工程数学

线性代数

周德润　张志英　傅丽华　编

北京航空航天大学出版社

工 程 数 学

线 性 代 数

周德润 张志英 傅丽华 编

北京航空航天大学出版社

内容简介

本书是按照高等工科院校“线性代数教学基本要求”编写的。

本书层次清楚，并配有较多的具有启发性的例题，内容为行列式；矩阵；向量的线性相关性；线性方程组；矩阵的相似变换与对角化；二次型；*线性空间与欧氏空间；*线性变换共八章。前六章为基本内容，教学时数为34～40学时（含习题课）。

本书可作为高等工科院校教材，也可作为工程技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/周德润等编著．—北京：北京航空航天大学出版社，1996.8

ISBN 7-81012-646-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．周…　Ⅲ．线性代数　Ⅳ．0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(96)第06538号

[illegible]性代[illegible]

[illegible]

周德润　张志英　傅丽华　编

[illegible]

责任校对　李宝田

北京航空航天大学出版社出版

北京学院路37号(100083)　2015720(发行科电话)

新华书店总店北京发行所发行　各地书店经销

新潮印刷厂印刷

*

850×1168　1/32　印张：9.75　字数：262千字

1996年8月第一版　1996年8月第一次印刷　印数：6000册

ISBN 7-81012-646-6/O·034　定价：10.50元

前　言

本书是按照全国工科数学课程指导委员会制定的关于线性代数课程基本要求，在原北京航空学院出版社 1988 年出版的《线性代数》(周德润、杜智敏、张志英编)基础上重新编写的。

线性代数是高等工科院校的一门基础数学课程，有较强的逻辑性与抽象性，但授课学时一般较少。为此，在编写时，内容上着重基本概念、理论与方法，突出重点。凡有利于深刻理解概念的重要定理的证明力求思路清晰易懂，阐述比较详细；而对另一些仅与方法有关的定理或证明过程(超出基本要求的定理)则给出结论，并用例题说明方法的使用。

为了使初学者易于接受与理解，在内容次序的安排上，采用先讲矩阵的秩、矩阵运算、逆矩阵及初等矩阵等较为具体)易学的内容，而后再深入到向量组的线性相关性、向量组的秩等较为抽象的内容，接着再讲较为实用的线性方程组及二次型等。

书中配有较多数量的例题，并在某些章的最后一节编写有“典型例题”，有助于读者加深对概念与定理的理解和运用，并有利于掌握一些解题的方法与证题的思路。

本书前六章内容教学时数为 34～40 学时(含习题课)，带有一定的伸缩性。第七章及第八章可根据学时数及各专业的教学要求选用。各章配有适量的习题，书末附有习题答案。教材的第一章由傅丽华编写，第五、六章由张志英编写，第二、三、四、七、八章由周德润编写。周德润对全书进行了统编。

这本教材是在北京航空航天大学应用数理系工程数学教研室

的广大教师支持下编写的，尤其是张福渊、颜庆津、成如翼等同志对编写提出了宝贵意见，在此表示衷心的感谢。

北京理工大学史荣昌教授对原稿作了认真仔细的审阅，并提出了许多宝贵的修改意见，使本教材的质量有明显的提高，作者谨此致谢。

限于编者的水平，书中不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

1996年2月

目　　录

第四章　线性方程组

第五章　矩阵的相似标准形

第六章　二次型

*第七章　线性空间与欧氏空间

第一章　n 阶行列式

在这一章里，我们要将中学学过的二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式，并且研究 n 阶行列式的性质及计算。

第一节　预备知识

一、 排列及其逆序数

定义　由 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个数码组成的一个有序数组称为一个 n 阶排列。

例如，由 1,2,3,4 共四个数码可以组成四阶排列。它们可以组成多少个不同的四阶排列呢？我们来进行分析。排列的第一个位置可以从 1,2,3,4 中任选一个数字，第二个位置只能从剩下的三个数字中任选一个，第三个位置只能从剩下的两个数字中任选一个，最后一个位置只能是剩下的一个数字。所以得到的排列总个数为 $4\times3\times2\times1=4!=24$。如排列 1 2 3 4，4 3 2 1，1 3 2 4，2 4 1 3，…等等。

依此类推，由 n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成不同的 n 阶排列的总个数应为

$$n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!$$

让我们来考察四阶排列 1 2 3 4 及 1 3 2 4。排列 1 2 3 4 是数字从小到大按自然顺序排列的，称这种排列为标准排列。但在排列 1 3 2 4 中大的数字 3 排在小的数字 2 的前面，故这两个数字便构成了一个逆序。即在一个排列中，如果某一个较大数字排在一个较小数字的前面，就称这两个数字构成了一个逆序。在一个排列中逆

序的总个数，称为这个排列的逆序数。

定义 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列。

给出一个 n 阶排列 $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$，我们可以按照下面的方法来计算它的逆序数：设其中与 1 构成逆序的个数为 t_1；与 2 构成逆序的个数为 t_2；如此下去，直到 n。显然与 n 构成的逆序个数 $t_n=0$。于是我们得 $p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$ 的逆序数为

$$\tau(p_1 p_2 p_3 \cdots p_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1}$$

例如，$\tau(7\ 8\ 5\ 6\ 1\ 3\ 2\ 4)=4+5+4+4+2+2=21$，故排列 7 8 5 6 1 3 2 4 是奇排列。$\tau(4\ 3\ 2\ 1)=3+2+1=6$，故排列 4 3 2 1 是偶排列。

把一个排列中某两个数字位置互换，而其余的数字位置保持不变，就构成了一个新的排列。我们把对排列所施行的这种变换称为排列的一个对换。

5 3 4 1 2 经过 1 与 5 对换变成 1 3 4 5 2。且 $\tau(5\ 3\ 4\ 1\ 2)=8$，$\tau(1\ 3\ 4\ 5\ 2)=3$。我们发现经过一次对换，排列的奇、偶性发生了变化。一般的有如下定理。

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性。

证 分两种情况考虑。

1. 相邻两个数的对换情况

设排列

$$\cdots j\ k \cdots \tag{1}$$

经过 j 与 k 的对换变成

$$\cdots k\ j \cdots \tag{2}$$

如果不考虑 j、k 本身，当 j、k 与其它的数码在排列(1)中所构成的逆序，在排列(2)中仍构成逆序。对于 j、k 本身而言，当 $j>k$ 时，排列(1)中 j 与 k 构成一个逆序。但在排列(2)中 k 与 j 就不构成逆序。因此排列(2) 比排列(1) 逆序数少 1 个。相反，当 $j<k$ 时，经过对换，排列(2)比排列(1)的逆序数多 1 个。所以在此种情况下，

命题成立。

2. 一般情况

设排列

$$\cdots j\ i_1\ i_2\cdots i_s\ k\cdots \tag{3}$$

经过 j 与 k 的对换变成

$$\cdots k\ i_1\ i_2\cdots i_s\ j\cdots \tag{4}$$

显然这样的对换可以通过一系列两两相邻的对换来实现。从排列(3)出发，k 与 i_s 对换，再 k 与 i_{s-1} 对换，…，最后 k 与 j 对换。总共经过 $s+1$ 次相邻对换得到排列

$$\cdots k\ j\ i_1\ i_2\cdots i_s\cdots \tag{5}$$

再将 j 往右对换，即 j 与 i_1 对换，再 j 与 i_2 对换，…，最后 j 与 i_s 对换，这样又作了 s 次相邻对换，得到排列(4)。于是由排列(3) 化为排列(4)总计作了 $2s+1$ 次相邻对换，而每经过一次相邻的对换，排列都改变奇偶性，由于 $2s+1$ 为奇数，所以排列(3)与排列(4)的奇偶性相反。证毕。

二、 二阶、三阶行列式

我们已经学过二阶行列式和三阶行列式，其一般形式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad 和 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{33}$ 称为行列式的元素。这样记法有好处。例如一看 a_{23} 就知道它处在行列式的第二行第三列位置。在行列式中横的称为行，竖的称为列。元素 a_{ij} 带有两个下标 i 与 j，其第 1 个下标 i 表示元素所在行的序号，第 2 个下标 j 表示元素所在列的序号。

我们知道二阶、三阶行列式定义的是一个数值，它们是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

以及

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

下面来分析二阶、三阶行列式的特点：

1. 二阶行列式是 2！＝2 项的代数和，其中每一项是取自不同行、不同列的两个元素的乘积；三阶行列式是3！＝6项的代数和，其中每一项是取自不同行、不同列的三个元素的乘积。

2. 代数和中每一项的正负号是这样决定的：当行序取成标准排列，由列序排列的奇偶性决定每项前的正负号。以三阶行列式为例说明之。三阶行列式右端的任意项可以写成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，这里行序排成标准排列 1 2 3，而列序排成 $j_1\ j_2\ j_3$，它是 1，2，3 三个数的某个排列。排列共有 6 种。可以看出带正号的三项的列标排列是 1 2 3，2 3 1，3 1 2，显然 $\tau(123)=0$，$\tau(231)=2$，$\tau(312)=2$，故它们都是偶排列。带负号的三项的列标排列是 321，213，132，由于 $\tau(321)=3$，$\tau(213)=1$，$\tau(132)=1$，故它们都是奇排列。

根据以上两个特点，我们又可把二阶、三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2)} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2}$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

在二阶行列式中 j_1j_2 它是 1，2 这两个数的某一个排列，$\sum\limits_{(j_1j_2)}$ 表示对 1，2 这两个数所有排列 j_1j_2 取和。

在三阶行列式中 $j_1j_2j_3$ 它是 1，2，3 这三个数的某一个排列，$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对 1，2，3 这三个数所有排列取和。

推而广之，我们可以定义 n 阶行列式。

第二节 n 阶行列式的定义及性质

一、 n 阶行列式的定义

定义 由 n^2 个元素排成 n 行、n 列，以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{6}$$

记之，称为 n 阶行列式。它代表一个数值。此数值是取自式(6)中不同行不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是数字 $1,2,\cdots,n$ 的某一个排列，故共有 $n!$ 项。每项前的符号按下列规定：当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号，即有

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{7}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数组成的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 取和。

为书写方便，n 阶行列式 D_n 也可记为 $D_n=|a_{ij}|_n$。

例 1 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 这行列式除主对角线(即从左上角到右下角诸元素所构成的对角线)上的元素为 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 外，其余元素全为 0。因而此行列式中有可能不为 0 的项仅有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，且行序排列及列序排列都是标准排列。故

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

其中 $\prod\limits_{i=1}^{n}$ 表示 n 个元素的连乘积。

例 2 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 这个行列式的特点是主对角线以下的元素都是 0，即当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，称它为上三角行列式。

此行列式第 n 行除 a_{nn} 外其它元素均为零，因此要得到非零的项，第 n 行必须选 a_{nn}，即只能取 $j_n=n$。这样 $n-1$ 行就不能选 $a_{n-1\,n}$(因为第 n 列只能选一个元素)，所以第 $n-1$ 行只能选 $a_{n-1\,n-1}$ 即只能取 $j_{n-1}=n-1$。同理第 $n-2$ 行只能选 $a_{n-2\,n-2}$ 即只能取 $j_{n-2}=n-2$。……，第 1 行只能选 a_{11} 即只能取 $j_1=1$。即此行列式只有唯一的一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 有可能不为 0，且这一项列序排列的逆序数为 0，故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

例 3 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & 0 \end{vmatrix}$$

解 这个行列式除次对角线(从右上角到左下角诸元素所构成的对角线)上的元素 $a_{1n},a_{2\,n-1},\cdots,a_{n1}$ 外,其余元素全为0,因而这个行列式只有唯一的一项 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 有可能不为0.且该项当行序为标准排列时,列排列为 $n,(n-1),\cdots,2,1$,其逆序数为

$$\begin{aligned}&\tau[n(n-1)(n-2)\cdots 2\ 1]\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

故有

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \iddots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解 同例2,例3的分析除去为0的项,仅剩下唯一的一项为

$$a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

这一项列的排列的逆序数

$$\tau(n,n-1,\cdots,2,1)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

因此，

$$D_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

在行列式定义中，我们规定 n 个元素相乘时，元素的行序数按标准排列，由列序排列的奇偶性决定各项前的正负号。那么能否在定义中的 n 个元素相乘项里把元素的列序按标准排列，而由行序排列的奇偶性决定每项前的正负号呢？可以证明

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{(i_1i_2\cdots i_n)}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{8}$$

是成立的。

其中 $\sum\limits_{(i_1i_2\cdots i_n)}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数所有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 取和。

二、 n 阶行列式的性质

根据行列式的定义，我们只能计算某些特殊的行列式。对一般行列式而言，随着行列式的阶数 n 的增大，用定义来计算行列式，其计算量是相当大的，是比较困难的。现在我们想通过研究行列式的性质，将一般行列式化成特殊的行列式进行计算。

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D' 称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等。

证 记 $D=|a_{ij}|_n$ 的转置行列式

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，根据行列式的定义

$$D'=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$$

$$=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

又由式(8)得

$$D=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}$$

故

$$D'=D$$

证毕。

这一性质说明，在行列式中行与列具有同等的地位，凡是行所具有的性质，列也一定具有。以下性质只对行来进行证明。

性质 2 如果用同一个数 k 乘行列式中一行(列)的各元素，等于用 k 乘这个行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 根据行列式定义

$$\text{左端}=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$

$$=k\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$$