岩波講座 基礎工学 5

数理計画法 I

関根泰次 著

岩波書店

岩波講座　基礎工学 5

数　理　計　画　法

I

関　根　泰　次

岩　波　書　店

岩波講座　基礎工学　5 数理計画法 I　　（全19巻／第4回配本）

1968年4月3日　第1刷発行 ©
東京都千代田区神田一ツ橋2-3　株式会社 岩波書店／精興社印刷・松岳社製本

はじめに

本講は，大学２年後期の学生を対象に，数理計画法の基本的事項を理解せしめることを目的に記述したものである．

工学問題において，われわれがある物をつくるとか，ある機能を実現させたいとかいうときに，いくら費用がかかっても，いくら労力がかかってもよいという場合もあるが，多くの場合，与えられた条件のもとで，もっとも効果が大きくなるようにするにはどのようにしたらよいかということが重要になる．この種の問題の例をいくつか，以下に考えてみよう．

(1)　ある栄養剤を作るときに，この栄養剤１錠中に含まれるビタミンA, B, C, Dの量の最低含有量が規定されているとする．この栄養剤をつくる原料a, b, cがあって，各々の原料に含まれるビタミンA, B, C, Dの含有量が異なり，同時に原料a, b, cの１g当りの値段が与えられているとき，全体としての原料費が最小になるようにするには原料a, b, cをどのくらいずつ用いればよいかというような問題はこの種の問題である．

(2)　また数台の発電機があってある大きさの負荷に電力を供給する場合，各発電機の燃料費特性(一般にその出力の非線形関数で与えられる．また出力の大きさにも上限，下限が存在する)が定まっている時，全体としての発電費用が最小になるようにするにはどの発電機とどの発電機を組み合わせて各発電機出力をどのように定めたらよいかという問題もこの種の問題の一例である．

(3)　あるロケットをある地点に向かってうち出す時にできるだけ少ない燃料費ですませるには，飛翔中の各点でどの程度ロケット燃料を噴出させればよいか．この場合，一時に噴出しうる燃料の量(あるいは加速度の大きさ)や，飛翔高度などに限界の与えられることがあるので，この範囲内におさまっていることが必要である．

(4)　ある国のハイウェー網を建設するのに，この国の都市間をむすぶ交通量を充足するように建設するものとする．この場合全体の建設費を最も少なく

するには，どのようにすればよいか．この際，単に都市間の交通量を満たすのみでなく，いずれの道路が1本遮断されても不自由のないようにするにはどのようなハイウェー網にすればよいかという条件がつけられることもある．ハイウェー網を電話通信網とおきかえても同じようなことが成り立つであろう．

この種の問題は数学的には，あたえられた**制約条件**のもとで与えられた**目的関数**を最小(最大)にするような解を見出すことになる．このような問題は，すでに微分学および変分学などで扱ったわけであるが，数理計画法はさらにひろい立場からこれを論じるのである．

学問的な関連という点では，この数理計画法は，各種の要素を組み合わせて，ある機能を果たさせるシステムの設計・運用の計画をたてる場合に非常に重要な武器となるだけでなく，数理計画法の基底に横たわる考え方や思想は**システム工学**自体の基本的思考方法とも一致するものである．また上に示した(3)の例でもわかるように自動制御，特にその中でも**最適制御**とよばれる分野に深い関連をもっている．

なお特にここでふれておかねばならないのは**計算機技術**，中でもそのソフトウェア部門との関連である．すでにのべたように数理計画法はあらゆる種類の工学部門と密接な関係をもっているが，数理計画法が実際的な効力を発揮するには，計算機の助けを借りなければならないし，また数理計画法で論じられる各種の手法が計算機の応用を前提として考えられている．事実現用の計算機にはすべてといってよいくらい，数理計画法の基本的な手法，特に線形計画法などのプログラムが用意されている．したがって，数理計画法を実際問題に応用して効果をあげるには計算機の利用技術についての知識と訓練が必要になる．しかし，これらの計算機利用技術はそれだけで非常に大きな一つの分野であるし，本講の目的から深く立ち入ることはできないので，これに関することは一切触れないが，計算機技術との関連の重要性について読者がよく銘記されることを希望する．

さて，つぎに本講の**構成**および，本講で扱った内容，本講で除外した部門について一言記しておこう．

本講は5章より成るが，第1章は“計画問題と最適化手法”と題し，工学問題と最適化手法との関連，数理計画法の数学的分類などを論じたものであり，

第2章以降の展望を与えるものである．

第2章，第3章は共に線形計画法を扱ったものであり，本講の主要部分となるものである．すなわち，第2章は“線形計画法”と題し，線形計画の基本的事項，アルゴリズム，双対性などについて論じたものである．第2章の内容は単に線形計画法を理解するためだけでなく本講の以下の記述を理解するのにぜひ必要なことであるから，しっかり理解することがのぞましい．第3章は，第2章の基礎事項を前提として，第2章にのべた一般的解法によらずに問題の特殊性を利用して効率よく解くことのできる問題を“特殊線形計画”と題してのべたものであるが，ここにのべられるのは“特殊”とはいっても実用上極めて広い応用範囲をもっている．また，第2章にのべた一般的解法を一層有効に活用するための手法や，線形計画法を拡張して非線形計画や非凸計画問題を解く方法などについてもふれている．この第3章の内容は以上のような意味で第2章にのべられた事柄を一層深く理解するのに役立ち，さらに数理計画法で論ぜられる手法が極めて融通性に富むものであることを理解することができよう．

第4章は非線形計画法についてしるしたもので，まず線形計画と非線形計画の関連を論じたのち，非線形計画の基本定理であるクーン-タッカーの最適規準をみちびき，これをもとにして2次計画の解法をのべてある．非線形計画法に対しては線形計画のような統一的な解法は見出されていないが，実用上広い応用をもつ傾斜法についてやや詳しく扱っている．

第5章はいままでにのべた方法と異なって，特殊な構造をした最適化問題について威力を発揮する動的計画法について，その考え方，計算の具体的方法，適用の可能性など主として実用性という点に主眼をおいて説明してある．

本講の記述にあたっては，できるだけ理解を助けるため随所に例題をのせ，しかもこの例題で扱われる問題はほとんどすべての場合に同一の問題で一貫して説明してあるので，いろいろな考え方，手法の相互関係を一層よく理解するのにも役立つことと考える．また学んだことをほんとうに自分のものにするためにはできるだけ自分で鉛筆をとって問題をといてみることがのぞましいので，各章・各節の末尾に適当量の問題を掲げておいた．できるだけ活用されるよう望む次第である．

本講の内容を理解するには，線形代数学とマトリックスの初歩的事項さえ理

解していれば十分であろう．また，最適化手法としては，確率過程を含んだ計画問題やポントリャーギンの最大原理など極めて興味深いものもあるが学習年次を考えて割愛した．しかし本講に盛られた内容を十分理解すれば，さらに高度の勉強をする場合，また多くの実際問題を解く場合にも大きな支障はないものと思う．

最後に，読者諸氏におことわりしておかねばならないが，筆者は数学の専門家ではないので専門の方から御覧になると本講にはいろいろと不満な点も多いこととおそれる．しかし，筆者自身，これまで多くの実際問題に遭遇してこれらにいろいろの最適化手法を応用してみて，これこれの考え方で問題を理解したほうがよいのではないかという考え方の筋道みたいなものを自分なりに感じるようになった．本講をまとめる際の道案内のよりどころになったのもこの筋道であるが，これらの点について読者諸氏の御忠言をいただければ幸いである．

本講を草するにあたっては編集委員の諸先生の御指導はじめ，直接本講の原稿に目を通されてていねいな御助言をたまわった山口昌哉先生・得丸英勝先生(京都大学)，橋本文作先生(早稲田大学)，末武国弘先生(東京工業大学)，渡辺茂先生(東京大学)に厚く御礼申しあげたい．さらに伊理正夫先生(東京大学)には特にいろいろな御助言を得た．深く感謝の意を表したい．また筆者の勤務先における講義において，いろいろな形で本講の内容の吟味に協力された大学院および学部の学生に感謝したい．

目　　次

数理計画法 II 目次

表紙カット製作: 渡辺茂・槌屋治紀・藤野孝爾・幸村真佐男
(IBM データセンター設置 IBM 7090・プロッター使用)

第1章

計画問題と最適化手法

本章では，計画問題とは何かということ，数学的にこれを定式化する方法についてのべ，さらにこれらを数学的に分類した場合，大きくわけて凸計画法と非凸計画法にわけられることを説明する．本章は以下の各章の基礎となるものである．

1.1 計画問題と目的関数および制約条件

工学者がある問題を与えられたとき，その目的を達成する方法としては一般に幾通りものやり方が考えられるであろう．もちろんこの場合，どんなに費用がかかってもよいし，いかなる労力も惜しまないという性質の問題もあるが多くの場合，幾重にも考えられる可能性のうちもっとも経済的に安く，労力も少なく，時間も少なくて，しかも大きな効果をあげるにはどのようにしたらよいかということが問題にされることが少なくない．

たとえば，ある牛乳屋が，1000軒の家に牛乳を1本ずつ配達するのに，1軒目の家に1本牛乳をとどけて一旦店に戻り，また1本もって2軒目の家に配達し……というように，1軒に1本くばるごとに店に戻っていても，いつかは各家に牛乳を送りとどけるという目的は達せられるわけであるが，実際にはこのような愚かなことはしないであろう．なぜ愚かなのかといえば，このような方法ではまず第一に，時間がかかりすぎてしまうし，運ぶに要する労力も大変であるからである．いうまでもなく，1本ずつでなくある程度まとまった本数をもって店を出発し，店にもどらずに何軒かの家を回り，手持ちの牛乳がなくなったらまた店に戻って出直した方が，ずっと早くかつ楽に配達することができる．しかしこの場合，1000軒分の牛乳を一度にもって出発しようとすれば，おそらくその配達夫は，荷物が重すぎて動けなくなってしまうから，一時にもっ

て出発する本数にも適当な値があるであろうし，また1000軒の家をどういう順序でまわるかということについても，配達距離(または配達時間)を最も少なくてすませるために，この配達夫の選ぶべき道順にも適当な順路があるはずである．

このように考えていくと，われわれはこの種の**計画問題**(planning problem)を扱う場合に必ず考慮しなければならない要因として二つの事柄があることに気付く．第1の要因はたとえば上の例でいえば，もっとも賢明な配達方法とはなにかという賢明さをはかる尺度である．この場合，この尺度としては配達に要する全時間の長さ，あるいは配達に要する労力，あるいは，配達夫に支払うべき賃金の大きさなどによって判断することができる．どのような尺度によってはかるかは，何を目的にしてこの計画問題を考えるかによって異なるが，いずれにしても，計画問題には必ず**目的**(object)が存在しなければならない．

第2の要因は，この目的を達成する手段としてどのような方法が許されているかを規定する条件である．たとえば，上の例では，牛乳配達夫が一度にもちはこびできる牛乳の量は物理的に限界があるであろうし，もし配達に自動車などの運搬機械を使用する場合なら，積載量だけでなく，使用ガソリンの量などによって制約をうけることもある．また場合によっては，どこそこの家には，何時までに配達を終えなければならないという条件がつく場合もあるであろう．このように，われわれがある問題を与えられた場合，どのような手段・方法も許されるということは少なくて，必ずある制約のもとで考えなければならないことが多い．あるいは別の言葉でいえば，結果の良否を判断する場合には，その当事者がおかれていた周囲条件や制約を考慮にとらなければならないのが普通である．われわれは，このような計画問題に付随した各種の条件を**制約条件**(constraint または restriction)と呼んでいる．

上にのべたような型の計画問題はわれわれが従事している工学の分野だけでなく，経済・社会の分野もふくめて極めて容易に見出すことができ，種々の**要素**(component, element)の**活動**(activity)が有機的に組み合わされて成り立っている体系や組織の分析や計画になくてはならないものであるが，この問題は基本的には数学的に次のように表現される．すなわち，いま，われわれの決定すべき要素の活動を $\boldsymbol{x}$ であらわす時，

ベクトル変数 $\boldsymbol{x}$ がある制約領域 R に属するとき，R の上で定義される関数 $f(\boldsymbol{x})$ の最小値(最大値)を与える $\boldsymbol{x}$ の値 $\boldsymbol{x}^0$ およびその時の目的関数の最適値 $f(\boldsymbol{x}^0)$ を求めよ．

領域 R は変数 $\boldsymbol{x}$ がその中にとどまっていることを要求される条件を示す制約条件であり，**制約領域**(constraint domain)と呼ばれることもある．$f(\boldsymbol{x})$ はわれわれがその最適値(最小値または最大値)をもとめようとする関数であって，通常**目的関数**(objective function)という．

上の例でいえば，変数 $\boldsymbol{x}$ はたとえば，店から一時にもって出る牛乳の量 x_1, $x_2, \cdots, x_n, \cdots$ (x_n は n 回目にもって出る牛乳の量)や，配達する場合の道順を指定する変数 x_{ijt} (たとえば t 番目に i なる家から j なる家に行く時 $x_{ijt}=1$，しからざる場合 0)などを一括して示したものである．

また制約領域 R はこれらの x_n や x_{ijt} に課せられる制約条件式で，たとえば一時にもって出かけられる牛乳の量がある値 M より小さい値でなければならないならば

$$0 \leqq x_k \leqq M, \quad k=1,2,\cdots \tag{1.1}$$

とかきあらわせるし，また，各家庭は必ず1度訪ねなければならないということは

$$\sum_i \sum_t x_{ijt} = 1, \quad j=1,2,\cdots$$

などのようにかきあらわされる．

上にのべた各種の条件式(等式または不等式)で定められる変数 x_k, x_{ijt} などの領域が制約領域 R となる．

目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，前述のようにある配達方法 $\boldsymbol{x}$ に対する労力，費用などを $\boldsymbol{x}$ の関数としてあらわしたもので $\boldsymbol{x}$ が与えられれば一般に一義的に定まるものである．たとえば，この目的関数として，配達に要する総費用を考え，この費用が，配達するのにつかう車の賃借料と配達距離の二つの要因によってきまるものとしよう．いま配達車の大きさが店を出る時つみこむ牛乳の量 x_k できめられ，その賃借料が x_k^2 に比例するものとする．また配達料は配達距離に比例するものとすれば，i という家から j という家までの距離を d_{ij} として，この配達に要する総費用は次式であらわされる．

$$f(\boldsymbol{x}) = c_1 \sum_k x_k{}^2 + c_2 \sum_i \sum_j \sum_t d_{ij} x_{ijt} \qquad (1.2)$$

ただし，c_1, c_2 は正の比例定数である．

目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，ふつうスカラー関数である．目的関数がベクトル量の場合，すなわち，物理的に次元の異なる二つの関数，$f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})$ を同時に最小化(最大化)する問題も現在研究されつつあるが，まだ語るべき成果は得られていない．

制約領域 R は一般に $\boldsymbol{x}$ の関数で表現されるが，この関数は等式であらわされる場合もあるし，不等式であらわされる場合もある．等式であらわされる場合，たとえば $g(\boldsymbol{x})=0$ という条件は

$$g(\boldsymbol{x}) \geqq 0 \quad \text{および} \quad g(\boldsymbol{x}) \leqq 0$$

のごとく二つの不等式の組合せとしてあらわされるから R を規定する関数は一般に不等式であると考えてさしつかえない．さらにこの制約条件式は単に一つの関数でなく，たとえば

$$g_1(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad \text{および} \quad g_2(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad \text{および} \quad \cdots \quad \text{および} \quad g_m(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \qquad (1.3)$$

のごとく，m 個の不等式を同時に満足せねばならないこともある．

なお，ここで変数 $\boldsymbol{x}$ について一言ふれておこう．変数 $\boldsymbol{x}$ は連続量の場合もあるし，また離散的な値しかとらないこともある．上の例では，牛乳配達夫がはじめに店をでる時もってでるべき牛乳の総量 x_1 を変数にとった場合，もしこれが牛乳瓶で運ばれれば離散値になるし，大きな瓶か罐かにつめてまとめてもっていく場合は連続量となる．また，道順をきめる時も，上に示したように t 番目に i という家から j という家に向かう場合は $x_{ijt}=1$，しからざる時は $x_{ijt}=0$ ときめておけば変数 x_{ijt} は0か1かの二つの離散値しかとらないことになる．

1.2 凸 極 性

1.1節で計画問題には，目的関数と制約条件という二つの重要な要因があることをのべたが，数学的にこれをみた場合重要なのは，**凸極性**(convexity)という性質である．

まず制約領域 R が凸というのはつぎのようなことである．すなわち，いま R に属する任意の2点を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ とするとき，この2点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を連ねる線分上の任意の点

$$\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2, \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \tag{1.4}$$

が再び R に属するとき，この R を凸であるというのである．凸という言葉の意味は図1.1(a),(b)からも明らかで図1.1(b)のような領域は，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ を連ねる線分上の点が外にはみだしてしまうから凸ではなく非凸である．

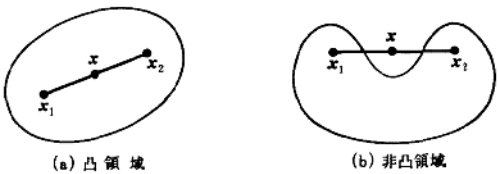

図1.1　制約領域の凸極性

たとえば前節の例で牛乳を3回にわけてはこぶとき(*1.1*)は

$$0 \leqq x_1 \leqq M$$
$$0 \leqq x_2 \leqq M$$
$$0 \leqq x_3 \leqq M$$

となり，さらに配達すべき牛乳の総量 V が与えられている時は

$$x_1 + x_2 + x_3 = V$$

となるから，この x_1, x_2 に課せられる制約領域は，図1.2の斜線を施した部分のようになる(このようになることについて読者みずから考察せられよ)．

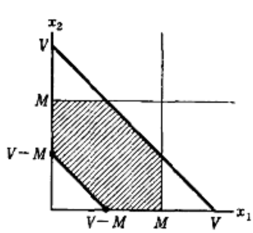

図1.2　制 約 領 域

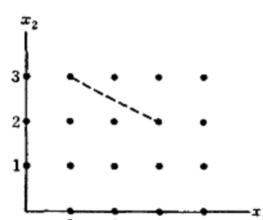

図1.3　離散変数領域と非凸極性

また変数 x_1, x_2 が整数値しかとらないような時は図1.3のような格子点しかとらず，これら格子点をむすぶ線上の点はほとんどすべて整数値とならなくなるから非凸極性のもっとも甚だしいものである．前節の x_{ift} は0か1かの値しかとれないからちょうどこの場合にあてはまる．

なお(*1.3*)の各式で与えられる領域

$$R_i:\ g_i(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \tag{1.5}$$

がすべて凸ならば $R_1, R_2, \cdots, R_m$ のいずれにも属している領域，すなわち

$$R = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_m \tag{1.6}$$

が再び凸になることは図1.4からも明らかであろう(数式的に(*1.4*)の条件が満たされることについて，読者各自試みられよ)．

図1.2に斜線で示した制約領域も

$$R_1:\quad 0 \leqq x_1 \leqq M$$
$$R_2:\quad 0 \leqq x_2 \leqq M$$
$$R_3:\ \begin{cases} 0 \leqq x_3 \leqq M \\ x_1 + x_2 + x_3 = V \end{cases}$$

の重ね合せとして生じたものである．われわれが日常当面する問題はこのように R_1 という条件，R_2 という条件，…，R_m という条件のすべてを満足する $\boldsymbol{x}$ の中で目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ の最適値を求めることが必要になる場合が多い．

制約領域の凸極性と同じくわれわれは目的関数の凸極性をも定義することができる．すなわち目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ の最小値をもとめようとする場合，図1.5のように $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ に対する目的関数の値を $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)$ とするとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ をむ

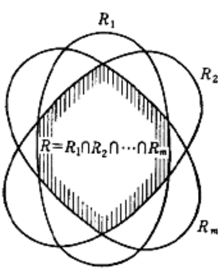

図1.4　凸領域の重ね合せ

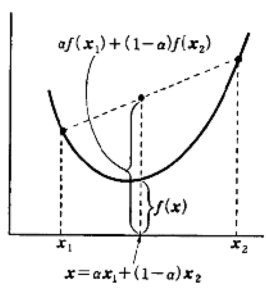

図1.5　目的関数の凸極性

すぶ線分上の任意の点((*1.4*)参照)に対する目的関数の値 $f(\alpha \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2)$ がこれに対応する $f(\boldsymbol{x}_1)$, $f(\boldsymbol{x}_2)$ をむすぶ線分上の点

$$\alpha f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2)$$

より必ず小さいかもしくはひとしく,

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2) \leqq \alpha f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2) \qquad (1.7)$$

ならば，この目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ は凸であるというのである($f(\boldsymbol{x})$ の最大値を求めようとする問題では(*1.7*)の不等号の向きが逆になることはいうまでもない).(*1.2*)の関数が凸関数になっていることは方程式が正の係数をもつ2次関数であることから明らかであろう.

1.3 凸計画法と非凸計画法

目的関数も制約領域も凸のとき，その最適値を求める問題を**凸計画法**(convex programming)といい，最適化手法の基礎となると同時に，この分野でも最もよく発達している.

凸計画法の中でも最も基本的なのは，目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ も，(*1.3*)の制約条件式 $g_i(\boldsymbol{x})$ もそれぞれ $\boldsymbol{x}$ の1次式であらわされる場合であって**線形計画法**(linear programming)とよび，実用上極めてひろい応用範囲を含んでいるので，第2章，第3章に詳述することにする．また，制約条件式が1次式，目的関数が2次の凸関数のとき，これを**2次計画法**(quadratic programming)とよび，2次計画法をふくめ，一般に線形計画以外の計画問題を**(凸)非線形計画法**((convex) non-linear programming)とよんでいる.

線形計画法は，ひじょうに大規模な問題(たとえば変数の数が数千，制約条件式の数が数百)でも短時間に効率良く解くことができるだけでなく，その拡張として実用上重要な各種各様の問題(この中には非線形計画問題だけでなく，非凸計画問題もふくまれる)について研究が進められ，きわめて巧みにかつ明解に解を得ることができる．その意味からも**数理計画法**(mathematical programming)の基礎として重要な意味をもっている.

凸計画法はこれまでにものべたように実際問題をとくのにあたって極めて基本的かつ重要であるが，実は，実用上，この凸計画問題に帰着できない主要な問題がたくさんあるのである．たとえば，変数 $\boldsymbol{x}$ が，$R_1, R_2, \cdots, R_m$ のすべて

の条件でなく，この m 個の中のいずれか一つを満たせばよいというとき，すなわち，

$$g_1(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad \text{または} \quad g_2(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \quad \text{または} \quad \cdots \quad \text{または} \quad g_m(\boldsymbol{x}) \leqq 0 \tag{1.8}$$

のとき $\boldsymbol{x}$ の領域は

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m \tag{1.9}$$

となって図1.6のような各領域 R_i の和として与えられる．この場合，かりに R_i の各々が凸領域であっても，(1.9)で与えられる R はもはや凸でないことは明らかであろう．このように制約条件，あるいは目的関数の少なくも一方が非凸の場合，われわれはこれを**非凸計画法**(non-convex programming)とよんでいる．前に例をあげたように変数が連続的に変化することが許されず，離散的な値しかとれないような場合も制約領域が非凸となりその問題も非凸計画法となる．

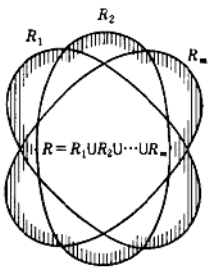

図1.6　凸領域の和としての非凸領域

非凸計画法はいくつかの**代替案**(alternative plan)の選択に直面するというような，いわゆる**組合せ問題**(combinatorial problem)と関連して実用上，ひじょうに重要なのであるが，現在この分野の知識は凸計画法のそれにくらべて極めてわずかであり，今後の数理計画法の大きな研究対象である．しかし，後にのべるように，この問題に対する重要な手掛りのいくつかはすでに得られているのである．

凸計画法と非凸計画法は，上にのべたように最適化問題の分野を二分する二つの大きな領域であるが，この区別は必ずしも決定的なものではなく，問題の表現の仕方によっては非凸問題も凸問題に帰着することのできる場合がある．