



GH

高等學校 规划教材
工科电子类

波导系统 的等效网络分析

陈抗生 郑国武

电子工业出版社

TN 70.1
C-5

278810

高等学校
工科电子类 规划教材

波导系统的等效网络分析

陈抗生 郑国武

电子工业出版社

(京)新登字 055 号

图书在版编目(CIP)数据

波导系统的等效网络分析/陈抗生, 郑国武

北京: 电子工业出版社, 1994

ISBN7-5053-2458-6

I. 波...

II. 陈①...②郑...

III. 波导传输-网络分析

IV. ①TN814 ②TN711.1

责任编辑: 龚兰方

电子工业出版社出版

北京市海淀区万寿路 173 信箱(100036)

电子工业出版社发行 各地新华书店经销

北京科技印刷厂印刷

*

开本: 787×1092 毫米 1/16 印张: 15.75 字数: 381 千字

1994 年 11 月第一版 1994 年 11 月北京第一次印刷

印数: 1000 册 定价: 8.90 元

出版说明

根据国务院关于高等学校教材工作的规定,我部承担了全国高等学校和中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力,有关出版社的紧密配合,从1978~1990年,已编审、出版了三个轮次教材,及时供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应“三个面向”的需要,贯彻国家教委《高等教育“八五”期间教材建设规划纲要》的精神,“以全面提高教材质量水平为中心,保证重点教材,保持教材相对稳定,适当扩大教材品种,逐步完善教材配套”,作为“八五”期间工科电子类专业教材建设工作的指导思想。组织我部所属的八个高等学校教材编审委员会和四个中等专业学校专业教学指导委员会,在总结前三轮教材工作的基础上,根据教育形势的发展和教学改革的需要,制订了1991~1995年的“八五”(第四轮)教材编审出版规划。列入规划的,以主要专业主干课程教材及其辅助教材为主的教材约300余种。这批教材的评选推荐和编审工作,由各编委会或教学指导委员会组织进行。

这批教材的书稿,其一是从通过教学实践、师生反应较好的讲义中经院校推荐,由编审委员会(小组)评选择产生出来的,其二是在认真遴选主编人的条件下进行约编的,其三是经过质量调查在前几轮组织编写出版的教材中修编的。广大编审者、各编审委员会(小组)、教学指导委员会和有关出版社,为保证教材的出版和提高教材的质量,作出了不懈的努力。

限于水平和经验,这批教材的编审、出版工作还可能有缺点和不足之处,希望使用教材的单位,广大教师和同学积极提出批评和建议,共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

中国电子工业部教材办公室

前言

从微波、毫米波到光导波业已发展了多种结构型式的波导及其分析方法,作者很早就萌发了一个想法,能否将各种分析方法有机地连贯起来,对各种波导进行统一的描述?本书的编写正是在这一背景下进行的。

从光波到微波所采用的波导,尽管其几何尺寸由分米、厘米至微米,材料由金属到介质,结构由封闭到开放,但其横截面与波长之比都处于同一数量级。进一步分析比较各类波导中波传播的物理过程,不难发现,如果按横截面上场分布的特征来分,总可以把波导分成内部区域与外部区域两个基本模块。内部区域传播的电磁波倾斜投射到内外区域交界面发生全内反射,从而使波限制在内部区域沿轴传播。既然各类波导无论是几何尺寸(用波长归一化),还是波传播的物理特征都有共同的特点,这就提示我们用统一的方法描述各类波导是可能的。

早在 80 年代初,本书作者之一有幸接触过美国纽约理工学院的彭松村教授的研究工作,其后又跟彭松村教授合作开展过介质波导与介质栅天线的研究。作者与彭松村教授都认为彭松村教授在分析介质波导时所发展的方法也可以推广到其他波导,其基本思路与其他分析方法是相通的。运用这一方法,作者成功地对柱形金属波导、微带、鳍线以至金属栅加载的介质天线进行研究,并发现谱域法、直线法、甚至积分方程法,其基本算式都可以从这一方法导出。书中我们将这一方法推广并冠以“微波电路的等效网络分析”这一名称。全书力图用微波电路的等效网络分析法将目前应用得较多的几种分析波导问题的方法连贯起来,并对各种波导问题进行分析。

微波电路的等效网络分析的要点是,首先将所研究的波导按横截面内的场分布特征分成几个基本模块,模块内波的传播用传输线等效,相邻两模块交界面对波的散射用网络表示,最后得到一横向等效网络,利用横向谐振原理就可得到所研究波导问题的本征值(如传播常数、谐振频率)及本征函数(场分布)。

本书是作者在浙江大学对物理电子与光电子及电磁场与微波技术专业高年级本科生尤其是研究生讲授的“介质波导理论基础”讲义的基础上修改而成。讲义曾三易其稿,第一稿侧重介质波导与介质天线,第二稿增加了微带、鳍线与共面波导的分析。一、二稿对波导问题的分析都是在频域中进行,第三稿又增加了时域分析的内容。全书共七章,第一章简述电磁场基本理论,将本书分析波导问题要用到的有关电磁场的基本概念作一介绍。选修本课程的学生如有较好的电磁理论基础,本章可不予讲授。第二章波导的等效电路模型,是微波电路等效网络分析的基础。这章还以分析熟知的矩形波导中波的传播与散射为例,说明微波电路的等效网络分析法的具体应用。其结果虽然不是新的,但处理问题的方法却与传统的不同。第三章关于介质波导的分析,最能说明微波电路等效网络分析法的基本思路与特点,它将一个复杂的电磁场边值问题化为熟知的路的问题,易于为熟悉电路的工程技术人员接受。第四章利用第三章关于模式函数展开及模式匹配概念导出谱域中格林函数,从而将适合分析介质波导的模式匹配法与适合分析微带、鳍线一类波导的谱域法和积分方程法联系起来。第四章最后导出了直线法与谱域法的内在联系。这样第四章关于微带、鳍线、共面波导的分析不是机械地将谱域法、积分方程法、直线法拼凑在一起,而是在微波电路的等效网络分析这一概念下将它们统一起来。第五章周期结构。根据 Floquet 原理,利用相移波导壁的概念,将周期结构

设的波导问题,从而巧妙地将第三、四章分析波导问题的方法用于分析周期结构。第六

• ■ •

章谐振器,是继周期结构后,对波导问题分析的又一推广。结合谐振器的分析,这一章还介绍了波导问题数值分析中十分有效的有限元法。有限元法的变分性质与第三章谱域法分析中的伽略金法是等价的。这一章最后又给出求波导不均匀区等效网络参数的“谐振法”的基本概念与计算过程。

从第一章到第六章,所有分析都是在频域中进行的,所得到的是关于波导问题的稳态解。随着电路工作频率的提高,如高码率脉冲沿微带线的传输,仅有稳态解是不够的,电路的瞬态特性变得十分重要。本书最后一章介绍了研究波导瞬态特性十分有效的时域分析方法,包括时域有限差分法与传输线矩阵法两种主要方法。传输线矩阵法的基础是物理学中惠更斯原理及电路中网络理论,而传输线矩阵法与时域有限差分法又是等价的。

本书侧重于可以用集成技术制作的波导电路的分析,光纤一类圆形截面波导本书没有给予充分的讨论。但在时域分析这一章中,指出了用FD-TD法数值模拟光纤非线性效应的途径。

由于波导结构的复杂性,自洽的解析解很难求得,从工程应用角度看计算机数值模拟已成为波导问题分析的最有效手段。本书关于波导问题的分析都是从便于数值模拟角度来组织材料和编写的。本书所介绍的每一种分析波导问题的方法,都有相应的数值模拟程序及计算实例。如果篇幅允许,作为本书的附录给出,如果篇幅限制,则留存软盘备索。

本书一到六章,除第四章的直线法外,由陈抗生同志执笔,第七章及第四章直线法一节由郑国武同志执笔。全书打印及图表都由郑国武同志完成,所附的十一个计算程序均由郑国武同志编制或核对定稿。

本书第三章很多材料取自彭松村教授的研究成果,作为本书基础的讲义在撰写过程中,作者曾多次与彭松村教授切磋研讨,受益匪浅,在此作者向彭松村教授深致谢意。早在80年代初,吴鸿适教授就鼓励作者撰写此书,张毓昆教授、周文教授和王湖庄教授也多次给予鼓励,李英教授审阅了全书并提出了宝贵意见,在此一并致谢。已在国内外的惠平博士、项锋博士、庄红博士,还有和作者一起工作的邹英寅博士、章献民博士,以及博士生张云华他们的研究工作都为本书采用。没有他们的支持本书很难完成,在此也一并致谢。

目 录

第一章 电磁场基本理论	1
§ 1.1 电磁场基本方程	1
§ 1.2 物质的结构方程	2
§ 1.3 时谐电磁场的 Poynting 定理	5
§ 1.4 边界条件、辐射条件和边缘条件	6
§ 1.5 唯一性定理、等效原理、磁流与磁荷	8
§ 1.6 互易定理	10
§ 1.7 电磁波的偏振	13
§ 1.8 电磁场的矢量位以及波型的分类	15
§ 1.9 格林函数	18
§ 1.10 均匀介质中平面电磁波的一般特性	20
参考文献	27
附录 1. I 并矢	29
第二章 波导的等效电路模型	30
§ 2.1 概述	30
§ 2.2 波导的特征参数	32
§ 2.3 波导的传输线模型	33
§ 2.4 均匀介质的传输线模型	39
§ 2.5 平面界面的等效电路模型	43
§ 2.6 矩形波导的传输线模型	45
§ 2.7 矩形波导分叉问题的等效网络分析	53
参考文献	58
附录 2. I 传输线基本理论	59
第三章 介质波导	61
§ 3.1 介质界面对平面波的反射和折射——布儒斯特角和临界角	62
§ 3.2 吸收介质边界上的反射和折射	66
§ 3.3 单层平板介质对平面波的反射和透射	67
§ 3.4 横向谐振、表面波和漏波	70
§ 3.5 单层平板介质波导	74
§ 3.6 多层平板介质波导	79
§ 3.7 条形介质波导的近似分析	87
§ 3.8 介质波导侧面不连续效应的定性分析	91
§ 3.9 条形介质波导的模式匹配分析	93
参考文献	105
第四章 微带、鳍线和共面波导	106
§ 4.1 概述	106
§ 4.2 分析模型及其积分方程表达式	107
§ 4.3 谱域格林函数	108

§ 4.4 积分方程的矩量法解	117
§ 4.5 谱域法	119
§ 4.6 直线法	124
参考文献	133
附录 4. I 利用 Helmholtz 方程推导直线法中的格林函数	134
第五章 周期结构	138
§ 5.1 周期结构的一般性质	138
§ 5.2 周期层状介质波导	143
§ 5.3 正弦变化的周期介质	146
§ 5.4 周期非对称金属栅	149
§ 5.5 介质栅天线的模式匹配分析	152
§ 5.6 介质栅天线的扰动分析	158
§ 5.7 金属栅加载毫米波介质天线	167
参考文献	171
第六章 谐振器	173
§ 6.1 概述	173
§ 6.2 谐振器的一般特性	175
§ 6.3 空腔谐振器	177
§ 6.4 微带谐振器	182
§ 6.5 介质谐振器	193
§ 6.6 开放式谐振器	200
§ 6.7 谐振法分析波导结构的不均匀性	202
参考文献	206
第七章 波导结构的瞬态特性及其时域分析	207
§ 7.1 引言	207
§ 7.2 波导结构瞬态特性的频域分析	208
§ 7.3 FD-TD 方法的基本原理	209
§ 7.4 均匀传输线的二维 FD-TD 分析	218
§ 7.5 包含铁氧体介质波导结构的时域分析	222
§ 7.6 圆柱形波导结构时域分析	225
§ 7.7 传输线矩阵(TLM)法	229
§ 7.8 FD-TD 方法与 TLM 方法的联系与区别	240
参考文献	243

第一章 电磁场基本理论

本章简述电磁场的基本理论，它是研究各类导行波结构——波导的基础。

本章从描述电磁场基本规律的 Maxwell 方程开始，接着讨论反映物质宏观特性的结构方程。其后，对诸如复数 Poynting 定理，边界条件、辐射条件及边缘条件，唯一性定理、等效原理、磁流与磁荷，互易定理，偏振，电磁场的矢量位以及波型的分类等电磁基本问题作了简述。鉴于格林函数在解波导问题中的重要性，本章在 § 1.9 专门进行讨论。本章最后简要讨论了各向同性介质、各向异性介质中平面电磁波传播的一般特性。这是因为本书所讨论的大部分波导，其中波的传播最终可分解为平面波或准平面波的叠加。

§ 1.1 电磁场基本方程

电磁波沿波导的传播服从 Maxwell 方程。它们是

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.2)$$

对上面两式取散度并利用电荷守恒定率

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (1.1.3)$$

可得到

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1.5)$$

所以式 (1.1.4)、(1.1.5) 不是独立的方程，但一般把式 (1.1.1)、(1.1.2)、(1.1.4) 和 (1.1.5) 叫做 Maxwell 方程。式中 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ 和 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ 分别代表电场强度、电位移(或称电通量密度)、磁场强度和磁感应强度(或称磁通量密度)，它们都是矢量。 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 、 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 则为矢量电流密度和标量电荷密度。式(1.1.2)中 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ 包括两项

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.6)$$

$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}, t)$ 为传导电流密度， $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t)$ 为源电流密度，表示对场的激励。式(1.1.1)表示磁场随时间变化而感生出电场；式(1.1.2)右边第一项 $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ 叫作位移电流。位移电流与传导电流、源电流一起构成总电流。所以式(1.1.2)表示总电流感生出磁场。式(1.1.4)表示电力线终止于电荷，而式(1.1.5)表示磁力线永远是封闭的。因为到现在为止，尚未发现孤立的磁荷存在。

如果所研究的空间里没有源，即 $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t)$ 、 $\rho(\mathbf{r}, t)$ 均消失，而且电磁场随时间作简谐变化，并用复数表示其场量，即矢量 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}]$$

其中 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 为复矢量, ω 为角频率。 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ 可用其实部 $\mathbf{A}_r(\mathbf{r})$ 和虚部 $\mathbf{A}_i(\mathbf{r})$ 表示

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}_r(\mathbf{r}) + j\mathbf{A}_i(\mathbf{r})$$

此时 $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ 可表示为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] = \mathbf{A}_r(\mathbf{r}) \cos \omega t - \mathbf{A}_i(\mathbf{r}) \sin \omega t$$

引入复矢量后无源空间 Maxwell 方程为

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -j\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (1.1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = j\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_c(\mathbf{r}) \quad (1.1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1.10)$$

式中 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 和 $\mathbf{J}_c(\mathbf{r})$ 均为复矢量, 它们既有幅度、相位还有方向。

用简谐变化的场代替一般时变场, 无损于分析的普遍性。因为人们熟知的其它非简谐变化的场可用 Fourier 级数 (周期 T 有限) 或 Fourier 积分 (周期 T 无穷) 来表达。而它带来的好处是使四维场问题简化为三维场问题, 有利于电磁场问题的求解。通过 Fourier 展开, 可将一般的时变场用时谐场的叠加表示, 即

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega_n t} \quad (\text{周期 } T \text{ 有限})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (\text{周期 } T \text{ 无穷})$$

这里要求是媒质是线性的, 否则叠加原理不能应用。 $\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, \omega)$ 、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ 叫做时变场 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的频谱 (离散的或连续的), 这时四维场问题简化为空间三维场问题, 我们把这种处理电磁问题的方法叫做电磁场的频域分析法。而式 (1.1.7) ~ (1.1.10) 就是频域中的 Maxwell 方程。本书对波导问题的处理, 除了瞬态响应的研究外, 多数从频域中的 Maxwell 方程出发。所以式 (1.1.7) ~ (1.1.10) 是本书处理电磁问题的一组基本方程。其中 (1.1.7) 和 (1.1.8) 是独立的, (1.1.9) 和 (1.1.10) 可通过电流连续方程导出。

具有两个独立的方程 (1.1.7) 和 (1.1.8) 还不足以解出 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{B}$ 四个未知量。还要知道由物质特性决定的 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{J}_c$ 跟 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 等量之间的关系。这些关系为物质的结构方程所描述。

§ 1.2 物质的结构方程

物质的结构方程反映了电介质、磁介质和导体的宏观特性。对于自由空间, 结构方程为

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.2.1)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{J}_c = 0 \quad (1.2.3)$$

即 $\mathbf{D}$ 跟 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 跟 $\mathbf{H}$ 为简单的线性关系。常数因子 ϵ_0 、 μ_0 分别叫做真空介电常数和真空磁导率, 取值分别为

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} && \text{法拉 / 米 (F/m)} \\ \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} && \text{亨利 / 米 (H/m)} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

对于各向同性电磁介质，在实际上通常遇到的场强范围内，结构方程仍然为简单的线性关系

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.2.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} \quad (1.2.7)$$

式中 σ 是物质电导率。 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 分别为介质的宏观电极化强度和磁化强度，它们与 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 成正比

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (1.2.9)$$

χ_e 、 χ_m 为介质的宏观电极化率和磁化率。将上两式代入 (1.2.5) 和 (1.2.6)，得到

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.2.10a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (1.2.10b)$$

ϵ 、 μ 为介质的介电常数和磁导率。比值

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 = 1 + \chi_e \quad (1.2.11)$$

$$\mu_r = \mu / \mu_0 = 1 + \chi_m \quad (1.2.12)$$

叫做介质的相对介电常数和相对磁导率。

在各向异性介质中，矢量 $\mathbf{D}$ 跟 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 跟 $\mathbf{B}$ 最广义的线性关系为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1.2.13)$$

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \quad (1.2.14)$$

引进并矢 ϵ 和 μ 后，上两式可简记为

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad (1.2.15)$$

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (1.2.16)$$

有关并矢的定义与运算法则见本章附录 1。

结构方程为线性关系所表示的介质称为线性介质。线性介质中 ϵ 、 μ 、 σ 不是电场 $\mathbf{E}$ 或磁场 $\mathbf{H}$ 的函数。在非线性质介质中，电极化强度 $\mathbf{P}$ 、磁化强度 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 不再是线性关系

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\chi_e^{(1)} \mathbf{E} + \chi_e^{(2)} \mathbf{E}^2 + \chi_e^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots) \quad (1.2.17)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m^{(1)} \mathbf{H} + \chi_m^{(2)} \mathbf{H}^2 + \chi_m^{(3)} \mathbf{H}^3 + \dots \quad (1.2.18)$$

因此 ϵ 、 μ 不再是常量而跟 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 幅度有关。 $\chi_e^{(1)}$ 、 $\chi_e^{(2)}$ 、 $\chi_e^{(3)}$ 和 $\chi_m^{(1)}$ 、 $\chi_m^{(2)}$ 、 $\chi_m^{(3)}$ 分别叫做介质的一次、二次、三次电极化率和磁化率。

根据物质结构的经典电子理论， ϵ 、 μ 为频率的函数，在高频电场作用下， $\mathbf{D}$ 滞后于合成电场强度 $\mathbf{E}$ ， $\mathbf{B}$ 滞后于合成磁场强度 $\mathbf{H}$ 。 ϵ 、 μ 为复数

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) - j\epsilon''(\omega) \quad (1.2.19)$$

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) - j\mu''(\omega) \quad (1.2.20)$$

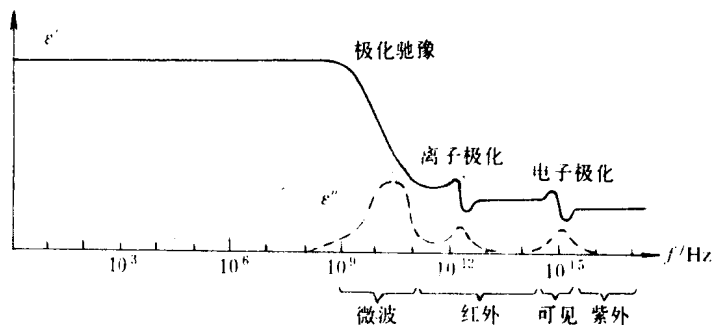


图 1.2.1 典型介质的 ϵ' 、 ϵ'' 与频率的关系

$\epsilon'(\omega)$ 是复介电常数的实部, 它与频率函数的关系确定电磁波在介质中传播的色散特性; $\epsilon''(\omega)$ 为复介电常数的虚部, 由它确定电磁波在介质中的损耗。对于复磁导率 $\mu(\omega)$ 的实部 $\mu'(\omega)$ 和虚部 $\mu''(\omega)$ 也可作类似的解释。一种具有电子极化、离子极化和偶极子极化三种机构的假想介质的 ϵ' 和 ϵ'' 与频率关系如图 1.2.1 所示。

这个图着重示出了这三种极化机构所影响的频率范围。

在技术科学中通常用介质损耗角 δ_e 来表示介电损耗。 δ_e 定义为

$$\delta_e = \tan^{-1} \epsilon''/\epsilon' \quad (1.2.21)$$

由于实际上对于一般介质, 总有 $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (\epsilon' - j\epsilon'') \mathbf{E} \\ &= \epsilon'(1 - j\epsilon''/\epsilon') \mathbf{E} \\ &\approx \epsilon' e^{-j\delta_e} \mathbf{E} \end{aligned}$$

此式表明介质损耗角 δ_e 实际上表示电介质中电位移矢量 $\mathbf{D}$ 与电场强度 $\mathbf{E}$ 之间的相位差。

关于金属材料的介电常数, 对于微波及其以下频率的电磁波, $\epsilon''/|\epsilon'| \gg 1$, 介电常数虚部是主要的, 这时金属呈现导电性, 电磁波在金属中受到强烈衰减。对于紫外线或更短波长的电磁波, $\epsilon' \approx 1$, $\epsilon'' \ll 1$, 金属呈现电介质特性, 对于电磁波近乎透明。对于红外波段, 虽然 $\epsilon''/|\epsilon'| \ll 1$, 但这时金属表面对于电磁波仍有强烈反射, 趋肤深度很小, 损耗比微波频段大的多。

介电常数实部和虚部之间有内在关系, 这是 Kramers-Kroning 关系

$$\epsilon'_r(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega' \epsilon''_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (1.2.22)$$

$$\epsilon''_r(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\epsilon'_r(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad (1.2.23)$$

式中 ω' 为复频率, ω 为 ω' 的某一实正值。Kramers-Kroning 关系指出, 色散介质 (ϵ_r 与频率有关) 一定有损耗, 而损耗介质 ($\epsilon'' \neq 0$) 一定色散。

导出 Kramers-Kroning 关系时所依据的原则是十分基本的。除因果律外, 仅要求系统是线性的, 因此 Kramers-Kroning 关系具有普遍性。其它线性系统的复响应函数实部和虚部之间也有类似关系。

线性、均匀、各向同性、无色散的介质, 通常叫做简单介质。 σ 很大的介质称为导体, σ 很小的叫做绝缘体。 σ 为无穷大的介质称为完纯导体, 而 $\sigma = 0$ 的介质叫做完纯介质。良导体的介电常数很难测量, 其相对介电常数的实部通常视作 1。对于一般介质, $\epsilon_r > 1$ 。在等离子体中 ϵ_r 可以小于 1, 甚至为负。对于大多数线性介质, 其磁导率与真空磁导率非常接

近, μ_r 一般可视作 1。对于铁磁介质, $\mu_r \gg 1$, 通常是非线性的。

对于电导率 σ 不为零的有耗介质, 利用复介电常数概念, Maxwell 方程组中关于磁场旋度的方程可以写成更简洁的形式

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E} = j\omega\epsilon_0 \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right) \epsilon_r\mathbf{E} \quad (1.2.24)$$

如果定义复数相对介电常数

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r \left(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0\epsilon_r}\right) = \epsilon_r(1 - j\tan\delta)$$

其中

$$\tan\delta = \sigma/\omega\epsilon_0\epsilon_r$$

δ 为损耗角。式 (1.2.24) 可简写为

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0\tilde{\epsilon}_r\mathbf{E} = j\omega\tilde{\epsilon}\mathbf{E} \quad (1.2.25)$$

$\tilde{\epsilon}$ 为复数, 其实部、虚部分别为

$$\operatorname{Re}\tilde{\epsilon} = \epsilon_0\epsilon_r$$

$$\operatorname{Im}\tilde{\epsilon} = \epsilon_0\epsilon_r\tan\delta$$

如果介电常数本身也有虚部 ϵ'' , 则两个虚数应该相加, 从而得出总的虚部和总的损耗角。

引入 $\tilde{\epsilon}$ 后, Maxwell 方程可写成

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.2.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\tilde{\epsilon}\mathbf{E} \quad (1.2.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (1.2.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.29)$$

为了简化书写, 以后不再区分 ϵ 和 $\tilde{\epsilon}$, 统一用 ϵ 表示, 只要记住 ϵ 的虚部包括了 $\sigma \neq 0$ 的欧姆损耗的影响。

§ 1.3 时谐电磁场的 Poynting 定理

Poynting 定理指出, 单位面积上电磁能流的时间变化率由复矢量 $\mathbf{S}$ 表示, 它定义为电场与磁场的叉积

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (1.3.1)$$

右上角星号表示复共轭。这一关系可以从 Maxwell 方程得到。

将无源空间 Maxwell 方程 (1.1.7)、(1.1.8) 重写如下

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \quad (1.3.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_c \quad (1.3.3)$$

式中 ϵ 、 μ 可以为复数, 也可能与空间坐标有关

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$$

$$\mu = \mu' - j\mu''$$

以 $\mathbf{H}$ 的共轭复数 $\mathbf{H}^*$ 点乘 (1.3.2), 再用 $\mathbf{E}$ 点乘 (1.3.3) 的复共轭, 相减, 并注意到 $\mathbf{J}_c = \sigma\mathbf{E}$, 可得

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = -j\omega [\mu|\mathbf{H}|^2 - \epsilon^*|\mathbf{E}|^2] - \sigma|\mathbf{E}|^2 \quad (1.3.4)$$

或者

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -j\omega [\mu|\mathbf{H}|^2 - \epsilon^*|\mathbf{E}|^2] - \sigma|\mathbf{E}|^2 \quad (1.3.4a)$$

取式 (1.3.4a) 的实部

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\omega [\mu'' |\mathbf{H}|^2 + \epsilon'' |\mathbf{E}|^2] - \sigma |\mathbf{E}|^2 \quad (1.3.5)$$

式中 $\mathbf{P} = \text{Re}(\mathbf{S})$, 为 Poynting 矢量的实部。如对 (1.3.5) 由闭曲面 S 包围的元体积 V 积分, 并利用矢量分析中奥氏定理, 得到

$$-\int_S \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS = \omega \int_V [\mu'' |\mathbf{H}|^2 + \epsilon'' |\mathbf{E}|^2] dV + \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 dV \quad (1.3.6)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为闭曲面 S 向外的法向单位矢量。式 (1.3.6) 右方第二项表示体积 V 内介质中欧姆损耗功率的时间平均值。由于复数介电常数 ϵ 和复数磁导率 μ 的虚部表示介质中的损耗, 右方第一项表示体积 V 内介质损耗功率的时间平均值。这两项之和表示 V 内全部损耗功率的时间平均值, 用 P_l 表示。故 (1.3.6) 左边就表示通过闭曲面流入体积 V 的功率。因此复数 Poynting 矢量的实部表示通过单位面积的电磁功率流。

再取式 (1.3.4a) 的虚部

$$\nabla \cdot [\text{Im } \mathbf{S}] = -2\omega (W_m - W_e) \quad (1.3.7)$$

式中

$$W_m = \frac{1}{2} \mu' |\mathbf{H}|^2 \quad (1.3.8)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon' |\mathbf{E}|^2 \quad (1.3.9)$$

W_e 、 W_m 分别为电场能量和磁场能量密度。故复数 Poynting 矢量虚部的散度等于 -2ω 乘上磁场能量密度与电场能量密度时间平均值之差。它表明当体积 V 内贮存的电能与磁能的时间平均值不相等时, 对于时间呈现电性的或磁性的这部分平均净贮能, 需用复数 Poynting 矢量的虚部来平衡。在一个闭合的区域中所包含的电磁场系统与外界交换能量时, 可以等效地表示成具有一定端口的网络系统, 系统中贮存的电能和磁能的时间平均值之差可用网络输入阻抗的电抗部分等效地表示。

§ 1.4 边界条件、辐射条件和边缘条件

1. 边界条件

Maxwell 方程加上物质的结构方程还不能得出具体电磁场问题的确定解。要得出它的确定解, 还必须给出一定的边界条件。所谓边界条件就是不同介质分界面两边的场量必须满足的关系, 也就是边界上电磁场应服从的规律。将积分形式的 Maxwell 方程应用到不同介质的分界面, 即可得出这一规律, 这就是边界条件

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (1.4.1)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_s \quad (1.4.2)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \mathbf{J}_s \quad (1.4.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (1.4.4)$$

式中 $\mathbf{n}$ 为介质分界面法线方向的单位矢量, 方向由介质 2 指向介质 1, ρ_s 和 $\mathbf{J}_s$ 分别表示电荷和电流的面密度, 下标 1 和 2 分别表示介质 1 和介质 2 中的量。

下面分两种情况进一步讨论边界条件。

(1) 介质 — 介质分界面

对于通常定义的介质, 电导率 σ 有限, 面电流密度 $\mathbf{J}_s$ 消失, 边界条件为

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (1.4.5)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 \quad (1.4.6)$$

即分界面两边电场和磁场的切向分量连续。

(2) 介质 — 导体分界面

对于完导体, $\sigma \rightarrow \infty$, 导体中的电场必须消失, 否则导体中的电流密度 $\mathbf{J}$ 趋于无穷。但在导体表面, 面电流密度 $\mathbf{J}_s$ 仍可取有限值, 因此在介质—导体分界面

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0 \quad (1.4.7)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s \quad (1.4.8)$$

即在完纯导体表面, 电场切向分量为零。

2. 辐射条件和边缘条件

在有些问题中, 边界处于无穷远或包含边缘。所谓边缘是指几何结构上的奇异性, 例如尖劈的边缘, 圆锥的尖顶等, 在这些地方导数不存在。边界处于无穷远或存在边缘的情况下, 从 Maxwell 方程可能导出不止一个解, 这些解虽然在数学上都是可以接受的, 但其中只有一个是符合物理意义的。这时, 为了保证解的合理性, 就要引入某些附加的物理限制, 这就是辐射条件和边缘条件。

考虑一个无界空间, 其中所有的源都在有限大小区域内。此时场量与距离的依从关系必须满足物理条件, 就是说能量由源区向外传。这个要求构成了无限远表面上的边界条件, 并称为辐射条件。当介质存在损耗时, 这个条件很容易规定为在无穷远处的场为零, 这是因为离开源向外传播的场, 由于存在损耗, 其幅度总是不断衰减的。由这一条件可在满足方程的可能解中选出唯一的合理解。例如一个解中包含因子 $\exp(-j\beta z - \alpha z)$, 另一个解中包含因子 $\exp(-j\beta z + \alpha z)$, 其中 β 和 α 分别为相位常数和衰减常数。对于正 z 方向传播的波, 由辐射条件可判定唯一的合理解, 应该是包含因子 $\exp(-j\beta z - \alpha z)$ 的解, 也就是满足无穷远处收敛的解。当介质是各向同性的无耗介质时, 相应的辐射条件为索末菲耳 (Sommerfeld) 条件。在一维情况下, 这个条件为

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \pm jkA \right) = 0 \quad (1.4.9)$$

式中 A 代表一个波动, 它是满足标量波动方程的一个量, 称为标量波函数。 k 为传播常数。一维情况下的 A 代表一个平面波。容易验证包含因子 $\exp(\pm jkz)$ 的解是满足式 (1.4.9) 的向 $\pm z_0$ 方向传播的平面波的合理解。

二维、三维情况的辐射条件为

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial A}{\partial r} + jkA \right) = 0 \quad (1.4.10)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial A}{\partial r} + jkA \right) = 0 \quad (1.4.11)$$

式 (1.4.10) 中 r 为柱坐标径向变量, A 代表柱面波。对于点源产生的三维场, 式 (1.4.11) 中 A 代表球面波, r 代表径向。

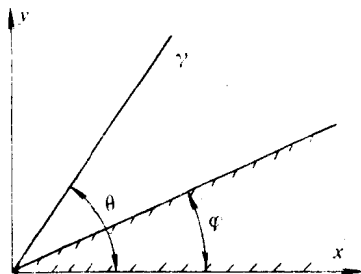


图 1.4.1 导电劈

对于图 1.4.1 所示的具有内角 φ 的导电劈，可以发现，在趋于边缘处，若干场的分量变成无限大。然而这个奇异点所许可场的阶次却须使边缘附近的储能是个有限值。下面略去具体推导，只给出导电劈的边缘条件。

在 $r=0$ 附近，场的分量可展开为 r 的幂级数，系数则是 θ 和 z 的函数。令

$$\left. \begin{aligned} H_z &= r^\alpha (a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots) \\ H_\theta &= r^\alpha (b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + \dots) \\ H_r &= r^\alpha (c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + \dots) \\ E_z &= r^\alpha (A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots) \\ E_\theta &= r^\alpha (B_0 + B_1 r + B_2 r^2 + \dots) \\ E_r &= r^\alpha (C_0 + C_1 r + C_2 r^2 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (1.4.12)$$

将式 (1.4.12) 代入柱坐标 Maxwell 方程，并令同幂的系数相等，就得含有展开式待定系数的方程组。利用电磁能在边缘附近任何有限区域内为有限值的条件，最后得出 α 满足的关系为

$$\alpha = \frac{n\pi}{2\pi - \varphi} - 1 \quad (1.4.13)$$

当 $\varphi=0$ (相当于导体片的边缘)，所允许的最小 α 值是 $-1/2$ 。当 $\varphi=\pi/2$ 时，所允许的最小 α 值是 $-1/3$ ，而在 $\varphi=\pi$ 的条件下， $\alpha=0$ 。 α 值确定后，场的奇异点的阶次也就确定了，这也就是边缘条件。在实际计算中可以发现，能得到唯一合理解 (收敛解) 的充要条件是边缘条件得到满足。所以往往可以利用边缘条件来得到唯一的合理解。

§ 1.5 唯一性定理、等效原理、磁流和磁荷

对于一个正确规定的问题，唯一性定理保证有一个而且只有一个解。假定感兴趣的区域用 V 表示，而且它被一个闭合表面 S 所包围。假设 V 内的一组源对场量产生两个不同的解，并令 $\mathbf{E}_a$ 和 $\mathbf{H}_a$ 表示一组解， $\mathbf{E}_b$ 和 $\mathbf{H}_b$ 表示另一组解，两组解均满足 Maxwell 方程。这两组解之差用 $\delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_a - \mathbf{E}_b$ 和 $\delta\mathbf{H} = \mathbf{H}_a - \mathbf{H}_b$ 表示。唯一性定理要求 $\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{H} = 0$ ，现证明如下。

由 Maxwell 方程的线性性质，显然 $\delta\mathbf{E}$ 和 $\delta\mathbf{H}$ 满足 V 中的无源 Maxwell 方程

$$\nabla \times \delta\mathbf{H} = j\omega\epsilon\delta\mathbf{E} + \sigma\delta\mathbf{E} \quad (1.5.1a)$$

$$\nabla \times \delta\mathbf{E} = -j\omega\mu\delta\mathbf{H} \quad (1.5.1b)$$

重复类似于 § 1.3 中导出复数 Poynting 定理时的步骤，可得到关系

$$\nabla \cdot (\delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}^*) = -j\omega [\mu|\delta\mathbf{H}|^2 - \epsilon^*|\delta\mathbf{E}|^2] - \sigma|\delta\mathbf{E}|^2 \quad (1.5.2a)$$

$$\text{或} \quad \iint \delta\mathbf{E} \times \delta\mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} = -j\omega \iiint [\mu|\delta\mathbf{H}|^2 - \epsilon^*|\delta\mathbf{E}|^2] dV - \iiint \sigma|\delta\mathbf{E}|^2 dV \quad (1.5.2b)$$

为使上式左方的面积分为零，则要求右方的体积分为零。在右方体积分的三项中被积函数 $|\delta\mathbf{E}|^2$ 及 $|\delta\mathbf{H}|^2$ 为非负函数，使等式右方为零的唯一可能是 $|\delta\mathbf{E}|^2$ 及 $|\delta\mathbf{H}|^2$ 均为零。这意味着区域 V 内的场只有唯一的一组解。

如果对于 V 内场的任何可能解，在 V 的边界面 S 上电场或磁场的切线分量要求取确定

值, 那么对于所假定的 V 内的两组解在 S 面上应有

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times d\mathbf{S} = 0 \quad \text{或} \quad (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times d\mathbf{S} = 0$$

在 S 的每一个面元上如果上面的条件能够保证成立, 就可使式 (1.5.2b) 左方的面积分为零。因此电磁场的唯一性定理可表述如下: 对于一个被闭合面 S 包围的区域 V , 如果 S 面上的电场或磁场的切向分量给定, 或者在 S 面上的部分区域给定 $\mathbf{E}$ 的切线分量, 在 S 的其余表面给定 $\mathbf{H}$ 的切向分量, 那么在区域 V 内的电磁场是唯一确定的。

由唯一性定理可得到等效原理。在某一空间区域内, 能够产生同样场的两种源, 称其在该区域内是等效的。很多场合下, 用等效源代替实际源, 会给解题带来很大方便。

按照等效原理, 如果源在体积 V 内, 欲求 V 外某一点场时, 可以这样处理: 假设 V 内为零场, 此时封闭面 S 上出现了不连续, 为满足边界条件, 可假定 S 上有切向场 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ 为 S 法线方向的单位矢量, $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 为 S 面上的场。这样 V 内一次源的影响就为边界面上的二次源 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ 所代替。根据唯一性定理可以看出, 二次源可以产生唯一的与真实源相同的场。

以上所引进的二次源是一种等效源, 或者说是一种虚源。其中 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ 是容易理解的, 它相当于电流密度矢量, 记作 $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ 。 $\mathbf{E} \times \mathbf{n}$ 在以前没有见到过, 为了方便起见, 对照 $\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}$, 对偶地把它叫做磁流密度矢量, 记作 $\mathbf{J}_{ms} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}$ 。因而这里所引进的新的波源磁流, 实际上就是切向电场, 这纯粹是为了数学上的方便。但是真正的波源还是电荷和电流, 因为切向电场实际上也是电荷和电流产生的。

已经知道, 位移电流密度和传导电流密度与磁场强度 $\mathbf{H}$ 的关系为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D}$$

引进磁流密度后, 仿此也可写出

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - j\omega\mathbf{B}$$

引入虚拟磁流后, 按照连续性原理, 必定有磁荷, 于是有

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_m = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t}$$

由于旋度的散度必为零, 可以推出

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$$

引进磁荷和磁流后, Maxwell 方程变为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\mathbf{J}_m - j\omega\mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\mathbf{D} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= \rho_m \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3)$$

式中 ρ_m 为磁荷密度, 单位为 $\text{V} \cdot \text{s}/\text{m}^3$, $\mathbf{J}_m$ 为磁流密度, 单位为 V/m^2 。

这时相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) &= \mathbf{J}_s \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) &= -\mathbf{J}_{ms} \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) &= \rho_s \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) &= \rho_{ms} \end{aligned} \right\} \quad (1.5.4)$$

下标 s 表示电流、磁流、电荷、磁荷的面密度。