高等教育试用教材

场　　论

马根和　主编
赵廷业　主审

原子能出版社

高等教育试用教材

场　　论

（初　版）

马根和　主编　　　赵廷业　主审
马根和
莫　撼　编

原子能出版社
北　京

内 容 简 介

本书全面系统地阐述了核辐射场、引力场、稳定电场、稳定磁场、时变电磁场、弹性波场、热力场等各类物理场的特征及分布规律，着重描述了每个场的数学物理意义，并附有相当数量的习题，是应用地球物理专业的基础课教材。

本书是为铀矿物探专业(本科)编写的教材，也可作为其他应用地球物理专业方面的教学参考书，并可供铀矿物探技术人员参考阅读。

☆ ☆ ☆

本书由赵廷业审校。经核工业总公司教育培训部铀矿地质与采矿教材委员会物探课程组于1993年8月由吴慧山主持召开的审稿会审定，同意作为高等教育试用教材。

图书在版编目(CIP)数据

场论/马根和主编. --北京:原子能出版社,1995.11 高等教育试用教材

ISBN 7-5022-1153-5

Ⅰ.场… Ⅱ.马… Ⅲ.场论-物理学-高等教育-教材 Ⅳ.O412.3

中国版本图书馆CIP数据核字(94)第01957号

原子能出版社出版 发行

责任编辑:李盈安

社址:北京市海淀区阜成路43号 邮政编码:100037

原子能出版社印刷厂印刷 新华书店经销

开本:787×1092mm1/16 印张23.25 字数580千字

1995年11月北京第1版 1995年11月北京第1次印刷

印数:1—700

定价:18.30**元**

前　言

本书是根据中国核工业总公司教育培训部于1991年9月在北京召开的核工业铀矿地质与采矿教材委员会会议的决议编写的。

当前，铀矿勘查工作正面临着“攻深、找盲”的艰巨任务。广泛采用新理论、新技术、新方法，加强物探方法与其他地质勘查方法的结合，开展综合物探方法找矿工作是完成上述任务的主要途径。

应用地球物理专业是个多学科的专业。场论是本专业的专业基础课。国内外曾出版过各种版本的教材，但是，到目前为止，国内还没有出版过完全适合放射性物探专业方面的场论教科书。本着“保持特色，拓宽专业，加强基础，注重能力”教改方向，根据专业教学大纲的要求，我们编写此书，作为一种尝试。

本书稿是在华东地质学院应用地球物理专业多年讲授此课程的讲稿基础上，几经修改而编写的。

全书共分八章。第一章数学基础，第二章核辐射场，第三章引力场，第四章稳定电场，第五章稳定磁场，第六章时变电磁场，第七章弹性波场，第八章热力场。马根和负责编写绪论和第二、三、七、八章，莫撼负责编写第一、四至六章，刘庆成收集和编写了第二章中第四节部分内容，由马根和负责全书统稿。

全书应讲授100学时。讲授时可根据专业学科方向和学生的具体情况取舍部分内容，但应保持全课程的完整性和系统性。

1993年8月，核工业总公司教育培训部铀矿地质与采矿教材委员会物探课程组在北京由吴慧山研究员主持召开了对本书的审稿会。参加会议的有程业勋教授、章晔教授、唐声喤研究员、李盈安高级工程师以及本书审校人赵廷业研究员。与会专家认真评议，给予本书充分的肯定，并提出了积极中肯的意见。在此谨对专家们表示衷心的感谢。

编写过程中，得到了诸多同行们的关心和支持。徐科讲师为编写“热力场”提供了宝贵意见。华东地质学院余达淦教授、张锦由教授、李瑞枝副教授、黎春华副教授、潘勤副研究员、龚育龄讲师审阅了初稿。李盈安高级工程师为本书的修改和润色付出了辛勤劳动，编者表示诚挚的感谢。

全书由方季青工程师负责清绘全部图件，并得到李学礼教授的热情关怀，在此一并表示谢意。

由于编者水平有限，书中错误和缺点在所难免，敬请专家和读者批评指正。

编　者

1993年12月

目　录

绪　论

一、场论在应用地球物理专业中的作用和地位

场论，顾名思义，就是研究各种物理场的运动规律及其相互作用的理论。铀矿体在其周围形成各种各样的人工的或天然的物理场，如核辐射场、引力场、电磁场、温度场、弹性波场等。人们利用不同的探测器观测和研究各种物理场的性质、特征和分布规律来达到找矿的目的。运用物理学的原理、方法和仪器以观测和研究地球物理场空间与时间的分布规律，借以实现地质勘查或寻查埋藏物的一门应用性科学，称之为应用地球物理学。目前，根据研究对象（地球物理场）的不同，又建立起六种物探方法。以核辐射场为基础的称为核勘查，以引力场为基础的称为重力勘查，以磁场为基础的称之为磁勘查，以电场和电磁感应场为基础的称为电勘查（包括电磁感应法），以弹性波场为基础的称之为地震勘查，而以地热场为基础的则称为地热测量法等。因此，研究场论就是为应用地球物理学打好理论基础。

场论是在学生已学完相应高等数学和物理学后继续学习的后续课程。它既是利用数学工具更为深入地进一步探讨各种地球物理场的性质及其时空分布规律的一门学科，又是各种应用地球物理方法的综合性理论基础。因此，场论是应用地球物理专业的专业基础课，起到承先启后的作用，处于十分重要的关键地位。

二、场的本质和场的概念的发展

早在几千年以前，人们就已发现电和磁的现象。经过长期的生产和生活实践，人们逐渐认识到，在客观世界所进行的一切物理、化学过程中，存在着某种物质客体。这种客观实体的存在是不以人们意志为转移的。这种物质客体的第一种存在形式如：物体、分子、原子、核子等。这样的客体一般来说比较容易看到或感觉到它们的存在。但是，物质客体还有第二种存在形式——场，人们就不太容易感觉它的存在。虽然人们早就谈论过引力场、电磁场这类名词，但深入认识它，把它作为物质客体的形式，还是近代的事。随着物理学的不断发展，尤其是近代物理学的崛起，场的物理性质越来越为人们所认识。场是物质的一种形态也成为大家的共识。

场的物质性为很多事例所说明。

例如它与物质客体第一种存在形式一样，具有一定的质量、能量和动量。物理学家早在本世纪就证明了光（电磁波）对固体和液体施加的压力。根据力学原理，压力（P）应等于施压客体（光）的动量（光质量与光速的乘积）改变，即

$$P = mc$$

又从电磁理论知道，光压力 P 的大小决定于下列公式

$$P = w/c$$

式中，w 表示单位时间射到完全吸收表面（绝对黑体表面）上的光通量的能量，于是

$$m = w/c^2,\quad mc = w/c,\quad mc^2 = w$$

这说明电磁场和其他物质形式一样，具有确定的质量m，动量mc，能量mc^2。这也间接说明了为什么对讲机可以在几十公里以外听到对方的声音，那是因为电磁波这种物质可以脱离发射端以波动形式传向接收端所致。

场和其他物质一样，服从质量守恒及转换定律、能量守恒及转换定律和动量守恒及转换定律。

在一定条件下，物质客体的第一种存在形式可以结合或分解产生物质客体的第二种存在形式 —— 场。如正电子与负电子结合可以产生γ射线(场)。一种场也可以转换为另一种场，如电场可以转换为磁场等。

但是，我们也应注意到场作为物质客体的一种形态，它也必然具有与物质客体另一种形态 —— 例如实物不同的特点。例如，实物在空间占有一个固定位置，在空间的其他地方它不存在，即是说实物在空间的分布是有限的，不连续的，而场在空间的分布是无限的，连续的。又如实物占有的空间不可能被其他实物所占有，而场则不同，在同一空间可以存在各种不同的场。在引力场空间，电磁场照样可以渗透，并且互不影响，互不干扰。场还能渗透到实物占有的空间之中。此时场可能改变实物的状态，而实物也可能影响场的分布。例如，当一质点放在引力场中，引力场将会对此质点产生引力，从而改变质点的状态，而质点也改变了引力场的整体分布。

还应特别注意的是，场的存在是以某种确定关系与场中存在的实物的某种性质紧密联系着。例如，引力场之所以存在，就因为空间存在着实物的引力质量的分界面；静电场的存在是因为实物所带电荷的分布；电流磁场的存在是因为实物中存在电流分布；静磁场的存在是因为空间存在磁性体的缘故；弹性波场的存在是因为空间存在爆炸体的缘故；热力场的存在是因为空间存在着实物的温度分布。因此，我们把具有这些物质(质量、电荷、电流、磁荷、爆炸体、温度体)的实物称作场源。场和场源没有主从之分，而是同时并存于空间的两种不同形态的物质。

场和场源之间关系是场论研究的主要课题。经过长期生产和生活实践以及不懈的科学实验，人们已总结出不少场和场源关系的基本定律。例如万有引力定律、库仑定律、安培定律、电磁感应定律、放射性衰变规律等。从场源在空间的分布，我们可以根据这些基本定律求出相应的场在空间分布规律。反之，我们也可以根据场的空间分布规律(或特征)反演场源在空间分布的特征(如矿体的埋深、形状、密度、体积，甚至矿体含量等)。

与场的物质性紧密相连的，还有场的作用的近距特点。

早先，不少科学家认为，质量或电荷的相互作用是一种超距性质的作用，不需要借助中介空间的任何作用。例如，在麦克斯韦以前，人们已经得出库仑定律和安培定律，进而推断：电荷与电荷或电流与电流之间的作用的传递毋须借助于任何物质和不需要时间，即传递速度无限大。显然这是错误的。麦克斯韦的卓越贡献之一，就在于他总结出电磁场的运动方程组。它揭示了电磁场传播速度是有限的，传播速度等于光速c。从而说明传播是需要时间的，场源的影响需要经历r/c(r — 距场源距离)那么一段时间后，才能到达观察点。我们夜晚观察到的星光，白天看到的太阳光决不是此时此刻的星光或太阳光，它们都是在r/c之前发生的。因此，库仑定律、安培定律只能在稳定场中适用，而在交变电磁场中，只有用麦克斯韦方程组才能解决各种各样的问题。

综上所述，场是物质的一种形态，它与物质的另一种存在形式同时存在，并相互紧密关连着。场又与另一种物质形式各自具有不同的特性，但在一定条件下又能互相转换的物质。这就是宏观场的本质。

到目前为止，宏观场论已发展到相当完善的地步，它的各门学科和各种技术上，尤其在应用地球物理学领域中得到了广泛的应用。

20世纪中叶，随着近代物理学研究的深入及生产实践的需要，特别是核技术应用的突飞猛进的发展，场的概念和场的理论研究领域也在不断扩展。

70年代末，核技术在国民经济各个领域得到了广泛的利用。尤其是人工放射性勘查方法已引起人们广泛的重视。多年来生产实践的证明，这种新理论、新技术、新方法有着广阔的发展前景。有些院校的应用地球物理专业（本科）已把“核勘查”作为必修课列入教学计划。因此，传统的宏观场论已满足不了当前形势发展需要。“场论”不仅要研究引力场、电磁场等这样一些宏观的理论，还应补充如核力场等微观场的内容。

就场的概念而言，也在不断扩展。现在，人们根据生产实践的需要，已逐渐把某种元素在时空间扩散分布也称之为场。例如放射性元素氡及其子体在时空间的分布称之为射气场，研究其分布规律及性质的学科称为射气场论。显然，这种场与上述的场（如引力场）具有不同的特征。它们共同之处在于都存在时空间的分布，相异之处是两种不同物质客体存在形式。因此，它们的分布规律也不一样，从而研究它们的方法也不一样。

三、“本书”的主要内容

本书是应用地球物理（铀矿物探专业方向）本科专业的专用教材，也可作为其他从事于物探专业的教师、技术人员的参考书。为使读者对本书有一个大致的了解，现将本书的主要内容简介如下。

本书共分八章。

1. 数学基础

本章先从矢场分析讲起，阐明物理场中标量和矢量的作用，从而刻画标量场的空间变化率，以及矢量场的聚散程度和涡旋特征的三个基本概念——梯度、散度、旋度的数学和物理意义，并揭示它们内在联系——高斯公式和斯托克公式的表达形式。

本章的第二部分将向读者介绍几个常见方程——拉普拉斯方程、亥姆霍兹方程的解，并扼要阐明勒让德函数、贝塞尔函数及富里哀函数的基本性质及物理意义。这些概念和公式都是研究地球物理场的有效工具。读者可根据需要选读其中的内容，教师可以根据学生的数学水平选取某些段节作为授课之用。

2. 核辐射场

本章从核物理学的基本概念出发，扼要地阐述了 α 衰变、β 衰变、γ 衰变的基本规律。并重点介绍了 α,β,γ 三种射线与物质的相互作用的特征。

本章第二部分着重介绍了 γ 场理论。较详细地介绍了 γ 射线在空间的分布规律和特征。并向读者展示了描写 γ 场的特殊函数——金格函数、F 函数、G 函数及 U 函数。放射性元素产生的放射性氡以各种运移方式向周围空间散布而形成射气场。本章探讨了辐射场的分布规律及其计算方法。这一部分还向读者介绍了微观物理场——核力介子场的简单理论及X射线的基本知识，以便为读者学习“核勘查”打下理论基础。

3. 引力场

本章从万有引力定律出发，描述了分布质量的引力公式。证明引力场为无旋有源场。引进了引力位的概念，介绍了引力位的基本特征及其与引力场强的关系，阐明了拉普拉斯方程和泊

松方程的定解条件。

本章第二部分介绍了重力场的概念,说明重力场为非调和场,重力位函数为非调和函数。最后介绍了重力异常的概念。

4. 稳定电场和稳定磁场

本书的第四章和第五章首先从稳定电磁场的基本知识出发,阐明库仑定律、安培定律、法拉弟定律的概念,然后介绍稳定电场和稳定磁场的基本方程,并给出这些方程的定解条件。

本部分重点介绍了电势与磁势的性质,它们的聚散、涡旋特征。为磁勘查和直流电勘查打下理论基础。

最后,本部分还介绍了磁势与引力位的关系,引出了泊松体的概念,为重磁数据处理补充了一部分理论基础。

5. 时变电磁场

本章着重介绍了时变电磁场的性质。详述了麦克斯韦方程组的积分形式和微分形式,并介绍了电磁波动方程及它们求解的定解条件,为交流电勘查(及磁电法)打下良好的数理基础。

6. 弹性波场

本章从弹性体的基本特征出发,简单扼要介绍了应力、应变及弹性常数的基本概念。重点介绍了弹性波波动方程,以及方程的求解的定解条件。阐明体波、面波、表面波的概念,波的传播、转换在不同介质中的特点。为读者学习地震勘查创造条件。

7. 热力场

本章从热力学的基本定律和概念出发,介绍了热力场的传播规律。重点阐明了热传导方程及其求解的定解条件,热对流方程和热辐射方程的建立和求解。从而为读者学习地热测量作好准备。

第一章　数学基础

第一节　矢场分析

一、矢函数及其运算

矢场分析是场论中最基本的数学工具之一。在研究物理场时，通常把仅有坐标变量(x,y,z)和时间变量(t)所唯一确定的量称为标量，并以标函数$\varphi=\varphi(x,y,z,t)$来表示。例如温度$T=T(x,y,z,t)$；密度$\rho=\rho(x,y,z,t)$等都是标量函数，它们的定义域称为标量场，例如温度场，密度场等。

有些物理场不随时间而变化，这种场称为稳定场，例如引力场、静电场、静磁场就属于稳定场。另一些物理场与时间有关，例如变速场，时变电磁场等，称之为时变场。

如果物理量的大小(强弱)以及方向均与坐标变量无关，则由它组成的物理场称为均匀场。虽然绝对的稳定场和均匀场并不存在，但为了研究方便，常把在某一时间区间和空间范围内变化不大的场视作稳定场和均匀场。

有些物理场不能用标函数描述，如速度场，只知道场中各点的速度数值是不够的，还必须知道各点速度的方向。因此引入矢函数的概念。

1. 矢函数的定义

定义：如果在域Ω内对每一个数性变量q，矢量$\boldsymbol{a}$总有一确定的值(包括其大小和方向)和它对应，则称矢量$\boldsymbol{a}$是数性变量q的矢函数，记为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(q)\in\Omega \tag{1.1}$$

式中，Ω为矢函数$\boldsymbol{a}$的定义域。

数性变量q可以是坐标变量也可以是时间变量，或兼而有之。例如在研究静电场时，电场强度$\boldsymbol{E}$就是坐标变量的矢函数，而在研究时变电磁场时，电场强度$\boldsymbol{E}$就不仅是坐标变量，而且也是时间变量的矢函数。在本章中，除非特别声明，矢函数仅是坐标变量的函数。

矢函数$\boldsymbol{a}$可以在任何坐标系中进行分解，例如在直角坐标系中就有

$$\boldsymbol{a}(q)=a_x(q)\boldsymbol{i}+a_y(q)\boldsymbol{j}+a_z(q)\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

式中，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$为直角坐标系三个坐标轴($x$轴、$y$轴、$z$轴)方向的单位矢量。

2. 矢函数的运算

对矢函数可以进行求导与微分。若矢函数$\boldsymbol{a}(q)$在域Ω内连续，并且q_0和$(q_0+\Delta q)$都在域内，则极限

$$\lim_{\Delta q\to0}\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\Delta q}=\lim_{\Delta q\to0}\frac{\boldsymbol{a}(q_0+\Delta q)-\boldsymbol{a}(q_0)}{\Delta q} \tag{1.3}$$

如果存在，则称$\boldsymbol{a}(q)$在q_0是可导的。该极限就称为$\boldsymbol{a}(q)$在q_0的导数，用$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}q}\right)_{q_0}$或$\boldsymbol{a}'(q_0)$表示。显然，矢函数的导数仍为一矢量，并且

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}q}=\frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}q}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}q}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}q}\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

类似地，可以定义矢函数的二阶、三阶导数。

可以用一个质点在曲线上的位移这一常见的物理现象来说明矢量导数的几何意义和物理意义(图 1.1)：

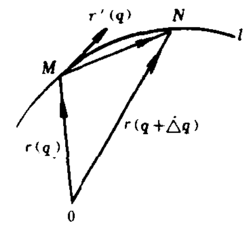

图 1.1 矢量导数的计算

显然，矢径 $\boldsymbol{r}(q)$ 是质点坐标位置的函数，这里 q 表示质点的坐标变量。设曲线 l 上 M 点坐标变量为 q，N 点坐标变量为 $(q+\Delta q)$，由图 1.1 可知，矢线 $\boldsymbol{MN}$ 可表示为

$$\boldsymbol{MN}=\boldsymbol{r}(q+\Delta q)-\boldsymbol{r}(q)$$

两边除以 Δq，并令 $\Delta q\to 0$，取极限，便有

$$\boldsymbol{r}'(q)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\boldsymbol{MN}}{\Delta q}=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(q+\Delta q)-\boldsymbol{r}(q)}{\Delta q}$$

这时 $\boldsymbol{MN}$ 与过 M 点的切线方向相同，并指向坐标变量增加方向。因为 $\boldsymbol{r}'(q)$ 表示在 M 点上矢径 $\boldsymbol{r}(q)$ 对坐标变量的变化率，方向沿 M 点切线。

在上述例子中，q 也可以是时间变量，这时 $\dfrac{\boldsymbol{MN}}{\Delta q}$ 就表示在时间间隔 Δq 内质点位移的平均速度。事实上 q 通常既是坐标变量又是时间变量，这时 $\boldsymbol{r}'(q)$ 表示 M 点在 q 时刻的速度，其方向沿 M 点的切线方向。

矢量微分定义为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)=\boldsymbol{a}'(q)\mathrm{d}q \tag{1.5}$$

同样，矢量微分也可以用其分量微分来表示：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)=\mathrm{d}a_x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}a_y\boldsymbol{j}+\mathrm{d}a_z\boldsymbol{k} \tag{1.6}$$

如果矢函数 $\boldsymbol{a}(q)$，$\boldsymbol{b}(q)$ 和标函数 $\varphi(q)$ 都可导，则有下列微分法则成立：

$$[\boldsymbol{a}(q)+\boldsymbol{b}(q)]'=\boldsymbol{a}'(q)+\boldsymbol{b}'(q) \tag{1.7}$$

$$[\varphi(q)\boldsymbol{a}(q)]'=\varphi'(q)\boldsymbol{a}(q)+\varphi(q)\boldsymbol{a}'(q) \tag{1.8}$$

$$[\boldsymbol{a}(q)\cdot\boldsymbol{b}(q)]'=\boldsymbol{a}'(q)\cdot\boldsymbol{b}(q)+\boldsymbol{a}(q)\cdot\boldsymbol{b}'(q) \tag{1.9}$$

$$[\boldsymbol{a}(q)\times\boldsymbol{b}(q)]'=\boldsymbol{a}'(q)\times\boldsymbol{b}(q)+\boldsymbol{a}(q)\times\boldsymbol{b}'(q) \tag{1.10}$$

同时还有 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}(q)}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{1.11}$$

其中，$q=q(t)$ 为中间变量。

矢函数不仅可以求导，也可以求积：

$$\int\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q=\boldsymbol{i}\int a_x(q)\mathrm{d}q+\boldsymbol{j}\int a_y(q)\mathrm{d}q+\boldsymbol{k}\int a_z(q)\mathrm{d}q \tag{1.12}$$

$$\int\lambda\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q=\lambda\int\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q \tag{1.13}$$

$$\int[\boldsymbol{a}(q)+\boldsymbol{b}(q)]\mathrm{d}q=\int\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q+\int\boldsymbol{b}(q)\mathrm{d}q \tag{1.14}$$

$$\int\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q=\boldsymbol{c}\cdot\int\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q \tag{1.15}$$

$$\int[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q=\boldsymbol{c}\times\int\boldsymbol{a}(q)\mathrm{d}q \tag{1.16}$$

式中，λ 为常数，$\boldsymbol{c}$ 为常矢量。

例 1　一质点沿半径为 a 的螺线作匀速线运动，螺线方程为 $\boldsymbol{r}=a\cos\theta\boldsymbol{i}+a\sin\theta\boldsymbol{j}+b\theta\boldsymbol{k}(-\infty<\theta<\infty)$，求运动质点的速度和加速度。

解： $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\cdot\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

式中，$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\theta}=-a\sin\theta\boldsymbol{i}+a\cos\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$，　$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$，　$\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

于是　$$\boldsymbol{v}=\frac{v}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot(-a\sin\theta\boldsymbol{i}+a\cos\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k})$$

加速度为

$$\boldsymbol{w}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{v^2}{a^2+b^2}(-\cos\theta\boldsymbol{i}-a\sin\theta\boldsymbol{j})$$
$$=\frac{-av^2}{a^2+b^2}(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j})$$

二、方向导数与梯度

一个标量场通常可以表示为空间坐标的函数，除均匀场外，场中任意两点的标函数值一般是不相同的。因此，要想了解标量场的空间分布，就必须知道场域内任一点标函数沿各个方向的变化率。这个问题，在数学上归纳为求该函数的方向导数。在许多情况下，还必须知道标函数沿那个方向的变化率是最大值？这个问题，在数学就是求该标函数的梯度。

1. 方向导数

定义：设标函数 $\varphi(x,y,z)$ 在域 Ω 上连续，M 为域内任一点，过 M 点作一任意有向曲线 $\boldsymbol{l}$，曲线上 M，N 两点的弧长为 Δl，若极限 $\lim\limits_{\Delta l\to0}\dfrac{\varphi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta l}=\lim\limits_{\Delta l\to0}\dfrac{\Delta\varphi(x,y,z)}{\Delta l}$ 存在，则称此极限为标函数 $\varphi(x,y,z)$ 在 M 点沿曲线 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数。以 $\dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial l}$ 表示。因此，

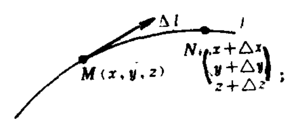

图 1.2　方向导数的计算

$$\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial l}=\lim_{\Delta l\to0}\frac{\Delta\varphi(x,y,z)}{\Delta l}\tag{1.17}$$

式中，$\Delta\varphi=\varphi(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-\varphi(x,y,z)$ 为 M 点上标函数沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的增量。

标函数在域中某点沿不同方向的方向导数一般是不同的。如果沿 $\boldsymbol{l}$ 方向函数 $\varphi(x,y,z)$ 是增加的，则其方向导数为正，反之为负，若沿该方向函数值不变，则其方向导数为零。例如由正点电荷 q 所形成的电位场，沿图 1.3 中 $\boldsymbol{l}_1$ 方向的方向导数为负，因为沿此方向电位下降，而沿 $\boldsymbol{l}_2$ 方向的方向导数则为正，沿 $\boldsymbol{l}_3$ 方向的方向导数为零。

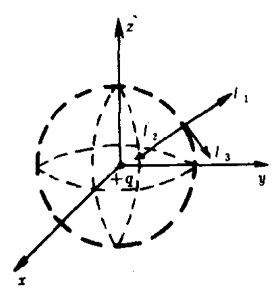

图 1.3　不同方向的方向导数

在直角坐标系中，沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数可按下式计算

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma\tag{1.18}$$

式中，$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的三个方向余弦。

(1.18) 式证明如下：