齿的实际承載能力, 配对齿曲面一般不制造成严格的綫接触共軛, 而是制造成有控制的点接触共軛。有时, 为了簡化第三曲面的形状便于它的形成, 需采用“近似共軛曲面”, 此时也形成有控制的点接触。因此, 利用共軛曲面原理探討有控制的点接触, 也是一个很有现实意义的課題。

1) 第三曲面(刀具曲面)的形成 可以通过两种不同的方法形成第三曲面, 即軌迹法与包絡法。应该指出, 第三曲面的形状及其参量的确定, 除考虑实现它的可能性和簡便性外, 还必须根据輪齿的使用性能加以选择, 尤其应考虑对輪齿强度、輪齿潤滑、接触斑点和相对滑动率等的影响。

(1) 軌迹法 这种方法实质上是尖点解的一个具体应用。刀刃边綫相当于尖点, 該处的法綫方向为不定值。因此, 經過运动后, 可得尖点解曲面, 就是第三曲面, 亦即刀具曲面。目前, 此种方法采用得比較广泛, 例如 Gleason 刀盘和 Oerlikon 刀盘都是按軌迹法形成第三曲面的。后者所形成的第三曲面, 相对于主軸綫还具有“周期性”的特征, 因

此可进行連續切齿。

(2) 包絡法 这种方法实质上是第 I 类共軛曲面問題的一个具体应用。刀具本身是多刀刃的,它們配置成一曲面,称为刀刃曲面,以区别于刀具曲面。經运动后,此曲面形成对应的共軛曲面,就是第三曲面,即刀具曲面。显然,利用这种方法,可以由简单的刀刃曲面和简单的运动,綜合成复杂的刀具曲面。这种方法目前尚未获得普遍重視,但它所能提供的可能性是非常广闊的。应该指出,在一般齿輪生产中,这种方法已被采用了,只是沒有被正确地理解而已。例如在常用的滚齿、剃齿工艺中,第三曲面的形成法实质上就是包絡法。滚刀、剃齿刀都是多刀刃的。它們配置成刀刃曲面。当滚刀、剃齿刀与工件相对轉动时,刀刃曲面就包絡形成第三曲面。这个第三曲面具有“周期性”的特征,因此可进行連續切削。然后,再通过滚刀、剃齿刀相对于工件的进刀运动(也是一种共軛运动),第三曲面就在工件上包絡成齿曲面。所以,利用包絡法形成第三曲面,然后范成齿曲面的方法,也可称为“双包絡法”。如果采用双包絡法,那末在任一瞬时,刀刃曲面与齿曲面总是呈点接触的;而刀具曲面分別与齿曲面及刀刃曲面呈綫接触。因此,利用包絡法形成第三曲面的原理,原則上讲,完全可以設計出刀具对任何齿曲面进行剃齿,包括錐齿輪齿曲面、圓弧点啮合齿曲面等等。此外,利用这种方法,还可以对利用軌迹法无法进行連續切削的齿曲面进行連續切削,例如对直齿錐齿輪齿曲面进行連續切削^[13]等。

2) “近似互換性”条件 已知一基准曲面 T (一般为刀具曲面) 和对应的基准运动 ϕ_0 , 并且在曲面 T 上选择一基准点(計算点) T_0 。如果有一系列的共軛曲面及对应的共軛运动,它們中的任何一曲面 A_i 及对应的共軛运动 ϕ_i 都能与 T 、 ϕ_0 在 T_0 点处相互共軛,并且对应的特征共軛运动方向 $(d\vec{R}_0)_{A_i}$ 在参考空間內固定不变,則称这一系列的共軛曲面及相应的共軛运动,在 T 、 ϕ_0 状况下和 T_0 点的邻域內,具有“近似互換性”。就微分邻域来說,在 T_0 点处相互共軛及 $(d\vec{R}_0)_{A_i}$ 在参考空間內守恒等条件与文献[1]內的“互換性”条件是等价的。两者都保証,具有“互換性”或“近似互換性”的共軛曲面及共軛运动中的任何一对曲面及运动均能保持綫接触或綫点接触。所不同的只是,“互換性”要求两共軛曲面在整个曲面上都能保持綫接触,而“近似互換性”仅要求在基准点的微分邻域內保持綫性接触。显然,“近似互換性”的制約条件比之“互換性”的制約条件要寬得多。应该指出,在“互換性”条件中,对共軛运动的制約,即滿足文献[1]中的(9.2)式与对应的共軛曲面的形状无关;然而,对共軛曲面形状的制約則与共軛运动有关,即曲面間必須严格按給定的共軛运动相互綫接触共軛。在“近似互換性”条件中則不同,对共軛运动的制約,与共軛曲面(基准曲面)的形状及基准点的选择是有关联的,即在条件关系式中,非但牽連到共軛运动,而且包含有基准曲面在基准点处的二阶及二阶以下的微分量值。所以,曲面的微分量值一变更,“近似互換性”条件关系式也将相应地更改。这在现实生产中是很有用处的。可以利用它通过控制曲面的形状,簡化共軛运动的要求;或通过控制共軛运动,使共軛曲面的形状更便于形成。

3) 有控点接触

(1) 接触斑点的控制 这里包括两个方面的問題。第一方面的問題は控制共軛点在齿曲面上的軌迹曲綫相对于齿曲面边界的位置,主要是通过合理地控制正副第三曲面(刀具曲面)間相切曲綫的位置来实现。所謂正副第三曲面,系指在范成两个配对齿曲面时,

所分别采用的、略有差异的两个第三曲面。必须注意区别副曲面与通过“互换性”获得的另一第三曲面，后者不是副曲面，仍为正曲面。

另一方面是控制接触斑痕的宽度，即控制最小诱导曲率值，主要是在特征共轭运动方向 $d\vec{R}_0$ 上控制两配对齿曲面间的曲率“差”值，即通过控制 $d\vec{R}_0$ 方向上的诱导曲率值（线性接触时，此值等于零）来实现。为此，必须首先利用共轭曲面微分邻域几何学中的结论求出 $d\vec{R}_0$ 的方向；然后，在该方向上，把配对齿曲面之一的曲率稍加变动以形成有控制的点接触。曲率值变动量的大小，根据轮齿的使用要求（例如接触强度、润滑性能等）加以确定。

(2) 近似共轭曲面 有时，根据“互换性”要求，刀具曲面的形状很复杂，致使生产中无法实现或很难实现。此时，可用便于形成的“近似共轭曲面”替代之。“近似共轭曲面”的近似基准是，近似曲面与原曲面在选定的基准点处，具有完全相同的二阶及二阶以下的微分量值：例如在制造具有收缩齿的锥齿轮时，若大齿轮齿曲面用基准圆锥曲面作为第三曲面进行范成，则范成小齿轮的第三曲面，根据“互换性”原则，必须是对应的共轭曲面。显然，它的形状很复杂，一般不易实现。此时，就只得用“近似共轭曲面”替代之。在生产中，往往还利用“近似互换性”关系式使基准点处对应的二阶及二阶以下的微分量值进一步简化，以便于“近似共轭曲面”的形成。采用“近似共轭曲面”后，必然获得点接触共轭，但由于控制了基准点处的二阶及二阶以下的微分值，所以它们也列为有控点接触的一类。应该指出，此类有控点接触的共轭齿面在共轭运动上是近似的；而前面所述的控制接触斑痕的有控点接触共轭齿面（若并没有采用“近似互换性”）则不然，它们仍然按所要求的运动严格共轭。显然，这两类有控点接触并不是相互排斥的，而是相互补充的。

二) 螺旋槽加工方面应用的进展

由已知螺旋槽轮廓形状及切削加工运动求加工工具轮廓形状普遍解的问题，已在文献[1]中讨论过了。但在那篇文章中对奇异解未曾作任何探讨。利用前述的奇异解，可以求出螺旋槽的槽底形状以及鉴定槽侧工作曲面上是否存在有干涉现象或加工不到之处（空解区域）。若存在有这种情况，则应根据对奇异解的分析，调整切削加工运动（调整工件工具间的中心距及相对安装角），避免槽侧工作曲面区域内发生干涉现象或加工不到之处。

三) 传动精度分析方面的应用

当一对已制成的齿曲面，由于制造误差、安装误差及变形，使它们之间的共轭不同于原设计的共轭条件时，其共轭运动就会发生偏差。对这种偏差的定量分析，就是传动精度分析。分析的结果可以作为拟订制造误差、安装误差及变形的允许值的基础。共轭曲面原理中的第Ⅲ类共轭曲面问题可作为研究传动精度分析的理论基础。

四) 切削运动学方面的应用

利用一)、二)节内所述的尖点解（切削工具的刀刃相当于尖点），并结合采用“相角位移”法（即在求得一尖点解后，将解的参考坐标系退后或提前，相当于切削工具上有限数目刀刃间的“相角”，而获得一新解），可以求得构成工件表面光洁度的“周期性”解。通过对这个解的分析，可以采取有效的措施改善工件表面的光洁度，包括降低峰谷间的绝对差值和改善表面光洁度的构成，即合理调整峰谷布局状况。例如采用对角滚切法，可以合理

調整由于滾刀誤差所造成的峰谷布局不良状况。又如在滾齿机工作台上采用爬动机构后^[14]，可以合理調整由于工作台分度蜗杆誤差所造成的峰谷布局不良状况。

(三) 发展前景——彈性共軛曲面原理

考虑輪齿的彈性变形对齿曲面进行修正，使它們不严格按照要求的共軛运动共軛，稍有偏离。但在彈性变形下，則恰好能获得所要求的共軛运动。目前，此种齿曲面的修正，主要依靠“原始的”經驗实验法^[15]，缺乏理論計算的指导。发展“彈性共軛曲面原理”，显然已提到議事日程上。事实上，这方面的工作也已經有了萌芽^[16]。

附录一 符号的說明

本文中所使用的符号与文献[1]中的相同。

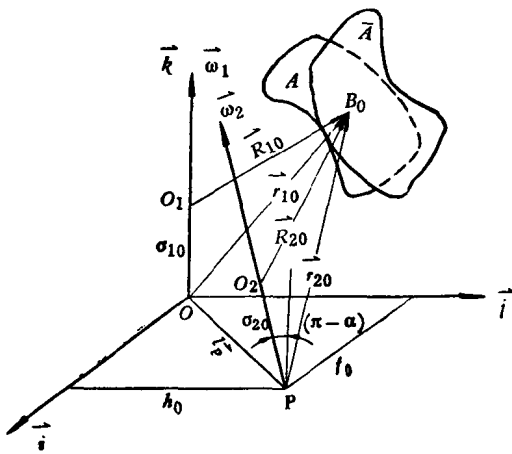


图2 符号的說明。

\vec{R}_1, \vec{R}_2 ——在 I 和 II 空間內，共軛曲面上相互对应的一对点向量。它們各以 I 和 II 空間的原点为原点，并且該原点分別位于 $\vec{\omega}_1$ 和 $\vec{\omega}_2$ 上。

\vec{r}_1, \vec{r}_2 ——当 \vec{R}_1, \vec{R}_2 点处于共軛接触位置时，在参考空間內的点向量。它們各以当时的 \vec{P} 中心联綫与 $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ 的交点为其原点。

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ —— \vec{R}_1, \vec{R}_2 点进入共軛接触时，I、II 空間相对于参考空間分別繞 $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ 所轉过的角度值。正負值按右手規則确定。

σ_1, σ_2 ——共軛接触时 \vec{r}_1, \vec{r}_2 的原点离对应的 \vec{R}_1, \vec{R}_2 原点的距离。它們分別以 \vec{r}_1, \vec{r}_2 的原点为起点，以 $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ 的方向为正向。它們均为 ε_1 的函数，即 $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon_1)$ ； $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon_1)$ 。

\vec{N}_1, \vec{N}_2 ——在初始位置时 ($\varepsilon_1 = 0$ 时)，共軛曲面在 \vec{R}_1, \vec{R}_2 点处的单位法綫向量，并且 $\vec{N}_1 = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ 。A、B 和 C 在文献[1]中系指方向指数，本文內規定为方向余弦，即

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

M——迴轉角速度比 $M = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = M(\varepsilon_1)$ 。

α —— $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ 間夹角的补角。

$\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$ ——沿 1 和 2 軸軸綫的单位向量。并且規定，在参考空間內， $\vec{\omega}_1$ 的位置和方向固定不动， $\vec{\omega}_2$ 的方向固定不变，位置則允許变动。

Ω_1, Ω_2 ——繞 1 和 2 軸的瞬时迴轉角速度值。它們均为 ε_1 的函数，即 $\Omega_1 = \Omega_1(\varepsilon_1)$ 、 $\Omega_2 = \Omega_2(\varepsilon_1)$ 。

\vec{P} ——沿 1 和 2 兩軸間联綫的单位向量。它的起点位于 $\vec{\omega}_1$ 上。并且規定，此起点在参考空間內是固定不动的；联綫与 $\vec{\omega}_2$ 軸綫的交点在 $\vec{\omega}_2$ 上是固定不动的。

l ——沿 \vec{P} 方向的 1 和 2 軸之間的中心距。

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ——参考空間內的参考直角坐标系，它的原点取在 \vec{r}_1 的原点；并且規定， $\vec{i} = \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2}{\sqrt{(\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2) \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2)}}$ ； $\vec{j} = \vec{k} \times \vec{i}$ ； $\vec{k} = \vec{\omega}_1$ 。

f, h —— \vec{r}_2 的原点在参考空間內的座标位置，即 $l\vec{p} = f\vec{i} + h\vec{j}$ 。它們均为 ε_1 的函数，即 $f = f(\varepsilon_1)$ ； $h = h(\varepsilon_1)$ 。

符号的下标“O”，除另行注明者外，表示这些符号代表某选定点处于共軛接触位置时的对应值。

附录二 一些参量的数值計算公式

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} &= \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{10} - M_0 \vec{\omega}_2 \times \vec{R}_{20} + \left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\right)_0 \vec{\omega}_1 - \left(\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)_0 \vec{\omega}_2 - \left(\frac{dl\vec{p}}{d\varepsilon_1}\right)_0 \vec{i} \\ &= \left[-y_0(1 + M_0 \cos \alpha) + M_0 z_0 \sin \alpha + M_0 h_0 \cos \alpha - \left(\frac{df}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right] \vec{i} \\ &\quad + \left[x_0(1 + M_0 \cos \alpha) - M_0 f_0 \cos \alpha + \sin \alpha \left(\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)_0 - \left(\frac{dh}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right] \vec{j} \\ &\quad + \left[M_0(f - x_0) \sin \alpha + \left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\right)_0 + \cos \alpha \left(\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right] \vec{k}; \\ \vec{v} &= \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_{10} + \left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\right)_0 \vec{\omega}_1 = -y_0 \vec{i} + x_0 \vec{j} + \left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\right)_0 \vec{k}; \\ \vec{\eta} &= (\vec{\omega}_1 - M_0 \vec{\omega}_2) \times \vec{N}_{10} = [-B_0(1 + M_0 \cos \alpha) + C_0 M_0 \sin \alpha] \vec{i} \\ &\quad + A_0(1 + M_0 \cos \alpha) \vec{j} - A_0 M_0 \sin \alpha \vec{k}; \\ dU' &= \left[M_0 h_0 \cos \alpha + M_0(z_0 + \sigma_{10}) \sin \alpha - \left(\frac{df}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right] (dA)_0 \\ &\quad - \left[M_0 f_0 \cos \alpha + \left(\frac{dh}{d\varepsilon_1}\right)_0 - \sin \alpha \left(\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right] (dB)_0 - M_0 x_0 \sin \alpha (dC)_0 \\ &\quad - C_0 M_0 \sin \alpha (dx)_0 + A_0 M_0 \sin \alpha (dz)_0; \\ dW' &= y_0(1 + M_0 \cos \alpha) (dA)_0 - x_0(1 + M_0 \cos \alpha) (dB)_0 \\ &\quad - \left[M_0 f_0 \sin \alpha + \left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\right)_0 + \cos \alpha \left(\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right] (dC)_0 \\ &\quad - B_0(1 + M_0 \cos \alpha) (dx)_0 + A_0(1 + M_0 \cos \alpha) (dy)_0; \\ V'_0 &= A_0 \left\{ M_0 f_0 \cos \alpha + (1 - M_0 \cos \alpha) \left(\frac{dh}{d\varepsilon_1}\right)_0 - M_0 \sin \alpha \left(\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right. \\ &\quad \left. - \sin \alpha \left(\frac{d\sigma_2}{d\varepsilon_1}\right)_0 + [(y_0 - h_0) \cos \alpha - (z_0 + \sigma_{10}) \sin \alpha] \left(\frac{dM}{d\varepsilon_1}\right)_0 + \left(\frac{d^2 f}{d\varepsilon_1^2}\right)_0 \right\} \\ &\quad + B_0 \left\{ M_0 h_0 \cos \alpha + M_0(z_0 + \sigma_{10}) \sin \alpha - (1 - M_0 \cos \alpha) \left(\frac{df}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right. \\ &\quad \left. - (x_0 - f_0) \cos \alpha \left(\frac{dM}{d\varepsilon_1}\right)_0 + \left(\frac{d^2 h}{d\varepsilon_1^2}\right)_0 - \sin \alpha \left(\frac{d^2 \sigma_2}{d\varepsilon_1^2}\right)_0 \right\} \\ &\quad + C_0 \left\{ -M_0 y_0 \sin \alpha - M_0 \sin \alpha \left(\frac{df}{d\varepsilon_1}\right)_0 + (x_0 - f_0) \sin \alpha \left(\frac{dM}{d\varepsilon_1}\right)_0 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{d^2 \sigma_1}{d\varepsilon_1^2}\right)_0 - \cos \alpha \left(\frac{d^2 \sigma_2}{d\varepsilon_1^2}\right)_0 \right\}. \end{aligned}$$

在常用的齿輪傳动中， $M = M_0 = \text{常数}$ ； $f = f_0 = \text{常数}$ ； $h = h_0 = \text{常数}$ ； $\sigma_1 = \sigma_{10} = \sigma_2 = \sigma_{20} = 0$ ，則上述数值計算公式可簡化为：

$$\vec{\lambda} = [-y_0(1 + M_0 \cos \alpha) + M_0 z_0 \sin \alpha + M_0 h_0 \cos \alpha] \vec{i}$$

$$\begin{aligned}
& + [x_0(1 + M_0 \cos \alpha) - M_0 f_0 \cos \alpha] \vec{j} - M_0(x_0 - f_0) \sin \alpha \vec{k}; \\
\vec{v} & = -y_0 \vec{i} + x_0 \vec{j}; \\
\vec{\eta} & = [-B_0(1 + M_0 \cos \alpha) + C_0 M_0 \sin \alpha] \vec{i} + A_0(1 + M_0 \cos \alpha) \vec{j} \\
& \quad - A_0 M_0 \sin \alpha \vec{k}; \\
dU' & = M_0(h_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha)(dA)_0 - M_0 f_0 \cos \alpha (dB)_0 - M_0 x_0 \sin \alpha (dC)_0 \\
& \quad - C_0 M_0 \sin \alpha (dx)_0 + A_0 M_0 \sin \alpha (dz)_0; \\
dW' & = y_0(1 + M_0 \cos \alpha)(dA)_0 - x_0(1 + M_0 \cos \alpha)(dB)_0 - M_0 f_0 \sin \alpha (dC)_0 \\
& \quad - B_0(1 + M_0 \cos \alpha)(dx)_0 + A_0(1 + M_0 \cos \alpha)(dy)_0; \\
V'_0 & = A_0 M_0 f_0 \cos \alpha + B_0 M_0(h_0 \cos \alpha + z_0 \sin \alpha) - C_0 M_0 y_0 \sin \alpha.
\end{aligned}$$

参 考 文 献

- [1] 陈志新, 連續滑动接触共軛曲面原理及其应用, 机械工程学报, 四卷二期, 1956。
- [2] Литвин Ф. Л., Теория зубчатых зацеплений, Физматгиз, 1960。
- [3] Candee A. H., Introduction to the Kinematic Geometry of Gear Teeth, Chilton Co., Book Division, 1961。
- [4] Baxter M. L. Jr., Basic Geometry and Tooth Contact of Hypoid Gears, Industrial Mathematics, vol. 11, part 2, 1961。
- [5] 成瀬政男等, 歯車の研究, 东京, 书肆株式会社, 养賢堂发行, 1960。
- [6] Ivau T. E., Electronic Computers—Principles and Applications, Iliffe and Sons Ltd., 1960。
- [7] Spear G. M., King C. B. and Baxter M. L. Jr., Helix Bevel and Hypoid Gears, JI. of Engineering for Industry, Trans. of the ASME series B, vol. 82, №3, Aug. 1960。
- [8] Литвин Ф. Л., Гокай (国楷), Исследование зацепления конических зубчатых колес с нормально понижающимися дугowymi зубцами, Теория Машин и механизмов, Выпуск 92~93, изд. АН СССР, 1962。
- [9] Новиков М. Л., Зубчатые передачи с новым зацеплением, изд. ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1958。
- [10] 国楷, 研究空間齒輪根切的新方法, 本論文集。
- [11] Dudley D. W., Gear Handbook, McGraw-Hill Book Co. Inc., 1962。
- [12] Wildhaber E., Basic Relationship of Hypoid Gears, American Machinist, vol. 90, 1946。
- [13] U. S. Patent №3020808, Feb. 13, 1962, Method for Continuously Generating Bevel Gears With Straight Teeth。
- [14] Brady J. R. C., Large Gear Hobbing Machines and Post Hobbing Processes, Proc. of the International Conference on Gearing, 1958。
- [15] Coweu W. T., Laboratory Testing of Automobile Final Drive and Aircraft Gear Assemblies, Proc. of the International Conference on Gearing, 1958。
- [16] Davies W. J., Some Design Considerations Affecting Performance and Reliability of High-Duty Spur and Helical Gearing for Aircraft, Proc. of the International Conference on Gearing, 1958。