力学系统的对称性与不变量

赵跃宇　梅凤翔　著

国家自然科学基金资助项目

科学出版社

力学系统的对称性与不变量

赵跃宇　梅凤翔　著

国家自然科学基金资助项目

科 学 出 版 社

1999

内 容 简 介

本书系统介绍了力学系统的对称性与不变量理论，涉及经典工作和现代进展。具体包括 Noether 理论及其推广；Lie 对称性理论及 Lagrange 对称性理论；对称性与不变量的几何理论；绝热不变量理论。

图书在版编目(CIP)数据

力学系统的对称性与不变量/赵跃宇，梅凤翔著.—北京：科学出版社，1998

ISBN 7-03-006759-2

Ⅰ.力… Ⅱ.①赵… ②梅… Ⅲ.①力系-对称-理论 ②力系-不变量-理论 Ⅳ.O312.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 13164 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

科地亚印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1999 年 1 月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1999 年 1 月第一次印刷　印张：6 3/4

印数：1—1 200　字数：172 000

定价：13.00 元

我想知道上帝是如何创造这个世界的。对这个或那个现象、这个或那个元素的谱我不感兴趣。我想知道的是他的思想,其它的都只是细节的问题。

——A.爱因斯坦

前　　言

1905 年,Einstein 提出了狭义相对论,这使我们对时间与空间的认识发生了一场革命。Einstein 的理论第一次发现了自然一直在忍痛隐藏的对称性,它的理性基础是对对称性的威力的深刻理解,正是在此基础上,才得出了这个理论的实际物理结果:质量与能量等价、时间与空间联姻。Einstein 使对称性得以成为现代数理科学的明星。

在物理学中,物理学家追求用简洁的数学公式描述复杂的自然现象及所遵循的基本规律,Hamilton 作用量就具有这样的特征。称物理学具有某种对称性是指,在作过与这种对称性相应的变换后作用量保持不变,因而作用量体现了物理实在的结构。

一个物理学理论可以被总结成为一个作用量,并且这个理论的对称性就明白地表现于在各种变换之下作用量的不变性。然而,物理学家也常常遇到这样的情况,他们并不知道涉及的全部对称性,而他们确定知道的对称性又不足以限制作用量的形式。遇到这种情况,物理学家只得依次考察每一个“候选的”作用量,以确定他们的物理含义。这是一个异常艰巨的工作。如果有人走过来说:对于一个特定的对称性,人们可以不必知道作用量的具体细节而立即知道它的某些推断。物理学家们一定会欣喜若狂。

确实有一个人走了过来,她就是德国伟大的女数学家 E·Noether。1918 年,凭着灵感,Noether 意识到,作用量的每一种连续对称性都将有一个守恒量与之对应。如 Hamilton 作用量在时间的平移变换下的不变性对应了能量守恒;作用量在空间的平移变换下的不变性对应了动量守恒,作用量在空间的旋转变换下的不变性对应了动量矩守恒。对称与守恒在本质上是联系在一起的。Noether 的结论既简单又深刻,Noether 定理之美在于它不依赖于作用量的细节,它是人类智慧对自然的信心。Noether 定理给

数理科学带来了一片光明。

Noether 理论对数理科学的发展起过积极的、重大的作用,但它并不能包罗万象,其它的对称性与不变量理论的提出,使得对称性与不变量的研究已经成为了本世纪末数理科学中一个非常重要、活跃的领域。

对称性与不变量理论的一些重要应用领域包括以下几个方面:

1.从已知解导出新解。利用对称性往往可以从一个已知解求得新的解,且常常可以从平凡解导出感兴趣的解。

2.常微分方程的积分。利用对称性可以约化常微分方程的阶,如将一个二阶常微分方程约化为一个一阶常微分方程。

3.偏微分方程的约化。利用对称性可以约化偏微分方程的独立和非独立的变量,如将两个变量的偏微分方程约化为一个常微分方程。

4.偏微分方程的线性化。利用对称性能够确定偏微分方程是否可以线性化,并在可线性化时构造出其表达式。

5.方程的分类。利用对称性可以把微分方程分为一些等价类,并给出各等价类方程的简单表示。

6.偏微分方程解的渐近性。偏微分方程的解渐近趋向于一个由对称性约化得到的低维方程的解,这些解中的一部分可以说明一些重要的物理现象。实际上,由对称性方法所得的精确解可以有效地用于渐近性等研究。

7.数值方法和计算机代码测试。相应于偏微分方程的对称性可以用于数值算法的设计、测试和评估,也可以提供积分器的准确性与可靠性的检验。

8.守恒定律。利用对称性可以求得守恒定律,每一个守恒定律都对应了一定的对称性。

9.其它更进一步的应用。对称性还可以应用于其它一些理论,如分叉理论、控制理论、特殊函数理论、边界值问题以及自由边界问题。

本书将专门介绍力学系统的对称性与不变量理论，力图反映作者们近几年在国家自然科学基金资助下在该领域内所做的工作，同时也将反映国内外其它学者专家在该领域内所取得的若干新的研究成果。

全书共分六章。在第一章中主要介绍了经典的 Noether 对称性与不变量定理及其逆定理，并根据我们提出的 m 次运动空间中的新型变分原理给出了 Noether 定理的一种新推导方法；在第二章中我们将经典的 Noether 理论向非保守、非完整系统进行了推广，并介绍了连续介质力学系统、奇异力学系统和 Birkhoff 系统的 Noether 理论；第三章介绍 Lie 对称性理论在力学系统中的应用；第四章介绍了 Lagrange 对称性；在第五章中介绍了利用现代微分几何理论描述对称性与不变量，包括经典的 Noether 对称性、高阶 Noether 对称性、拟对称性及伴随对称性等；第六章介绍了绝热不变量理论与对称性摄动之间的关系。

目　　录

第一章　Noether 对称性理论

本章讨论 Noether 对称性与不变量。1918 年德国女科学家 A. E. Noether 提出了一个定理,揭示了力学系统的守恒量与其内在的动力学对称性之间的关系,后来被称之为 Noether 定理。按照 Noether 的思路,人们逐步认识到,对于更为复杂的力学系统,寻求其不变量的有效途径之一就是研究力学系统的对称性。在本章里,我们将系统地介绍 Noether 定理及其逆定理。

第一节　经典 Noether 定理

研究力学系统的不变量有三种方法:1. 直接研究运动微分方程;2. 研究在无穷小变换下 Hamilton 原理的变换性质;3. 从微分变分原理研究守恒量。我们采用第二种方法。

一、Hamilton 原理

考虑一个有限自由度的完整有势力学系统,描述其位形的广义坐标为 $q_j(t)(j = 1,\cdots,n)$,系统的运动可由 Lagrange 函数 $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$ 来描述,其中 $\dot{q}_i = \dfrac{dq_i}{dt}$ 为广义速度;$L = T - V$,其中 T 为系统的动能。泛函

$$I[q] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q_i, \dot{q}_i)dt \tag{1.1.1}$$

称为 Hamilton 作用量。

Hamilton 原理　对于完整保守的力学系统,在某一时间间隔内系统的真实运动与在同一时间内具有相同起始位置的可能运动相比较,真实运动使 Hamilton 作用量取驻值,即

$$\delta I = 0 \tag{1.1.2}$$

Hamilton 原理给出了从可能运动中挑选出真实运动的法则，并由此建立力学系统的运动微分方程。

根据 Hamilton 原理，对 Hamilton 作用量变分得

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \tag{1.1.3}$$

式(1.1.3)中相同下标表示求和(下同)。对于完整系统，存在交换关系

$$\frac{d}{dt}(\delta q_i) = \delta \dot{q}_i \tag{1.1.4}$$

利用交换关系式(1.1.4)，将式(1.1.3)右端第二项分部积分，并考虑到

$$\delta q_i \mid_{t=t_0} = \delta q_i \mid_{t=t_1} = 0 \tag{1.1.5}$$

则可得泛函 $I[q]$ 的变分

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \tag{1.1.6}$$

对于力学系统的真实运动 $\delta I = 0$，根据完整系统 δq_i 的独立性，由变分学的基本引理，我们可得

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{1.1.7}$$

式(1.1.7)通常称为 Lagrange 方程，由此可确定力学系统的真实运动。

Hamilton 原理在力学、理论物理中有非常重要的作用，它的优点不仅在于用简洁的数学式描述力学系统运动的规律，也在于它提出了用比较可能运动与真实运动的方法确定力学系统的运动规律的原则。

可以证明，如果在 Hamilton 作用量中的 Lagrange 函数上添加上一个函数关于时间的全微分项，系统的 Lagrange 方程(1.1.7)将保持不变。由此可知，描述力学系统运动的 Lagrange 函数是不唯一的。

二、对称性和不变量

我们所处的世界是丰富多彩、千变万化的。然而，只要我们仔细观察，就可以从这个变化万千的世界里找到一类普遍存在的现象——对称。世界上各种事物的对称性表现在两个方面：一是物体几何形体的对称性，另一是事件进程或物理规律的对称性。

物体几何形体的对称性是指物体各部分之间有一定的秩序，或按一定的规律互相重复，如左右对称、旋转对称、平移对称、镜像对称等。

物理规律的对称性是指物理规律在某种变换下的不变性。限于本书的目的，我们只讨论物理规律的对称性。

我们知道，在很多物理问题中存在能量守恒、动量守恒、动量矩守恒等。这么多守恒量（即不变量）的存在不是偶然的，它们是物理规律具有多种对称性的自然结果。以后我们将会看到：一种对称性通常情况下对应着一条守恒定律（或对应着一个不变量）。守恒量也称为不变量、首次积分、第一积分等。

对于完整保守的力学系统，在 Lagrange 体系中，对称性与不变量的关系是由经典 Noether 定理给出的。

我们考察使完整保守力学系统的 Hamilton 作用量不变的对称变换。

设无穷小变换为

$$\bar{t} = t + \varepsilon_\sigma \tau^\sigma(t, q, \dot{q}) \tag{1.1.8a}$$

$$\bar{q}_i = q_i + \varepsilon_\sigma \xi_i^\sigma(t, q, \dot{q}) \tag{1.1.8b}$$

其中 τ^σ，ξ_i^σ 称为无穷小变换的生成函数，$\varepsilon_\sigma(\sigma = 1, 2, \cdots, s)$ 为无穷小参数。

在比较真实运动与可能运动时除考虑等时变分外也可以考虑非等时变分（图 1），分别记为 δq_i，Δq_i，且

$$\delta q_i = \bar{q}_i(t) - q_i(t) \tag{1.1.9a}$$

$$\Delta q_i = \bar{q}_i(\bar{t}) - q_i(t) \tag{1.1.9b}$$

由(1.1.9)式可得

$$\Delta q_i = \delta q_i + \dot{q}_i \Delta t \tag{1.1.10}$$

实际上,(1.1.10)式对任意函数 f 的等时变分与非等时变分均成立。对于 $f = \dot{q}$ 则有

$$\Delta \dot{q}_i = \delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i \Delta t \tag{1.1.11}$$

由式(1.1.10)和(1.1.8)可得用生成函数表示的等时变分

$$\delta q_i = \varepsilon_\sigma (\xi_i^\sigma - \dot{q}_i \tau^\sigma) \tag{1.1.12}$$

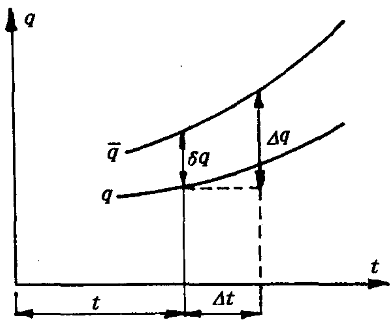

图 1　可能运动路径及其路径变分

在(1.1.8)式变换下,系统的作用量变为

$$I' = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{L}(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) d\bar{t}$$

其中 $\bar{L}$ 是变换后新形式的 Lagrange 函数。若式(1.1.8)为对称变换,则有

$$\delta I' = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \bar{L}(\bar{t}, \bar{q}, \dot{\bar{q}}) d\bar{t} - \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt = 0 \tag{1.1.13}$$

由于描述系统运动特征的 Lagrange 函数不是唯一的,在其上乘一个任意常数或添加一个任意函数的全导数项不改变系统的运动微分方程,因此,在无穷小对称变换下,可能有

$$\bar{L}[\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t})]$$
$$= L(\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t})) - \frac{dP(\bar{t}, \bar{q}(\bar{t}), \dot{\bar{q}}(\bar{t}))}{d\bar{t}} \tag{1.1.14}$$

根据式(1.1.13)有

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t}))d\bar{t} - dP(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t}))$$
$$= L(t,q,\dot{q})dt \tag{1.1.15}$$

由(1.1.8a)式,有

$$d\bar{t} = dt + d(\varepsilon_\sigma \tau^\sigma) \tag{1.1.16}$$

将式(1.1.16)代入式(1.1.15)得

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t}))dt - L(t,q,\dot{q})dt$$
$$= dP(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t})) - L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\bar{q}(\bar{t}))d(\varepsilon_\sigma \tau^\sigma) \tag{1.1.17}$$

由于

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t})) - L(t,q,\dot{q})$$
$$= \frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta \dot{q}_i + O(\varepsilon^2) \tag{1.1.18}$$

$$L(\bar{t},\bar{q}(\bar{t}),\dot{\bar{q}}(\bar{t}))d(\varepsilon_\sigma \tau^\sigma)$$
$$= L(t,q,\dot{q})d(\varepsilon_\sigma \tau^\sigma) + O(\varepsilon^2) \tag{1.1.19}$$

将式(1.1.18),(1.1.19)及式(1.1.10)代入式(1.1.17)则得

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i}(\delta q_i + \dot{q}_i\Delta t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\delta \dot{q}_i + \ddot{q}_i\Delta t)$$
$$- \frac{dP}{dt} + L(t,q,\dot{q})\frac{d}{dt}(\varepsilon_\sigma \tau^\sigma) = 0 \tag{1.1.20}$$

由于

$$\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i\Delta t + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\Delta t + L\frac{d}{dt}(\varepsilon_\sigma \tau^\sigma)$$
$$= \frac{dL}{dt}\Delta t + L\frac{d\Delta t}{dt} = \frac{d}{dt}(L\Delta t) \tag{1.1.21}$$

且

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i \tag{1.1.22}$$

故(1.1.20)式可改写为

$$(\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})\delta q_i+\frac{d}{dt}(L\Delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i-P)=0 \tag{1.1.23}$$

利用系统的 Lagrange 方程(1.1.7),沿着系统的运动轨道可得

$$\frac{d}{dt}(L\Delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i-P)=0 \tag{1.1.24}$$

或

$$L\Delta t+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\Delta q_i-\dot{q}_i\Delta t)-P=\text{const.} \tag{1.1.25}$$

取规范函数 $P=\varepsilon_\sigma P^\sigma$,由于参数 ε_σ 的独立性,有

$$L\tau^\sigma+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(\xi_i^\sigma-\dot{q}_i\tau^\sigma)-P^\sigma=\text{const.}\quad(\sigma=1,2,\cdots,s) \tag{1.1.26}$$

这样,我们就得到了完整保守力学系统的 Noether 定理的结果。

Noether **定理**　如果完整保守力学系统的 Hamilton 作用量在变换式(1.1.8)下保持不变,则沿着力学系统的运动轨线,系统存在 s 个守恒律((1.1.26)式)。

在(1.1.26)式中涉及到 P^σ,怎样确定它的表达式呢?下面我们讨论这一问题。

考虑 Lagrange 函数 L 的变分

$$\Delta L=\bar{L}(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})-L(t,q,\dot{q}) \tag{1.1.27}$$

在无穷小变换(1.1.8)式下,由(1.1.14)式有

$$\begin{aligned}\Delta L&=\bar{L}(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})-L(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})+L(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})-L(t,q,\dot{q})\\&=-\frac{dP}{dt}+\frac{\partial L}{\partial t}\Delta t+\frac{\partial L}{\partial q_i}\Delta q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Delta\dot{q}_i\end{aligned} \tag{1.1.28}$$

而作用量的不变性要求

$$\begin{aligned}\bar{L}(\bar{t},\bar{q},\dot{\bar{q}})d\bar{t}&=L(t,q,\dot{q})dt\\&=L(t,q,\dot{q})(1-\frac{d(\Delta t)}{d\bar{t}})d\bar{t}\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

由(1.1.27),(1.1.28),(1.1.29)三式可得

$$(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \Delta \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} + \frac{d(\Delta t)}{dt})L = \frac{dP}{dt} \tag{1.1.30}$$

当系统的 Lagrange 函数 L 已知时,对应于某一无穷小变换,代入上式左端,可能出现三种结果:(1)能构成某一函数的时间全微分,因此该函数即所求的 P;(2)左端为零,则有 $P=0$,表明无穷小变换保持 Lagrange 函数不变;(3)不能形成某函数的时间全微分,即 P 不确定,表明此无穷小变换不是该系统的对称变换。

例 对于势力场中相互作用的 n 个质点的系统,它的 Lagrange 函数是

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} V(r_{ij})$$

其中 m_i 和(x_i, y_i, z_i) 分别标记第 i 个质点的质量和坐标,而

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

下面分别讨论各无穷小对称变换所导致的守恒律。

(1)时间平移

时间起点平移的无穷小变换

$$\bar{t} = t + \Delta t$$
$$\bar{q}_i = q_i$$

其中 $\Delta t = \Delta b$ 为无穷小量,代入(1.1.30)式,由于 Lagrange 函数 L 不显含时间 t ,故

$$0 = \Delta b \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dP}{dt}$$

由此可得 $P=$const.再由(1.1.26)式得

$$\Delta b(L - \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) = \text{const.}$$

即

$$H = \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{const.}$$

H 为系统的 Hamilton 函数。

由此可见，当时间平移变换为对称变换时，系统将存在能量积分，即时间均匀性导致系统的能量守恒。

(2)空间平移

考虑沿 x 轴的无穷小平移变换

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x}_i = x_i + \varepsilon \quad \bar{y}_i = y_i \quad \bar{z}_i = z_i \\ \dot{\bar{x}}_i = \dot{x}_i \quad \dot{\bar{y}}_i = \dot{y}_i \quad \dot{\bar{y}}_i = \dot{z}_i \end{cases}$$

代入(1.1.30)式，有 P = const. 故由(1.1.26)式，得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = P_x = \text{const.}$$

这表明系统的总动量在 x 轴上的分量守恒。

类似地，沿 y，z 轴方向的无穷小平移变换，分别可得系统总动量的 y 分量、z 分量都不变。一般空间平移变换下，有

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{n} (P_{ix}\boldsymbol{i} + P_{iy}\boldsymbol{j} + P_{iz}\boldsymbol{k}) = \text{常矢量}$$

由此可见，当空间平移变换为系统的对称变换时，系统将存在对应的动量守恒，即空间的均匀性导致系统的动量守恒。

(3)空间转动

坐标轴绕 y 轴转过无穷小角 $\delta\theta$ 的变换为

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x}_i = x_i + \delta\theta y_i \quad \bar{y}_i = y_i - \delta\theta x_i \quad \bar{z}_i = z_i \\ \dot{\bar{x}}_i = \dot{x}_i + \delta\theta \dot{y}_i \quad \dot{\bar{y}}_i = \dot{y}_i - \delta\theta \dot{x}_i \quad \dot{\bar{z}}_i = \dot{z}_i \end{cases}$$

代入(1.1.30)式，有 $P = 0$，故由(1.1.26)式有

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - y_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i p_{iy} - y_i p_{ix}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i)_y = \text{const.} \end{aligned}$$

表明系统总动量矩的 z 分量守恒。类似地，考虑绕 x 轴和 y 轴的无穷小转动，分别可得