内 容 简 介

本书概要地介绍了数学分析的主要内容，并在此基础上重点阐述了各种数学命题的证明方法。其中有许多命题是该领域在三百多年来所积累的经典的和精致优美的结果，附录中介绍了这些重要结果的获得始末及有关学者的贡献。本书在方法上突出了分析演绎，内容比较系统完整，对了解该数学领域的主要内容、提高分析问题和逻辑推理的能力及略领数学史知识方面均有一定价值。本书第二册的主要内容有无穷级数理论(数项级数、函数项级数、无限积、Fourier 级数)、广义积分和特殊函数。书后还有方便查阅的名词索引和外国数学家译名表及有关结果索引。它有较广泛的读者范围，既是数学教师的参考资料，又是具有一定初等数学知识的自学者的可读书籍，更适合于高等院校理工科学生特别是师范院校数学、物理系学生阅读。

分析提纲与命题证明

(第二册)

李铁木 编著

*

宇 航 出 版 社 出 版

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

北 京 科 技 印 刷 厂 印 刷

*

开本：787×1092 1/32　印张：11 1/8　字数：250 千字

1986 年 7 月 第一版　1986 年 7 月第一次印刷

印数：4,500 册　统一书号：15244・0048

定价：2.30 元

第一册有关结果摘要(代前言)

本册里有些命题的论证依据是第一册中的论证结果，有些章节的提纲部分也援引了前册书里已证的命题。所以，对本书的读者来说，首先需要的是对第一册的有关结果做一摘引性地介绍，这对不管手头上有没有第一册书的读者都将是很方便的。在下面的摘录中，第一列数字是第一册里的命题号，第二列是该命题的简要内容，第三列是本书中需援引前者的命题号或章节。

5. 数列 1，1，2，3，5，8 …叫做 Fibonacci 数列，满足规则 $a_1=1$，$a_2=1$，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3)$，且 425.

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

6. 若 $p>-1$，$p\neq 0$，则 492.

$$(1+p)^n>1+np$$

(Bernoulli 不等式(题 7)的特例)

49.
$$\begin{cases} 1+2\sum\limits_{k=1}^{m-1}\cos 2kx=\dfrac{\sin(2m-1)x}{\sin x} & 350. \\ \sum\limits_{k=1}^{m}\sin(2k-1)x=\dfrac{\sin^2 mx}{\sin x} & 446. \end{cases}$$

86. $$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e$$ 422.

89. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$$ 354.

92. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\mathbf{C}$$ 347.

($\mathbf{C}$ 为 Euler 常数)

93. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=A \quad (a_n>0)$，则 378.

$$\lim_{n\to\infty}S(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$$

$$\lim_{n\to\infty}J(a)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=A$$

95. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$ 393.

97. 有界数列 $\{a_n\}$ 必有收敛的子数列，无界数列中必有无界的子数列(Bolzano-Weierstrass 预备定理)。 401.

140. 若 $f(x)$ 是$(-\infty,\infty)$上的连续函数，且对任何 x_1，x_2，总有 422.

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$$

则 $f(x)$ 是指数函数：

$$f(x)=\mu^x$$

150 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的周期函数 452.

259. $$I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx,\quad I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx$$ 456.

$$I_1=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)$$

$$I_2=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)$$

289. Cauchy-Schwarz 不等式: 第十二章

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2$$ §1

$$\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Minkowski 不等式:

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^k dx\right)^{1/k}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |f(x)|^k dx\right)^{1/k}+\left(\int_a^b |g(x)|^k dx\right)^{1/k}$$

293. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则 443

$$\int_a^b f^2(x)dx=0$$

的充分且必要条件是 $f(x)\equiv 0$

如果 $\int_a^b f^2(x)dx=0$, 则在一切连续点上, $f(x)=0$

296. $$H(m,n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$ 第十四章 §2.

$$H(m,n)=H(n,m)=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$$

300. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\pi$$ 386

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}$$ 484

(Wallis 公式)

306. Dirichlet 积分:

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$$ 446 483

Fejer 积分：

$$\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx=\frac{n\pi}{2}$$

315. 第十一章 §4.

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

（带积分形式余项的 Taylor 公式）

321. 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可积函数，则 462

$$\Phi(x)=\int_0^x [f(t)-I]dt$$

亦是以 T 为周期的周期函数，式中

$$I=\frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$$

326. 三角函数系 第十二章

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}\cdots$$ §1. §2.

在任何区间 $[a, a+2\pi]$ 上构成规范正交函数系

329. Legendre 多项式函数列 $\{P_n(x)\}$ 在 $[-1, 1]$ 上构成正交函数系： 第十二章 §5.

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \dfrac{2}{2n+1}, & m=n\end{cases}$$

其中

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

337(的说明)。 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上囿变的充分且必要条件是，$[a, b]$ 可分成有限多个闭子区间，在每个子区间上单调，即 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有有限多个第一类型间断点和有限多个极值点。 454

$f(x)$ 是囿变的另一充分且必要条件是，它可表成两个单调递增函数之差：

$$f(x) = F(x) - h(x)$$

338. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则存在一折线函数 $\Psi_n(x)$： 469.

$$\Psi_n(x) = f(x_k^{(n)}) + \frac{x - x_k^{(n)}}{x_{k+1}^{(n)} - {}_k^{(n)}} \times [f(x_{k+1}^{(n)}) - f(x_k^{(n)})]$$

使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \Psi_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

345. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = 1$$ 354 419

(Stirling 公式)

以上就作为本册书的前言。

目　　录

第十章　数项级数

我们知道

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=e$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$$

就是说，无限多个数的和可以等于一个确定的数；反之，一个有限的量可以通过无限的形式表示。数学中这种有限与无限之间互相转化的辩证关系是常见的。又，有些函数在初等函数的范围内不能求出它的原函数，叫做在有限形式下无解，但它们的原函数确是存在的，可以用无限多项初等函数的和表示出来。对诸如此类问题的研究，提出并发展了级数理论。

上面两式中等式左端的和式称为无穷级数，简称级数。上面两个级数都是数项级数，因为和式中的每一项都是数。如果和式中的项是函数，就叫做函数项级数。在本章与下一章里将分别讨论这两类级数。

§1. 一般概念

级数与数列有密切关系。

【定义】 设给定了一个数列 $\{a_n\}$，称和式

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots \tag{A}$$

为**数项无穷级数**，简称为**数项级数**，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，也常以 Σa_n 简记之。

反之，若给定了级数 (A)，可作前 n 项和：

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

S_n 叫级数 (A) 的**部分和**。于是，当 n 取遍自然数时得一部分和数列 $\{S_n\}$：

$$S_1, S_2, \cdots S_n \cdots \qquad (B)$$

根据数列 (B) 是否有有限的极限，可以引出数列 (A) 的收敛性概念。

【定义】 若数列 (B) 有有限极限 S，即若

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (C)$$

则称级数 (A) 是**收敛**的。

此时由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

所以极限 S 就叫级数 (A) 的**和**，并记成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad (D)$$

若部分和数列 (B) 不存在有限的极限，则称级数 (A) 是**发散的**。当级数发散时可能有下列两种情况，部分和 S_n 趋于正或负的无穷大，此时记成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \text{（或}-\infty\text{）}$$

或者部分和 S_n 是摆动的，此时记成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\text{摆动})$$

当级数收敛时，取足够大的 n 后，部分和 S_n 就可以近似地代替和 S。称

$$r_n = S - S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \tag{E}$$

为原级数 n 项后的**余项**。

根据定义可以得出下列收敛性条件。

级数收敛的必要条件：如果级数 (A) 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0 \tag{F}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \tag{G}$$

即收敛级数的余项 r_n 和通项 a_n 都必趋于 0。

级数收敛的充分条件：因为单调有界数列必收敛，所以如果级数的部分和数列是单调有界数列，则级数收敛。

在级数及后面要讲的广义积分的收敛性讨论中，有一个起重要作用的数列，叫 Cauchy 数列。

【定义】 称数列 $\{S_n\}$ 为 Cauchy 数列，如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在 $N > 0$，对一切 $p > N$ 及 $q > N$，恒有

$$|S_p - S_q| < \varepsilon \tag{H}$$

根据数列收敛的 Cauchy 判则（第四章 § 1.），知 Cauchy 数列是收敛的数列。反之，若数列收敛，则必是 Cauchy 的，于是得到

级数收敛的充分且必要条件是：它的部分和数列 $\{S_n\}$ 是 Cauchy 数列。

由定义可以得到收敛级数的下列性质：

1） 若$\Sigma a_n = S$，$\Sigma b_n = R$，则对任何实数λ，τ，有

$$\Sigma(\lambda a_n) = \lambda S, \qquad (I)$$

$$\Sigma(\lambda a_n + \tau b_n) = \lambda S + \tau R \qquad (J)$$

2） 级数中增加或减少有限多个项，收敛性不会引起改变，但对收敛级数，其和一般将引起改变。

3） 若级数(A)收敛，则按一定的方式用括弧将相邻的几项依次加起来所得的新级数如(A')：

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots$$

也收敛，且收敛于同一个和。因为这时两个级数的部分和之间有下列关系：

$$S_1' = S_1,\ S_2' = S_3,\ S_3' = S_7 \cdots$$

即$\{S_n'\}$是$\{S_n\}$的一个子数列，故收敛于同一个极限。特别，当$a_n \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$时，若(A')收敛则(A)也收敛，若(A')发散则(A)也发散。

最后，作为回顾和练习，我们写出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = (\text{摆动})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & \text{当 } |q| < 1 \\ (\text{摆动}), & \text{当 } q = -1 \\ \text{发散}, & \text{此外} \end{cases}$$

这里第二个级数叫**调和级数**；在题 99 中已证明它发散。最后一个级数是由等比数列产生的，叫做**几何级数**，它只当 $|q|<1$ 时收敛。特别，此时令 $a=1$，且用 x 表 q，则得一用途甚广的几何级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1) \qquad (J)$$

当令 $a=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$，就得第一个级数，所以它也是一个特定的几何级数。上面的四种典型的级数在下面的讨论中都很有用。

【题 346】 证明

① $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a}, \ (a>0) \qquad (10\text{-}1)$$

② $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2a+2n-1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{1}{a}, \quad (a>0) \qquad (10\text{-}2)$$

证 ① 因为级数的部分和

$$S_n = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$$

$$= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right) + \cdots$$

$$+\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right)$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\blacktriangleleft$$

② 因为

$$S_n=\frac{2a+1}{a(a+1)}-\frac{2a+3}{(a+1)(a+2)}+\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{2a+2n-1}{(a+n-1)(a+n)}$$

$$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{a+n-1}+\frac{1}{a+n}\right)$$

$$=\frac{1}{a}+(-1)^{n+1}\frac{1}{a+n}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a}+(-1)^{n+1}\frac{1}{a+n}\right]=\frac{1}{a} \blacktriangleleft$$

特别，当取 $a=1$ 时由(10-1)式得

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$
$$=1 \tag{10-3}$$

【题 347】证明

① $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\ln 2 \tag{10-4}$$

② $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right) \tag{10-5}$$

这里 k 为正整数。

证 ① 我们已知(见题 92)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=\boldsymbol{C}$$

此处 $\boldsymbol{C}$ 为 Euler 常数。于是，上式也可写成

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$=\ln n+\boldsymbol{C}+\sigma_n,$$

这里 $$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=0$$

于是，当 n 为偶数时，$n=2m$，

$$S_{2m}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2m}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2m}\right)$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$$

$$=(\ln 2m+C+\sigma_{2m})-(\ln m+C+\sigma_n)$$

$$=\ln 2+(\sigma_{2m}-\sigma_n)$$

所以

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m}=\ln 2$$

又，若 n 是奇数，则 $n=2m+1$，

$$S_{2m+1}=S_{2m}+\frac{1}{2m+1}$$

所以

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m+1}=\lim_{m\to\infty}\left(S_{2m}+\frac{1}{2m+1}\right)=\ln 2$$

总之，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty} S_n=\ln 2 \quad ◀$$

② $$S_n=\frac{1}{1\cdot(1+k)}+\frac{1}{2(2+k)}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n(n+k)}$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2+k}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+n}\right)$$

故当 $n>k$ 时，

$$S_n=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

$$+\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{k+n}\right)$$

$$=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$$

$$-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k+n}\right)$$

于是，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+k)}=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right) \blacktriangleleft$$

特别，当取 $k=1$ 时(10-5)式就成为(10-3)式。若取 $k=2$，则由(10-5)式得