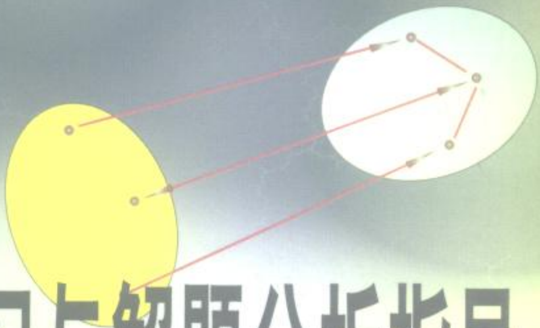
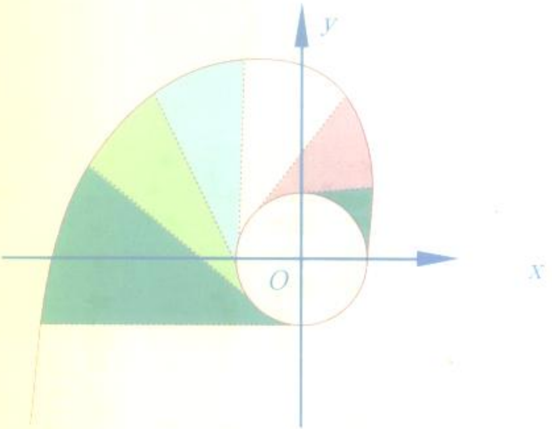


线性代数学习与解题分析指导



朱长青 姚 红 编著

科学出版社
Science Press

线性代数学习与解题分析指导

朱长青 姚 红 编著

科 学 出 版 社

2000

内容简介

线性代数是各类工科院校的一门重要基础课.本书是一本辅导书,提示了有关重点、难点,精选了典型例题,并进行了分析和解答,对部分例题给出多种解法.主要包括 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换.附录有1996~1999年硕士研究生全国统考线性代数试题分析与解答以及两份自测题和参考答案.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习与解题分析指导/朱长青等编著. -北京:科学出版社,2000.1

ISBN 7-03-008079-3

Ⅰ.线… Ⅱ.朱… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第67945号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年1月第 一 版 开本:850×1168 1/32

2000年1月第一次印刷 印张:13 1/4

印数:1—3 000 字数:350 000

定价:21.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前　言

线性代数是工科院校各类专业大学生的一门重要基础课，在众多学科及实际问题中具有重要作用．但由于线性代数课程的抽象性与逻辑性，以及学时较紧，教材较简，因此学生学习时感到内容难懂，解题难以下手．为了加深对线性代数内容的理解，提高学生综合分析和灵活运用的能力，我们根据学生学习中的实际困难，编写了这本《线性代数学习与解题分析指导》书．

本书按线性代数的教学内容分为六章，分别为 n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换．每一章又分为五个部分，即基本要求、内容总结与要点提示、典型例题分析与计算、习题精选、习题参考答案与提示．另外，本书有两个附录，分别为 1996～1999 年硕士研究生全国统考线性代数试题分析与解答以及两份自测题和参考答案．

本书侧重于要点提示与解题分析．对于重点、难点及学生难以理解的问题给予提示，以便加深学生对内容的理解与掌握．同时，本书精选了有代表性的典型例题，对例题首先给予分析，指出思路，然后再给出解答，以使得学生不仅知其然，而且知其所以然．对部分例题还给出多种解法和总结，以扩大学生思路．

本书可供大专院校、电大、函大、职大等广大学生学习线性代数时阅读与参考，也可供报考研究生的同志复习使用，对于从事线性代数教学的教师也有参考价值．

本书编写过程中，得到了作者单位许多同事的帮助．同时，本书也参考了有关作者的书籍，在此，一并向他们表示衷心的感谢．

由于作者水平有限,加以时间仓促,书中难免有不妥之处,恳请读者批评指正.

编著者

1999年9月

目　　录

第一章　n 阶行列式

一、基本要求

1. 掌握 n 阶行列式的定义.

2. 掌握 n 阶行列式的性质并能熟练地应用它们.

3. 重点掌握 n 阶行列式的计算和证明.能够应用行列式的定义、性质、展开定理、归纳法等计算和证明行列式.

二、内容总结与要点提示

1. 排列及其逆序

(1) n 元排列

由 1、2、…、n 组成的一个有序数组称为一个 n 元排列. n 元排列共有 $n!$ 个.

(2) 逆序

在一个排列中,若一对数的前后位置与它们的大小次序相反,则称这一对数构成一个逆序.

一个数的逆序也即为它前面比它大的数字的个数.

(3) 逆序数

一个排列中,逆序的总数称为这个排列的逆序数. 排列$(i_1 i_2 \cdots i_n)$的逆序数用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$或 τ 表示.

若 τ 为奇数,称排列为奇排列.

若 τ 为偶数,称排列为偶排列.

(4) 对换

一个排列中,某两个元素的位置互相交换,这种交换称为一个对换.

对换改变排列的奇偶性.

任何一个排列都可以通过若干次对换变成自然顺序,对换的次数与排列的逆序数有相同的奇偶性.

2. 2 阶和 3 阶行列式的定义

2 阶和 3 阶行列式的定义可由对角线法则给出. 即有如下的定义:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. n 阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{j_1 1} a_{j_2 1} \cdots a_{j_n 1}.$$

提示 上述定义适用于 2 阶和 3 阶行列式. 但是 4 阶以上行列式没有形如 2 阶和 3 阶行列式的对角线展开法则.

由定义,对上、下三角行列式,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. 行列式的性质

性质 1 行列式的行列互换,行列式值不变.

该性质表明,行列式中对行成立的性质,对列也成立.反之也对.

性质 2 用一个数乘以行列式的某一行(列),等于该数乘以此行列式.

推论 行列式某行(列)的公因子可以提到行列式的外面.

性质 3 对换行列式的两行(列),行列式变号.

性质 4 行列式中某两行(列)对应元素成比例,则行列式等于零.

推论 行列式两行(列)对应元素相同,行列式等于零.

性质 5 若行列式中某一行(列)的元素是两组数的和,则该行列式等于两个新的行列式的和.

性质 6 将行列式的某行(列)乘以一个常数再加到另一行(列)对应元素上,则行列式的值不变.

提示 行列式的性质是行列式计算和证明的基础.在行列式的计算和证明中,要充分利用行列式的性质,将行列式化为上、下三角行列式或其它更简便的形式.关于行列式的计算和证明方法,

将在下一部分结合例题进行讨论.

5. 余子式和代数余子式

设有 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 是去掉 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后所得的 $n-1$ 阶行列式.

元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

在 n 阶行列式中,任选 r 行 r 列,其交叉位置上的元素(不改变相对位置)组成的 r 阶行列式称为原行列式的一个 r 阶子式.而余下的行列所组成的 $n-r$ 阶行列式称为对应于该 r 阶子式的余子式.

记某个 r 阶子式在原来行列式中的所有行数与列数的和为 t,则 $(-1)^t$ 乘以该 r 阶子式的余子式称为该 r 阶子式的 r 阶代数余子式.

6. 行列式按行(列)展开

(1) 按一行(列)展开

n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)所有元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

n 阶行列式 D 的某一行(列)元素与另一行(列)相应元素的代数余子式的乘积之和等于零.即有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = \begin{cases} D, & k=i, \\ 0, & k\neq i, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}A_{ji} = \begin{cases} D, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

(2) 按某 k 行(列)展开(拉普拉斯定理)

n 阶行列式等于某 k 个行(列)中的所有 k 阶子式与它们所对应的代数余子式的乘积之和.

提示 行列式按行、列展开是行列式降阶的一个方法,它在行列式计算和证明中有重要作用.特别在行列式中零元素较多时,常用展开方法将行列式降阶化简.

三、典型例题分析与计算

1. 排列和逆序

例 1 求下列排列的逆序数,并确定奇偶性.

(1) 2143765.

(2) $2k, 1, 2k-1, 2, 2k-2, 3, \cdots, k+1, k$.

(3) $1, 3, 5, \cdots, 2n-1, 2, 4, 6, \cdots, 2n$.

分析 计算一个排列的逆序数,只要将排列的每个数的逆序即比它大的数的个数算出,然后将每个数的逆序相加,即得这个排列的逆序数.逆序数为偶数的为偶排列,而逆序数为奇数的为奇排列.

解 (1) 2 前面没有数,故其逆序为 0;

1 前面有 1 个比它大的数,即 2,故 1 的逆序数为 1;

4 前面没有比它大的数,故 4 的逆序数为 0;

3 前面有 1 个比它大的数,即 4,故 3 的逆序数为 1;

7 前面没有比它大的数,故 7 的逆序数为 0;

6 前面有 1 个比它大的数,即 7,故 6 的逆序数为 1;

5 前面有 2 个比它大的数,即 7、6,故 5 的逆序数为 2.

因此,排列 2143765 的逆序数为

$$0+1+0+1+0+1+2=5.$$

因此,2143765 为奇排列.

(2) 1 前面有 1 个比它大的数,故 1 的逆序数为 1;

2 前面有 2 个比它大的数,故 2 的逆序数为 2;

3 前面有 3 个比它大的数,故 3 的逆序数为 3;

……

k 前面有 k 个比它大的数,故 k 的逆序数为 k;

$2k-1$ 前面有 1 个比它大的数,故 $2k-1$ 的逆序数为 1;

$2k-2$ 前面有 2 个比它大的数,故 $2k-2$ 的逆序数为 2;

……

$k+1$ 前面有 $k-1$ 个比它大的数,故 $k+1$ 的逆序数为 $k-1$.

故原排列的逆序数为

$$1+2+3+\cdots+(k-1)+k+1+2+\cdots+(k-1)$$
$$=(k-1)k+k=k^2,$$

因此,原排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同.

(3) 所给排列中 1、3、5、…、$2n-1$ 的逆序数都是 0,故只要计算其余数的逆序数.

2 前面有 $n-1$ 个比它大的数,故 2 的逆序数为 $n-1$;

4 前面有 $n-2$ 个比它大的数,故 4 的逆序数为 $n-2$;

……

$2(n-1)$前面有 1 个比它大的数,故 $2(n-1)$的逆序数为 1;

$2n$ 前面没有比它大的数,故 $2n$ 的逆序数为 0.

因此,原排列的逆序数为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}.$$

当 $n=4k$ 和 $4k+1$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数,故原排列为偶排列.

当 $n=4k+2$ 和 $4k+3$ 时,$\frac{n(n-1)}{2}$为奇数,故原排列为奇排列.

例 2 (1) 选择 i 与 j,使 $1i25j4869$ 成偶排列;

(2) 选择 i、j 与 k,使 $8i2jk3159$ 成偶排列.

分析 (1) 由排列的定义,i、j 只能在 3 与 7 中选择,故只要看 i、j 选 3 与 7 时排列是否为偶排列即可.

(2) 同(1)的分析一样.

解 (1) 在排列中,i、j 只能在 3 与 7 中选择. 若选 $i=3, j=7$,则 $\tau(132574869)=5$,为奇排列. 由于对换改变排列的奇偶性,因此应选择 $i=7$, $j=3$,这样得到的为偶排列.

(2) 与(1)的分析一样,可得下列的三组解:

a. $i=7$, $j=4$, $k=6$;

b. $i=4$, $j=6$, $k=7$;

c. $i=6$, $j=7$, $k=4$.

例 3 写出 4 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中含因子 a_{31} 的项,并指出它们所带的正、负号.

分析 由行列式的定义,4 阶行列式每项由 4 个不同行不同列元素组成,列出含因子 a_{31} 的项,再确定其符号即可.

解 按行列式的定义,4 阶行列式中含因子 a_{31} 的项共有 $3!=6$ 项. 分别为:

$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$,其逆序为 $\tau(2314)=2$,其符号为"+";

$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$,其逆序为 $\tau(3412)=4$,其符号为"+";

$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$,其逆序为 $\tau(4213)=4$,其符号为"+";

$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$,其逆序为 $\tau(2413)=3$,其符号为"−";

$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$,其逆序为 $\tau(3214)=3$,其符号为"−";

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$，其逆序为 $\tau(4312)=5$，其符号为“－”.

例 4 若已知一个排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I,则新的排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为多少?

分析 由逆序的定义来计算.

解 1 在一个 n 元排列中,比自然数 i 大的数有 $n-i$ 个,因此在所给的两个排列中,由 i 产生的逆序数之和为 $n-i$. 于是,这两个排列的逆序之和为

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{1}{2}n(n-1),$$

因此,后一个排列的逆序数为$\frac{1}{2}n(n-1)-I$.

解 2 如果在排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 中关于x_1 有 p_1 个逆序,则有$(n-1)-p_1$ 个顺序;如果在排列中关于 x_2(不考虑 x_1)有 p_2 个逆序,则有$(n-2)-p_2$ 个顺序;依次类推,在排列中关于 x_n 有 p_n 个逆序,则有$(n-n)-p_n$ 个顺序. 而 $p_1+p_2+\cdots+p_n=I$,所以排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为

$$\begin{aligned}&(n-1)-p_1+(n-1)-p_2+\cdots+(n-n)-p_n\\&=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-I\\&=\frac{1}{2}n(n-1)-I.\end{aligned}$$

解 3 若排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 及$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中考虑同一对数,它们在两个排列中,一个为顺序,一个为逆序,即它们在这两个排列中逆序之和为 1. 而一个 n 级排列中,一共有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$对不同的数,在题设两个排列中,这些数对之和也就是$\frac{1}{2}n(n-1)$. 而排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为I,则排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为$\frac{1}{2}n(n-1)-I$.

例 5 证明任何 n 元排列$x_1x_2\cdots x_n$ 通过对换变为 $12\cdots n$ 的对换次数不超过n.

分析　对任何一个 2 元排列 x_1x_2 变为 12,其对换次数最多为 1,不超过 2.对任何一个 3 元排列 $x_1x_2x_3$ 变为 123,易知其对换次数不超过 3.要证一般情况即对任何一个 n 元排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 变为 $12\cdots n$,其对换次数不超过 n,可用归纳法证明.

证明　用归纳法.

当 $n=2$ 时,结论显然成立.

设对 $n-1$ 时结论成立,下面证 n 时的情况.

若 $x_n=n$,则 $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ 是 $12\cdots(n-1)$ 的一个 $n-1$ 元排列,则由归纳假设,可对 $x_1x_2\cdots x_{n-1}$ 进行不超过 $n-1$ 次的对换变为 $12\cdots(n-1)$,从而可对 $x_1x_2\cdots x_n$ 进行不超过 n 次的对换变为 $12\cdots n$.这里实际上为 $n-1$ 次.若 $x_n\neq n$,设 $x_i=n(i<n)$,则可先对 $x_1x_2\cdots x_i\cdots x_n$ 进行对换 (x_i,x_n),得

$$x_1x_2\cdots x_{n-1}n,$$

于是又化为上面 $x_n=n$ 的情况,则 $x_1x_2\cdots x_n$ 变为 $12\cdots n$ 的总的对换次数不超过 n.

2. 行列式计算

提示　行列式计算的关键在于根据给定的行列式的规律,利用行列式的定义、性质和展开法则等,将行列式化为简单的形式或已知的行列式(如上(下)三角行列式、Vandermonde 等).

下面结合例题给出常用的行列式的计算方法.

(1) 用行列式的定义计算

例 6　计算 $D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$.

分析 1 这里的行列式从第二行起,每行每列只有一个元素不为零,故由行列式的定义,只有一项不为零,因此可用行列式的定义计算.

解 1 按行列式定义,有

$$D_n=(-1)^t b_1 b_2\cdots b_{n-1}a_n,$$

其中 $t=\tau(2\ 3\ \cdots\ n\ 1)=n-1$, 这里列标为自然顺序,故只要计算行标的逆序数,所以

$$D_n=(-1)^{n-1}b_1 b_2\cdots b_{n-1}a_n.$$

分析 2 在该行列式中,最后一列只有一个元素不为零,故可按最后一列展开,这样计算也比较简便.

解 2 按最后一列展开,有

$$D_n=a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}a_n b_1 b_2\cdots b_{n-1}.$$

例 7 由行列式的定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 4x & 1 & 3 & 3 \\ x & x & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3x & 6 \\ x & 2 & 6 & x \end{vmatrix}$$

展开式中 x^4 和 x^3 的系数.

分析 由行列式的定义,上述行列式中的每项为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$