● 研究生教材 ● 研究生教材

数理逻辑

王兵山　张　强　李舟军

■ 研究生教材 ■

王兵山 张 强 李舟军 编著

数理逻辑

国 防 科 技 大 学 出版社

〔湘〕新登字 009 号

内容简介

本书是一本计算机专业的数理逻辑教材，书中系统地介绍了逻辑演算，模型论和证明与反驳等数理逻辑的基本内容。

全书分五章，主要内容包括命题逻辑，一阶逻辑，带等词的一阶逻辑和证明与反驳。本书语言简洁，证明严谨详细，并配有大量例题和习题，便于自学。

本书可作为研究生和高年级本科生教材，亦可作为有关专业研究人员、工程技术人员和大专院校教师参考书。

数理逻辑

编著：王兵山　张　强　李舟军

责任编辑：胡见堂

*

国防科技大学出版社出版发行

新华书店总店科技发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：850×1168　1/32　印张：7.8125　字数：196千

1993年12月第1版第2次印刷　印数：1001—3500册

ISBN 7-81024-276-8

O·28　定价：9.00元

《研究生教材》出版说明

研究生教育是我国高等教育的重要组成部分。研究生必须打下本门学科坚实的理论基础和掌握系统的专门知识，并具有从事科学研究工作以及担任专门技术工作的能力。

为加强研究生课程建设，满足研究生教学的需要，我们组织编写研究生系列教材。教材编著者都是我校多年从事研究生培养工作，有丰富教学和科研经验的教师。

为了保证研究生通过课程学习，在本门学科上掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，在组织编写研究生教材的过程中，首先，强调突出重点，注意反映课程的基本内容和基本知识，以保持教材基本内容的相对稳定性和系统性，以及对本课程有一定的覆盖面。同时，要求教材的编写要着眼于研究生未来的工作和现代科学技术发展的需要，注意反映国内外的最新研究成果和发展趋势，具有一定的学术水平，使研究生能迅速接近该学科发展的前沿。当然在教材的结构和阐述方法上，要求条理清楚，叙述严谨，论证充分，文字简炼，符合人们的认识规律。这样，使研究生通过课程学习不仅受到足够的科学训练，培养了能力，发展了智力，而且有利于教师传授知识和研究生自学。总之，力求使研究生教材具备系统性、先进性、科学性和可读性。

尽管我们主观上希望研究生教材质量高一些，并在教材的选题、组稿、编审、出版各个环节，都力求精益求精。但由于我们对出版研究生教材的经验不足，缺点错误在所难免，敬请同行专家和广大读者指正。我们希望通过研究生教材的出版，能为我国，特别是军队的研究生教育事业奉献微薄之力。

国防科技大学研究生院

一九九一年九月

前　　言

逻辑和代数是计算机科学的两大理论基础。数理逻辑各个分支中的许多方面和计算机科学有着密切的联系。本书是作者在多年给硕士研究生讲授《数理逻辑》课程讲义的基础上编写而成的。

本书系统地介绍了逻辑演算,模型论和证明与反驳等数理逻辑的基本内容。全书分为五章,选材时充分考虑了适应逻辑系统的特征和计算机科学的要求。第一章介绍了形式系统的定义,结构及基本概念。第二章介绍了命题逻辑形式系统和消解原理。第三章和第四章分别介绍了一阶逻辑形式系统和带等词的一阶逻辑形式系统,以及模型论的初步知识。其中对形式系统解释的定义采用了更适合描述程序语义的方式,而不是传统的方式。第五章重点讨论证明一阶逻辑中定理的实践问题,给出了多种方法以提高证明效率。同时给出了 Herbrand 定理及有关结果。此乃人工智能中机械定理证明的理论基础。全书论述严谨详细,并配有一定数量的例题和习题,便于教学和自学。

由于本书在许多地方使用了集合论的概念、术语及记号,因此要求读者有集合论基础知识。若读者已预修《离散数学》课程,那么阅读和学习本书会更容易些。

国防科大研究生院陈火旺教授在百忙之中,审阅了全部书稿,并提出了宝贵的修改意见。国防科大研究生院副院长齐治昌教授,计算机系副主任窦文华教授,软件教研室主任王广芳教授、室副主任邹鹏副教授对本书的编审给予了大力支持。研究生院、计算机系机关的有关人员也给予了积极的支持。在此一并表示由衷的感谢。

限于作者水平，书中的缺点和错误在所难免，希望读者批评指正。

作　者

1993 年 8 月于长沙

目 录

第一章 形式系统

形式化是现代数理逻辑的基本特征,形式系统是现代数理逻辑的重要工具。因此,形式化方法和形式系统已成为现代数理逻辑的一个组成部分。

形式系统是一个用符号语言表达的符号体系,它由以下两大部分组成:

i) 符号体系的组成部分,它包括语言所使用的符号和各类符号串的形成规则,这部分称为形式系统的语言部分。

ii) 符号体系的推演部分,它包括称为公理的符号串集合,称为推演规则的符号串重写规则集合,以及由它们重写生成的称为定理的符号串集合,这部分称为形式系统的理论部分。

〔**定义 1.1**〕 称五元偶 FS = <$\sum$, Term, Formula, Axiom, Rule> 为形式系统,其中

i) $\sum$ 为非空集合,称为 FS 的符号表,其元素称为 FS 的符号。

ii) Term$\subseteq\sum^*$,称为 FS 的项集合,其元素称为 FS 的项。

iii) Formula$\subseteq\sum^*$ 且 Formula$\cap$Term$=\varnothing$,称为 FS 的公式集合,其元素称为 FS 的公式。此外,有 Formula 的一个子集 Atom 称为 FS 的原子公式集合,其元素称为 FS 的原子公式。

iv) Axiom$\subseteq$Formula,称为 FS 的公理集合,其元素称为 FS 的公理。

v) Rule$\subseteq\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} 2^{(\text{Formula})^n}$(其中(Formula)^n 表示集合 Formula

的 n 次笛卡儿乘积)，称为 FS 的推演规则集合，其元素称为 FS 的推演规则。

如果 $r \in \text{Rule}$ 及 $A_0, A_1, \cdots, A_n, B \in \text{Formula}$ $(n \in N)$ 使

$$<A_0, A_1, \cdots, A_n, B> \in r$$

则称可由推演规则 r 及 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 重写出 B, 简称可由 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 重写出 B, 记为

$$\frac{A_0, A_1, \cdots, A_n}{B} r \text{ 或 } \frac{A_0, A_1, \cdots, A_n}{B}$$

几点说明:

1° Term，Formula，Axiom 和 Rule 都可以是空集合。

2° $\sum$，Term 和 Formula 为 FS 的语言部分，而 Axiom 和 Rule为 FS 的推演部分。

3° 当 Term = Axiom = Rule = $\varnothing$ 时，FS 就仅仅是一个语言生成系统了。

4° 形式系统 FS 本身所使用的语言，即由 $\sum$，Term 和 Formula 所规定的语言，称为 FS 的对象语言，它是一种形式语言。我们对 FS 的研究，在某种意义上说，就是对 FS 的对象语言的研究。

5° 在对形式系统 FS 的研究中，还要使用一种语言，称为 FS 的元语言。FS 的对象语言和元语言是两种不同级别的语言。元语言是介绍、表达和说明对象语言所用的语言。FS 的元语言是一种借助形式符号的自然语言，它所使用的形式符号大致有以下三类:

i) FS的对象语言中的形式符号，但所表达的意思不同。

例如: 在 FS 中，命题变元 $p \in \sum$ 是做为一个符号实体而使用的，但在 FS 的元语言中，p 是做为符号实体 p 的名子而使用的。虽然是同一个符号 p，在对象语言和元语言中分别代表不同

的含义。因此有人建议加以区别，我们仍然采用不加区别的原则，但要留心。

ii) 语法变元

在 FS 的元语言中，使用语法变元表达 FS 的对象语言中的一类符号或公式，使关于 FS 的描述更简明，如用 r 表示任意推演规则，而用 A，B 表示任意公式等。

iii) 元语言本身所需用的符号。

用符号来代替在元语言中反复使用的一些术语，如 $\vdash_{FS}$ 等。

6° 定义1.1给出的形式系统 FS 太一般化，通常还要对 FS 加以限制，以便对 FS 及被 FS 形式化的理论进行所谓“能行”研究，即使得 FS 中的推演能机械地实现。为此，常采用的限制有以下两种：

i) $\sum$ 为有穷集或可数集。

这时 Term 和 Formula 均为递归可枚举集，而且要求Axiom，Rule 和 Atom 亦然。

ii) Term，Formula，Atom，Axiom 和 Rule 都是递归的，即它们的成员关系都是可判定的。

〔例 1〕 初等数论形式系统 FSEN

i) $\sum=\{0,',\simeq\}$

ii) Term $=\{0,0',0'',\cdots\}$.

iii) Formula $=\{t_1\simeq t_2 \mid t_1, t_2\in \text{Term}\}=$ Atom .

iv) Axiom $=\{0\simeq 0\}$

v) Rule $=\{r\}$，其中 $r=\{<t_1\simeq t_2, t_1'\simeq t_2'>|t_1, t_2\in\text{Term}\}$.

〔例 2〕 初等代数中的群论形式系统 FSG

i) $\sum=\{e, *, ^{-1}, (,), \simeq\}\cup X$，其中 X 为集合且 $X\cap\{e, *, ^{-1}, (,) \simeq\}=\varnothing$.

ii) Term $=\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}T_n$，其中

$T_0 = X \cup \{e\}$,

$T_{i+1} = \{ (t^{-1}), (t_1 \cdot t_2) \mid t_1, t_2 \in T_i\}$ $i = 0, 1, 2, \cdots$

这里有一些省略括号的通常约定。

iii) $\text{Formula} = \{t_1 \simeq t_2 \mid t_1, t_2 \in \text{Term}\} = \text{Atom}$

iv) $\text{Axiom} = \{a \simeq a \mid a \in X \cup \{e\}\} \cup \{et \simeq t, t^{-1} \cdot t \simeq e, (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 \simeq t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) \mid t, t_1, t_2, t_3 \in \text{Term}\}$

v) $\text{Rule} = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$，其中

$r_1 = \{ < t_1 \simeq t_2, t_2 \simeq t_1 > \mid t_1, t_2 \in \text{Term}\}$,

$r_2 = \{ < t_1 \simeq t_2, t_1^{-1} \simeq t_2^{-1} > \mid t_1, t_2 \in \text{Term}\}$,

$r_3 = \{ < t_1 \simeq t_2, t_2 \simeq t_3, t_1 \simeq t_3 > \mid t_1, t_2\ t_3 \in \text{Term}\}$,

$r_4 = \{ < t_1 \simeq t_2, t_3 \simeq t_4, t_1 \cdot t_3 \simeq t_2 \cdot t_4 > \mid t_1, t_2, t_3, t_4 \in \text{Term}\}$

〔**定义 1.2**〕设 $A \in \text{Formula}$，若有 $A_0, A_1, \cdots, A_m \in \text{Formula}$ 满足：

i) $A_m = A$;

ii) 当 $0 \leqslant j \leqslant m$ 时，以下两条件至少有一个成立：

① $A_j \in \text{Axiom}$;

② 有 $r \in \text{Rule}$ 及 $j_0, j_1, \cdots, j_n (n \in N$ 且 $0 \leqslant j_0, \cdots, j_n < j)$ 使

$$< A_{j0}, A_{j1}, \cdots, A_{jn}, A_j > \in r$$

就称 A 为 FS 的一个定理，或称 A 为可证的，记为：$\vdash_{FS} A$，并称 $A_0, A_1, \cdots, A_m$ 为 A 的一个证明。

在不会引起混淆时，常把 $\vdash_{FS} A$ 简写为 $\vdash A$.

我们令

$$\textbf{Th (FS)} = \{A \in \text{Formula} \mid \vdash A\}$$

并称 Th (FS) 为 FS 的理论。

显然，$\text{Axiom} \subseteq$ **Th (FS)**，即 FS 的公理都是 FS 的定理，因为每个公理本身就是它的一个证明。

〔**定义 1.3**〕设 $A \in \text{Formula}$ 且 $\Gamma \subseteq \text{Formula}$，若有 $A_0, \cdots, A_m \in \text{Formula}$ 满足：

i) $A_m = A$;

ii) 当 $0 \leqslant j \leqslant m$ 时，以下三个条件至少有一个成立：

① $A_j \in \Gamma$;

② $A_j \in \text{Axiom}$;

③ 有 $r \in \text{Rule}$ 及 $j_0, \cdots, j_n (n \in N$ 且 $0 \leqslant j_0, \cdots, j_n < j)$ 使

$$<A_{j0}, \cdots, A_{jn}, A_j> \in r.$$

就称 A 由 Γ 可证，记为 $\Gamma \vdash_{FS} A$，并称 $A_0, \cdots, A_m$ 为 A 的一个从 Γ 出发的证明。

在不会引起混淆时，常把 $\Gamma \vdash_{FS} A$ 简写为 $\Gamma \vdash A$.

如果 $\Gamma \vdash A$，则称 A 为 Γ 的一个推演结果，并称 Γ 为 A 的前提。

我们令

$$\text{Th}\ (FS \cup \Gamma) = \{A \in \text{Formula} \mid \Gamma \vdash A\}$$

在不会引起混淆时，常把 Th $(FS \cup \Gamma)$ 简写为 Th (Γ) .

这时显然有以下性质成立：

性质 1° $\text{Axiom} \subseteq \text{Th}\ (FS) \subseteq \text{Th}\ (\Gamma)$.

性质 2° $\Gamma \subseteq \text{Th}\ (\Gamma)$.

性质 3° $\text{Th}\ (\varnothing) = \text{Th}\ (FS)$.

性质 4° $\text{Th}\ (\text{Th}\ (\Gamma)) = \text{Th}\ (\Gamma)$.

〔定义 1.4〕 设 $FS_i = <\sum_i, \text{Term}_i, \text{Formula}_i, \text{Axiom}_i, \text{Rule}_i> (i=1, 2)$. 若 FS_1 和 FS_2 满足：

$\sum_1 \subseteq \sum_2$, $\text{Term}_1 \subseteq \text{Term}_2$, $\text{Formula}_1 \subseteq \text{Formula}_2$, $\text{Axiom}_1 \subseteq \text{Th}(FS_2)$ 且 $\text{Rule}_1 \subseteq \text{Rule}_2$

就称 FS_2 为 FS_1 的一个扩张，记为 $FS_1 \subseteq FS_2$. 当还有 $FS_1 \neq FS_2$ 时，又记为 $FS_1 \subset FS_2$.

在上面的定义 1.4 中，不用条件 $\text{Axiom}_1 \subseteq \text{Axiom}_2$ 是为了使扩张概念的含义更广泛些。

第二章 命 题 逻 辑

我们从讨论一个较简单的逻辑系统$\mathscr{P}$开始，因为$\mathscr{P}$不仅是一个命题演算系统，而且$\mathscr{P}$的许多概念，定义和结果对较丰富的逻辑系统也适用，同时$\mathscr{P}$还常常做为那些逻辑系统的一个子系统。

§2.1 命题逻辑形式系统$\mathscr{P}$

1° $\mathscr{P}$的符号表$\sum$

i) 通用符号 (improper symbols)

① 命题联结词：$\sim$，$\vee$.

② 括号：(,) .

ii) 特殊符号 (proper symbols)

可数个命题变元：p，q，r，…，p_i，q_i，r_i，…(i=0，1，…).

2° $\mathscr{P}$的项集 Term$=\varnothing$，即$\mathscr{P}$无项。

3° $\mathscr{P}$的公式集 Formula$\subseteq\sum^*$为满足以下条件的集合$\mathscr{S}\subseteq\sum^*$中的最小集合：

i) 若 $p\in\sum$ 为命题变元，则 $p\in\mathscr{S}$；

ii) 若 $A\in\mathscr{S}$，则 $\sim A\in\mathscr{S}$；

iii) 若 A，$B\in\mathscr{S}$，则 $(A\vee B)\in\mathscr{S}$.

由此不难推出关于公式的结构归纳法

〔**定理 2.1.1**〕(公式结构归纳法)若$\mathscr{S}\subseteq$Formula 满足以下条件：

i) 若$p\in\sum$为命题变元，则 $p\in\mathscr{S}$；

ii) 若 $A\in\mathscr{S}$，则 $\sim A\in\mathscr{S}$；

iii) 若 A，$B\in\mathscr{S}$，则 $(A\vee B)\in\mathscr{S}$.

则$\mathscr{S}$=Formula .

证明

由$\mathscr{S}$也满足 3 ° 中条件 i) ～ iii) 及 Formula 的最小性知 Formula$\subseteq\mathscr{S}$，所以再由题设$\mathscr{S}\subseteq$ Formula 即得$\mathscr{S}$= Formula . □

根据上面证明的公式结构归纳法，要想证明 Formula 中的每个公式都具有某种性质 φ 时，可先令

$\mathscr{S}=\{A\in\text{Formula} \mid A \text{ 具有性质 } \varphi\}$

然后再验证 $\mathscr{S}$ 满足定理 2.1.1 中的条件 i) ～ iii) 即可。

为了使公式的表达简洁，我们在此定义派生命题联结词如下：

$\wedge$：$(A\wedge B)$ 代表$\sim(\sim A\vee\sim B)$

$\supset$：$(A\supset B)$ 代表 $(\sim A\vee B)$

$\equiv$：$(A\equiv B)$ 代表 $((A\supset B)\wedge(B\supset A))$

符号～，$\vee$，$\wedge$，$\supset$ 和$\equiv$称为命题联结词，其直观意义分别为：

$\sim A$	意指	非 A
$(A\vee B)$	意指	A 或 B
$(A\wedge B)$	意指	A 且 B
$(A\supset B)$	意指	A 蕴含 B
$(A\equiv B)$	意指	A 当且仅当 B

在公式的定义中，我们使用了一些括号，它使公式结构清晰无歧义，但却增加了公式的读写难度。因此，我们希望尽量少用括号，为此特做如下约定：

① 公式最外层括号可以省略；

② 用“■”代表一个左括号，而与此“左括号”相匹配的右括号，在不改变已有括号匹配关系的条件下，要尽可能地远；

③ 同一命题联结词的多次出现按从左到右的顺序依次处理；

④ 不同的命题联结词按 $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$ 的优先次序处理。

例如: $p \vee q \supset \sim r \wedge s \supset r$ 代表 $(((p \vee q) \supset (\sim r \wedge s)) \supset r)$.

$p \wedge (\sim r \vee \blacksquare q \supset \blacksquare r \vee s) \vee p$ 代表

$((p \wedge (\sim r \vee (q \supset (r \vee s)))) \vee p)$.

最后, $\sim r \wedge \sim p \vee \blacksquare q \wedge r \vee (\sim s \supset \blacksquare p_1 \wedge q \supset p) \equiv s \vee p \supset s$

就代表如下的公式:

$((\sim r \wedge \sim p) \vee (((q \wedge r) \vee (\sim s \supset ((p_1 \wedge q) \supset p))) \equiv ((s \vee p) \supset s)))$

4° $\mathscr{P}$ 的公理集 $Axiom = AS_1 \cup AS_2 \cup AS_3$ ，其中

AS_1: $A \vee A \supset A$

AS_2: $A \supset B \vee A$ 　　　　A, B, $C \in Formula$

AS_3: $A \supset B \supset \blacksquare C \vee A \supset B \vee C$

亦即

$AS_1 = \{A \vee A \supset A \mid A \in Formula\}$

$AS_2 = \{A \supset B \vee A \mid A, B \in Formula\}$

$AS_3 = \{A \supset B \supset \blacksquare C \vee A \supset B \vee C \mid A, B, C \in Formula\}$

因为 AS_1, AS_2 和 AS_3 都不是一条单独的公理，因此称为公理模式。

5° $\mathscr{P}$ 的推演规则集 $Rule = \{MP\}$，其中

MP : $\dfrac{A, \ A \supset B}{B}$ ，或用话说为“若 A 且 $A \supset B$，则 B”

A, $B \in Formula$.

亦即

$MP = \{\langle A, A \supset B, B \rangle \mid A, B \in Formula\}$

通常，把 MP 称为假言推理 (modus ponens) .

综合以上所述，我们就获得了一个命题逻辑形式系统如下:

$\mathscr{P} = \langle \Sigma, \varnothing, Formula, Axiom, Rule \rangle$

$= \langle \Sigma, \varnothing, Formula, AS_1 \cup AS_2 \cup AS_3, \{MP\} \rangle$.

6° 代入

代入是一个重要的符号运算，在形式语言和数理逻辑中，都起着重要作用，在这里我们只给出数理逻辑中所用的代入运算形式。

〔定义 2.1.1〕 如果函数 $\theta: \sum^* \to \sum^*$ 满足以下条件：

i) 若 $x \in \sum$，则 $\theta(x) \neq \varepsilon$；　　(ε表示空符号串)

ii) 若 $X, Y \in \sum^*$，则 $\theta(XY) = \theta(X)\theta(Y)$.

就称 θ 为一个代入。

〔定义 2.1.2〕 设 θ 为一个代入。

i) 若$\{x \in \sum \mid \theta(x) \neq x\}$为有穷集，则称$\theta$为一个有穷代入。

ii) 若 θ 满足以下条件：

$$\theta(\sim) = \sim,\ \theta(\vee) = \vee;\ \theta(() = (\text{ 且 }\theta()) =).$$

就称 θ 为一个变元代入。

iii) 若有命题变元 $p_1, \cdots, p_n \in \sum$ 及公式 $A_1, \cdots. A_n \in$ Formula 使

$$\theta(x) = \begin{cases} A_i & \text{若 } x = p_i \text{ 且 } 1 \leqslant i \leqslant n \\ x & \text{若 } x \notin \{p_i, \cdots, p_n\} \end{cases} \qquad x \in \sum$$

则把 θ 记为 $S^{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n}_{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n}$.

对每个 $X \in \sum^*$，我们常把 $S^{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n}_{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n} X$ 表示为 $\theta(X)$.

我们可以定义一个函数 Var：Formula $\to 2^{\Sigma}$ 如下：

i) 若 $p \in \sum$ 为命题变元，则 $\mathrm{Var}(p) = \{p\}$；

ii) 若 $A \in$ Formula，则 $\mathrm{Var}(\sim A) = \mathrm{Var}(A)$；

iii) 若 $A, B \in$ Formula，则 $\mathrm{Var}(A \vee B) = \mathrm{Var}(A) \cup \mathrm{Var}(B)$.

〔定义 2.1.3〕 设 $A \in$ Formula 且 $p \in \sum$ 为命题变元。若 $p \in \mathrm{Var}(A)$，则称 p 在 A 中出现，否则称 p 不在 A 中出现。

§ 2.2 $\mathscr{P}$的定理和导出规则

这节介绍命题逻辑形式系统$\mathscr{P}=<\sum, \varnothing$, Formula, $AS_1 \cup AS_2 \cup AS_3, \{MP\}>$的一些重要派生推演规则和定理。为此，设$\Gamma$，$\Gamma_1$，$\Gamma_2 \subseteq$Formula 且 A，B，C，D $\in$ Formula．

派生规则 $(\in)$：若$A \in \Gamma$，则$\Gamma \vdash A$

派生规则 $(\in_+)$：若$\Gamma_1 \vdash A$且$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$，则$\Gamma_2 \vdash A$．

这是因为从Γ_1出发的 A 之证明显然为从Γ_2出发的 A 之证明。

派生规则 $(\overline{MP})$：若$\Gamma_1 \vdash A$，$\Gamma_2 \vdash A \supset B$，$\Gamma_1 \subseteq \Gamma$且$\Gamma_2 \subseteq \Gamma$，则$\Gamma \vdash B$．

证明

首先由$(\in_+)$知道

$$\Gamma \vdash A \text{且} \Gamma \vdash A \supset B$$

如果$C_0, \cdots, C_n \in$Formula 和$D_0, \cdots, D_m \in$Formula 分别为从Γ出发的 A 和$A \supset B$之证明，则由推演规则 MP 知道，C_0，$\cdots$，C_n，$D_0 \cdots$，D_m，B 即为从Γ出发的 B 之证明，所以有$\Gamma \vdash B$．□

代入规则 sub: 设$\Gamma \vdash A$且$A_1, \cdots, A_n \in$Formula．若命题变元p_1，$\cdots$，p_n均不在Γ的公式中出现，则$\Gamma \vdash S^{p_1, p_2, \cdots, p_n}_{A_1, A_2, \cdots, A_n} A$．

证明

我们把$S^{p_1 \cdots p_n}_{A_1 \cdots A_n}$记为$\theta$．因为$\Gamma \vdash A$，所以有从$\Gamma$出发的 A 之证明存在，设此证明为

$$C_0, \cdots, C_m \qquad (C_m = A)$$

要证明$\Gamma \vdash \theta(A)$，显然只须用关于$j(0 \leqslant j \leqslant m)$的第二归纳法证明