高等学校教学用書

数学物理方程

下册

A. H. 吉洪諾夫
A. A. 薩馬尔斯基
著

高等教育出版社

高等学校教学用書

数学物理方程

下册

A. H. 吉洪諾夫，A. A. 薩馬尔斯基著
黄克欧等譯 黄寿恒等校

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的吉洪諾夫（А. Н. Тихонов）与薩馬尔斯基（А. А. Самарский）合著的"数学物理方程"（Уравнения математической физики）的1953年修訂第二版譯出。原書經苏联高等教育部审定为国立大学物理系及数学物理系教科書。

中譯本分上下二册出版。

下册譯者是黃克欧、曹俊、忻鼎定、詹謙。校閱者是黃克欧、黃寿恒、刘紹唐。

数 学 物 理 方 程

下 册

A. H. 吉洪諾夫，A. A. 薩馬尔斯基著

黃克欧等譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海勞動印製廠印刷　新華書店總經售

統一書號 13010·263　開本 850×1168 1/32　印張 9 2/16　字數 247,000

一九五七年五月第一版

一九五七年五月上海第一次印刷

印數 1—11,000　定價(8) ¥1.00

下 册 目 录

第五章　波在空間的傳播 ……437

§1. 帶有初始条件的問題。平均法。……437

1. 平均法。……437
2. 降格法。……440
3. 物理意义。……441
4. 反射法。……443

§2. 积分公式。……445

1. 积分公式的推导。……445
2. 自积分公式所得之推論。……448

§3. 有界体积的振动。……451

1. 分离变量法概述。駐波。……451
2. 長方膜的振动。……458
3. 圓膜的振动。……461

第五章習題 ……467

第五章附录 ……469

I. 化彈性理論方程为振动方程。……469

II. 电磁場方程。……472

1. 电磁場方程与边界条件。……472
2. 电磁場的势。……476
3. 振子的电磁場。……479

第六章　热在空間的傳播 ……486

§1. 在無穷空間的热傳播。……486

1. 溫度的影响函数。……486
2. 在無穷空間的热傳播。……490

§2. 在有界物体中的热傳播。……495

1. 分离变量法概述。……495
2. 圓柱的冷却。……499
3. 临界尺寸的确定。……501

§3. 边界变动的区域的边界問題。……504

1. 热傳导方程的格林公式及源函数。……504
2. 边界問題的解。……507
3. 綫段上的源函数。……509
§4. 热势。……511
1. 單層与双層热势的性質。……511
2. 边界問題的解。……514
第六章習題……515
第六章附录……516
I. 云霧的扩散。……516
II. 关于繞有綫圈的柱体的退磁。……519
III. 关于热傳导方程的有限差分法。……525
第七章 橢圓型方程(續)……535
§1. 可化为方程 $\Delta v+cv=0$ 的基本問題。……535
1. 稳恒振动。……535
2. 在有分解与鏈式反应时的气体扩散。……536
3. 在运动媒質中的扩散。……536
4. 方程 $\Delta v+cv=0$ 的內边界問題的提法。……537
§2. 点源影响函数。……539
1. 点源影响函数。……539
2. 解的积分表示式。……541
3. 势。……545
§3. 無穷区域的問題。輻射原理。……548
1. 在無穷区域的方程 $\Delta v+cv=-f$。……548
2. 極限吸收原理。……549
3. 極限振幅原理。……551
4. 輻射条件。……552
§4. 繞射的数学理論問題。……558
1. 問題的提法。……558
2. 繞射問題的解的唯一性。……559
3. 在球上的繞射。……562
第七章習題……568
第七章附录……570
I. 柱形管內的波。……570
II. 空心共振器內的电磁振蕩。……582
1. 柱形內共振器的固有振蕩。……582
2. 固有振蕩的电磁能。……587
3. 內共振器中的振蕩的激發。……589

III. 趋膚效应。 ……591
IV. 無綫电波在地面上(空)的傳播。 ……597
附篇 特殊函数 ……602
引論 ……602
1. 特殊函数的方程。 ……602
2. 在 $k(a)=0$ 的情况下的边界問題的提法。 ……603
第一部分 柱函数 ……611
§1. 柱函数。 ……611
1. 冪級数。 ……612
2. 遞推公式。 ……617
3. 半整阶函数。 ……618
4. 柱函数的漸近階。 ……620
§2. 貝塞耳方程的边界問題。 ……622
§3. 柱函数的各种类型。 ……626
1. 韓凱尔函数。 ……626
2. 韓凱尔函数与牛孟函数。 ……628
3. 虛变量的函数。 ……630
4. 函数 $K_0(x)$。 ……631
§4. 积分表示式。漸近公式。 ……634
1. 整数阶的(柱)函数的积分表示式。 ……634
2. 漸近公式。 ……638
§5. 福里叶-貝塞耳积分及含貝塞耳函数的某一些积分。 ……642
1. 福里叶-貝塞耳积分。 ……642
2. 含貝塞耳函数的某一些积分。 ……644
§6. 柱函数的綫积分表示式。 ……647
1. 柱函数的綫积分表示式。 ……647
2. 翻越法。漸近公式。 ……652
第二部分 球函数 ……656
§1. 勒襄德多項式。 ……656
1. 母函数与勒襄德多項式。 ……656
2. 遞推公式。 ……658
3. 勒襄德方程。 ……658
4. 勒襄德多項式的正交性。 ……659
5. 勒襄德多項式的模数。 ……660
6. 勒襄德多項式的微分公式。 ……662
7. 勒襄德多項式的积分公式及其有界性。 ……664
8. 伴随函数。 ……666

9. 伴随函数系的封閉性。 ……668
§2. 調和多項式与球函数。 ……671
1. 調和多項式。 ……671
2. 球(面)函数。 ……673
3. 球函数系的正交性。 ……676
4. 球函数系的完备性。 ……679
5. 按照球函数而展开的展开式。 ……680
§3. 球函数应用的一些例題。 ……684
1. 球在均匀場内的極化。 ……684
2. 球的固有振动。 ……687
3. 球的外边界問題。 ……690
第三部分 澈比薛夫-爱尔密特多項式与澈比薛夫-略盖尔多項式 ……692
§1. 澈比薛夫-爱尔密特多項式。 ……692
§2. 澈比薛夫-略盖尔多項式。 ……695
§3. 关于薛定諤方程的一些最簡單的問題。 ……703
1. 薛定諤方程。 ……703
2. 諧振子。 ……704
3. 轉子。 ……705
4. 电子在庫倫場中的运动。 ……707
誤差积分表及一些柱函数表
俄中人名索引

第五章　波在空間的傳播

§ 1. 帶有初始条件的問題。平均法

1. 平均法　在本节中我們將研究在空間的振动方程

$$\Delta u-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-f \tag{1}$$

并求其解，設其初始条件如下：

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ y,\ z,\ 0)&=\varphi(x,\ y,\ z),\\ u_t(x,\ y,\ z,\ 0)&=\psi(x,\ y,\ z)。\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这問題在声的傳播理論与电磁場傳播理論及物理学中其他的許多領域內都具有基本的意义。在本段中为了簡單起見，將設 $f=0$。

为了确定这函数 u 在某一点 M_0 的值，引入一个新函数

$$\bar{u}(r,\ t)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^{M_0}} u\,dS=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_r^{M_0}} u\,d\Omega, \tag{3}$$

式中 $S_r^{M_0}$ 是以点 $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ 为球心而半徑为 r 的一球面，而 $d\Omega=\frac{dS}{r^2}$ 是对应于 dS 的立体角元素。显然，$\bar{u}(r,\ t)$ 是这函数 u 在一个球心为 M_0 而半徑为 r 的球面 $S_r^{M_0}$ 上的平均值。立刻可以看出：

$$u(M_0,\ t_0)=\bar{u}(0,\ t_0)。$$

讓我們来証明：函数 $\bar{u}$ 滿足齐次方程(1)。拉普拉斯运算子 Δu 在球坐标系中等于

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}。$$

$\bar{u}$ 既然不依賴于 θ 和 φ，那末它应該滿足下列的方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=0。$$

今將証明它。將(1)式略去其右端的f，在球面$S_r^{M_0}$所包圍的体积$T_r^{M_0}$內取积分，則得:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\iiint\limits_{T_r^{M_0}}u\,d\tau=\iiint\limits_{T_r^{M_0}}\Delta u d\tau=\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}dS。$$

考慮到$S_r^{M_0}$的法綫是沿着半徑的方向，又考慮到面元素等于$dS=r^2d\Omega$，得:

$$\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iint\limits_{S_r^{M_0}}\frac{\partial u}{\partial r}\,r^2d\Omega=r^2\,\frac{\partial}{\partial r}\Big[\iint\limits_{S_r^{M_0}}ud\Omega\Big]。$$

將前式左端的积分元素代以它的表达式$d\tau=r^2drd\Omega$，則自上式得:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^r r'^2dr'\Big[\iint\limits_{S_{r'}^{M_0}}ud\Omega\Big]=r^2\frac{\partial}{\partial r}\Big[\iint\limits_{S_r^{M_0}}ud\Omega\Big]。$$

將最末一个等式对r微分并用r^2除之，卽可看出下面的方程对于$\bar{u}$是正确的:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}\right)。$$

今指出拉普拉斯运算子的下述性質:对于任意一个不依賴于θ与φ的函数$U=U(r,t)$，拉普拉斯运算子的形式如下:

$$\Delta U=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(rU)}{\partial r^2}。$$

利用拉普拉斯运算子的这一性質，卽不难看出:对于空間的振动方程的任一球对称的解$\bar{u}$，用替代$v=r\bar{u}$卽可化为一維的振动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}。$$

这方程的通解的形式如下:

$$v=r\bar{u}=f_1\left(t-\frac{r}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{r}{a}\right)。$$

当 $r=0$ 时，由于 $\bar{u}$ 的有界性，对于任何 t 值都得：

$$0=f_1(t)+f_2(t) \quad 或 \quad f_1(t)=-f_2(t)=-f(t)$$

即

$$v=r\bar{u}=f\left(t+\frac{r}{a}\right)-f\left(t-\frac{r}{a}\right)。$$

將最末的公式对 r 微分得：

$$\bar{u}+r\frac{\partial\bar{u}}{\partial r}=\frac{1}{a}\left[f'\left(t-\frac{r}{a}\right)+f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right],$$

由此，当 $r=0$ 及 $t=t_0$ 时推出：

$$\bar{u}(0,\ t_0)=u(M_0,\ t_0)=\frac{2}{a}f'(t_0)。$$

为了解决原来的帶有初始条件的問題，只須將函数 $f(t)$ 用初始函数 φ 和 ψ 表出即可。將下列的等式相加

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})=\frac{1}{a}\left[f'\left(t-\frac{r}{a}\right)+f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right],$$

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})=\frac{1}{a}\left[-f'\left(t-\frac{r}{a}\right)+f'\left(t+\frac{r}{a}\right)\right],$$

求得：

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})=\frac{2}{a}f'\left(t+\frac{r}{a}\right)。$$

令 $t=0$ 及 $r=at_0$，則得：

$$u(M_0,\ t_0)=\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u})+\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u})\right]_{r=at_0,\ t=0}$$

用 $\bar{u}$ 的值来代替上式的 $\bar{u}$ 后，則得：

$$u(M_0,\ t_0)=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint\limits_{S_r^{M_0}} ru\,d\Omega+\frac{1}{a}\iint\limits_{S_r^{M_0}} r\frac{\partial u}{\partial t}\,d\Omega\right]_{r=at_0,\ t=0}。$$

將已給的初始值代入这式，并略去 M_0, t_0 的 0 指标，即得下列公式

$$u(M,\ t)=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi}{r}\,dS+\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\psi}{r}\,dS\right], \qquad (4)$$

上式通常称为泊瓦松公式。这公式是假定本問題的解存在而求得的。上面所作的推理也証明了其解的唯一性（参看第二章，§ 2）。用直接的

驗算也可以証实这公式在对于 φ 与 ψ 的很寬泛的假設下都可給出本問題的解。

2. 降格法 前一段中所得到的公式(4)解决了在空間 (x, y, z) 的帶有初始条件的齐次振动方程。一般說来，其初始条件是变量 x, y, z 的任意的函数。若初始函数 φ 与 ψ 不依賴于 z，显然，公式(4)所給出的函数 u 也將不依賴于变量 z。因此，这函数將滿足方程

$$u_{xx}+u_{yy}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

及初始条件

$$u(x, y, 0)=\varphi(x, y),$$

$$u_t(x, y, 0)=\psi(x, y)。$$

这样，这公式旣可解决空間問題，也可解决平面問題。

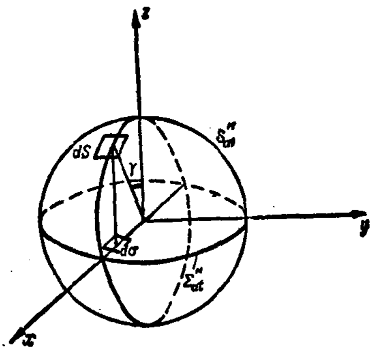

圖 75

公式(4)中的积分是在球面 S_{at}^M 上取的。由于初始条件不依賴于 z，在上半球取的积分可用平面 (x, y) 与球面 S_{at}^M 相交所得的圓 Σ_{at}^M 上的积分来代替(圖 75)。球面元素 dS 与平面元素 $d\sigma$ 之間有如下的关系:

$$d\sigma=dS\cdot\cos\gamma,$$

其中 $$\cos\gamma=\frac{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}{at}=\frac{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{at}。$$

在下半球取的积分也如此；因此，应取这圓上的积分的二倍。

結果我們得到下列的公式:

$$u(M, t)=u(x, y, t)=\frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\varphi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}+\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{\Sigma_{at}^M}\frac{\psi(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2},}\right], \quad (5)$$

在上式中是在圓心为点(x, y)而半徑为at的圓內取积分。

与此相似，如初始函数仅依賴于一个变量x，则公式(4)使我們可以求出函数$u(x, t)$，它是帶有初始条件

$$u(x, 0)=\varphi(x),$$

$$u_t(x, 0)=\psi(x)$$

的方程
$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

的解。为此，我們引入球坐标系，使極軸沿着x軸方向。面元素dS表示如下：

$$dS=r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=-r\,d\varphi\,d\xi,$$

这因为
$$\xi=r\cos\theta,\quad d\xi=-r\sin\theta\,d\theta。$$

在泊瓦松公式(4)中对φ积分，则得：

$$u(x, t)=\frac{1}{2a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)\,d\xi+\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi\right]。$$

在第一个积分中对t微分，则得在第二章§2中已熟知的达蘭貝尔公式：

$$u(x, t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi。\qquad(6)$$

含有三个、二个以及一个空間变量的振动方程，通常称为球面、柱面及平面波动方程。这种术語完全符合于上面所用的称为“降格法”的方法，因为解决平面和直綫振动方程时，我們先从空間問題出發，然后像“降格以求”似地降到个数較少的变量。对于兩个与一个变量所得的解，即帶有柱面波和平面波的特性。

降格法不但适用于振动方程，也适用于其他类型的方程。在許多情况下，此法可以使我們从多变量方程的定解公式中，推导出自变量个数較少的方程的問題的解答。

3. 物理意义 用公式(4)及(5)能够闡明球面波和柱面波傳播的物理景象。讓我們先研究三个变量的情况，在下面可以看出其傳播

过程的物理特性与两个空間变量的情况有極大的区别。

我們只將研究局部扰动的傳播，这就是初始狀态（函数 $\varphi>0$ 及 $\psi>0$）只在某一有界区域 T_0 不等于零的情况。首先研究在区域 T_0 外的一点 M_0 处的狀态 $u(M_0, t)$ 之变化。根据（4）式，在 t 时点 M_0 处的狀态 u，是被球心为 M_0 而半徑为 at 的球面 $S_{at}^{M_0}$ 上諸点的初始狀态所确定的。函数 $u(M_0, t)$ 之值仅当球面 $S_{at}^{M_0}$ 与初始值的区域 T_0 相交时始不等于零。令 d 及 D 为自点 M_0 至区域 T_0 的最近点和最远点間的距离（圖 76），显然，如 t 充分小 $\left(t<t_1=\dfrac{d}{a}\right)$ 时，則球面 $S_{at}^{M_0}$ 与区域 T_0 不相交，而公式（4）的面积分卽等于零：此时扰动尙未抵达 M_0 点。从 $t_1=\dfrac{d}{a}$ 时至 $t_2=\dfrac{D}{a}$ 时止，球面 $S_{at}^{M_0}$ $(t_1<t<t_2)$ 將与区域 T_0 相交；公式（4）的面积分，一般說，不等于零：点 M_0 在这时是处于被扰动的狀态。t 值再增加时，球面 $S_{at}^{M_0}$ 將区域 T_0 包含在它的內部，面积分都等于零：这时扰动已經过了点 M_0。这样，当局部扰动在三維空間中傳播时，沒有后效現象。

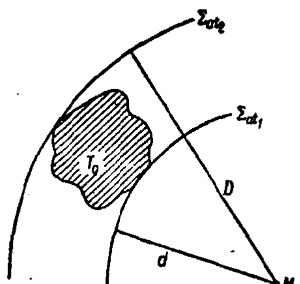

圖 76

現在来研究扰动 $u(M, t_0)$ 在某一时刻 t_0 时的瞬时空間景象。处于扰动狀态的諸点 M，其特征为各球面 $S_{at_0}^M$ 均与初始扰动的区域 T_0 相交。換言之，这就表明，扰动不为零的諸点 W 的軌迹是由一些 M 点所組成，这些 M 点是在以区域 T_0 的点 P 为心而半徑为 at_0 的球面 $S_{at_0}^P$ 上。球面族 $S_{at_0}^P$ 的包絡面是区域 W 的边界。外包絡面称为傳播波的前陣面，內包絡面称为后陣面。当

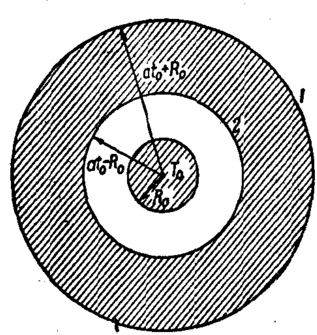

圖 77

区域 T_0 的半徑为 R_0 的球形时，波的前陣面和后陣面（*1* 与 *2*）如圖 77。

这样，在空間局部化的初始扰动，在空間的每一点 M_0 处均引起对时間局部化的一个作用；这时，波的傳播帶有一个輪廓很显明的前陣面和后陣面（惠更斯原理）。

讓我們再来討論两个变量的情况。設所給的初始扰动是在 x, y 平面上的区域 S_0 內。今研究在 S_0 外的点 M_0 的狀态 $u(M_0, t)$ 的变化。根据(5)式，在 t 时，在点 M_0 处的狀态 $u(M_0, t)$ 是由以 M_0 为心而半徑为 at_0 的圓 $\Sigma_{at_0}^{M}$ 上諸点 P 的初始値所确定。对于 $t<t_1=\dfrac{d}{a}$ 的各时刻（d 为自 M_0 至区域 S_0 最近点的距离），函数 $u(M_0, t)=0$，卽扰动尙未抵达 M_0 点。如 $t>t_1$，則 $u(M_0, t)\neq 0$。这就表明，从时刻 $t=t_1$ 起，在点 M_0 处就發生了扰动，这种扰动，一般說来，开始时逐漸增强，然后从某一时刻起逐漸减小，当 $t\to\infty$ 时，减小到零。平面波情形与空間波不同之处卽在于有这种后效現象。在平面上局部化的初始扰动的影响幷不对时間局部化，具有長期連續的后效的特征。惠更斯原理在此不成立。

平面上扰动的瞬时現象具有輪廓很显明的前陣面，但無后陣面。关于二維的問題，可以看作所給初始扰动是在一無限長的柱內發生而且不依賴于第三种坐标的空間問題。用这种方法，極容易想像出后效的过程。

4. 反射法 若一区域的边界为几个平面，則振动方程的在这区域的帶有初始条件的問題，可用反射法来求解。

今研究在半空間 $z>0$ 的問題。

試求振动方程

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}u_{tt}$$

的滿足初始条件

$$\left.\begin{array}{l} u(x, y, z, 0)=\varphi(x, y, z) \\ u_t(x, y, z, 0)=\psi(x, y, z) \end{array}\right\} (z \geqslant 0)$$

及边界条件

$$u\Big|_{z=0}=0 \text{ 或 } \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0$$

的一个解。

若 $u|_{z=0}=0$ 时，將初始条件奇延拓到整个空間：

$$\varphi(x, y, z)=-\varphi(x, y, -z); \ \psi(x, y, z)=-\psi(x, y, -z)$$

則由公式(4)可得本問題的解。若 $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0$ 時，作偶延拓：

$$\varphi(x, y, z)=\varphi(x, y, -z); \ \psi(x, y, z)=\psi(x, y, -z)$$

由(4)亦得本問題的解。讓我們来驗証当奇延拓这函数 φ 与 ψ 时，边界条件 $u|_{z=0}=0$ 自动地被满足。事实上

$$u(P, t)=u(x, y, 0, t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^P}\frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\,dS+\iint\limits_{S_{at}^P}\frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{at}\,dS\right]=0,$$

这因为，当 φ 与 ψ 为奇函数时，球心在平面 $z=0$ 上的球面积分必等于零。

在第一种及第二种的边界条件

$$u=0 \quad (\text{当 } z=0 \text{ 与 } z=l \text{ 时}),$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0 \quad (\text{当 } z=0 \text{ 与 } z=l \text{ 时}),$$

及相应的初始条件下的平面層域 $0\leqslant z\leqslant l$ 的問題，也可以类似地解决。

若把初始条件对于平面 $z=0$ 及平面 $z=l$ 作奇(或偶)延拓，則自公式(4)也能立刻得到这問題的解。这样定出的初始函数 φ 与 ψ 將是 z 的周期函数，其周期为 $2l$。

若初始函数 φ 及 ψ 在層域 $0<z<l$ 为局部函数，它們仅在区域 T_0

不等于零，那末，被延拓后的函数仅在一系列的区域 T_n (T_n 是由 T_0 用鏡像反映后而得到的) 內不等于零。函数 $u(M, t)$ 对于一切的 M 与 t 都可表示为在 T_n 的諸扰动所确定的有限項的和式 (参看第二章，§ 2 第 5 段)。其物理意义是：在有限的一段时間內仅發生有限个的在壁 $z=0$ 及壁 $z=l$ 上的反射。在平行六面体內的問題也可以相仿地解决。

§ 2. 积分公式

1. 积分公式的推导 用傳播波的方法解决弦振动方程

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=-f$$

时，我們曾广泛地利用过特征角这个概念。在解平面上或空間內的振动方程

$$\Delta u-\frac{1}{a^2}u_{tt}=-f \tag{1}$$

时，我們来研究这曲面

$$\frac{1}{a}r_{MM_0}=|t-t_0|,$$

这曲面称为"点 M_0 与时刻 t_0 的特征錐面"。在时刻 t_0 自点 M_0 出發而以速度 a 傳播的一个信号到达的"相态"空間 (M, t) 的点集是被这方程

$$\frac{1}{a}r_{MM_0}=t-t_0 \quad (t>t_0)$$

所确定，此点集就是点 M_0 的特征錐面上半部。同理，若

$$\frac{1}{a}r_{MM_0}=t_0-t \quad (t<t_0),$$

則在时刻 t 自点 M 出發的类似的信号將在时刻 t_0 到达 M_0。这样的点 (M, t) 的軌迹構成了特征錐面的下半部(圖 78)。

为了定出函数 $u(M, t)$——方程(1)的解——在点 (M_0, t_0) 处的

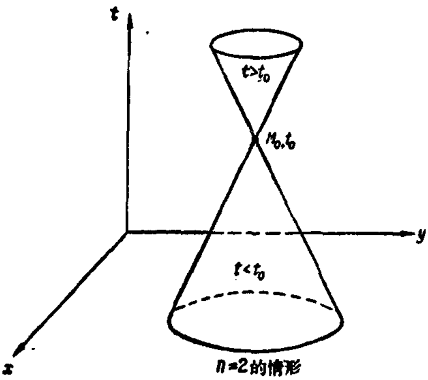

图 78

值，引进点 M_0 的局部时間 t^* 以代替时間 t，令

$$t^*=t-\left(t_0-\frac{r_{MM_0}}{a}\right)$$

而令几何坐标不变。采用与点 M_0 有关的球坐标系 $(r,\ \theta,\ \varphi)$，我們就得到一套新的变量系統

$$r^*=r,\quad \theta^*=\theta,\quad \varphi^*=\varphi,$$

$$t^*=t-\left(t_0-\frac{r}{a}\right)。$$

讓我們求出这函数

$$u(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=u\left(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^*+t_0-\frac{r}{a}\right)=U(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^*)$$

所满足的方程。球坐标系中的拉普拉斯运算子的形式如下：

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}。$$

用新函数 U 的导函数表示出函数 u 的导函数如下：

$$u_r=U_{r^*}+\frac{1}{a}U_{t^*},$$

$$u_{rr}=U_{r^*r^*}+\frac{2}{a}U_{r^*t^*}+\frac{1}{a^2}U_{t^*t^*},$$

$$u_\theta=U_{\theta^*};\quad u_{\theta\theta}=U_{\theta^*\theta^*},$$

$$u_\varphi=U_{\varphi^*};\quad u_{\varphi\varphi}=U_{\varphi^*\varphi^*},$$

$$u_t=U_{t^*};\quad u_{tt}=U_{t^*t^*}。$$

方程(1)轉变为方程

$$\Delta U=-\frac{2}{ar^*}\frac{\partial}{\partial r^*}(r^*U_{t^*})-F(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^*),\qquad (2)$$

上式中的

$$F(r^*,\ \theta^*,\ \varphi^*,\ t^*)=f(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)。$$