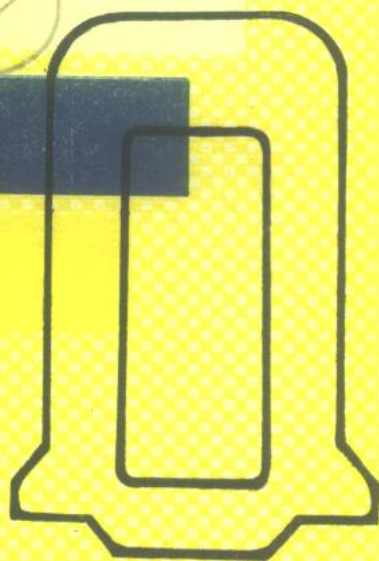


Л. Д. Савченко 等 著 施元鼎 栾绍钧 张梦仙 译



冶金机械零件 强度计算

冶金工业出版社

冶金机械零件 强度计算

И.И.索柯洛夫等 著
施元鼎 栾绍钧 张梦仙 译

冶金工业出版社

内 容 简 介

本书根据蠕变和疲劳的物理概念，研究了冶金机械零件的静力、耐久和疲劳强度的现代计算方法。并以此进行了炼铁、炼钢及轧钢车间机械设备零件（高炉大钟杆，法兰连接，装料机零件，惯性振动筛，炼钢车间主、辅设备及轧钢机主机列机架与零件）的计算。

本书可供从事冶金机械设计和生产的科技人员使用，也可供机械制造和冶金专业的研究生、大学生参考。

《РАСЧЕТЫ ДЕТАЛЕЙ МЕТАЛЛУРГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ》

МЕТАЛЛУРГИЯ-МОСКВА 1983

冶金机械零件强度计算

Л.Д.索柯洛夫等 著

施元鼎 栾绍钧 张梦仙 译

责任编辑 乔治

*

冶金工业出版社出版

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店北京发行所发行

冶金工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32印张 6 5/8 字数 171 千字

1988年2月第一版 1988年2月第一次印刷

印数00,001~4,500册

ISBN 7-5024-0142-3

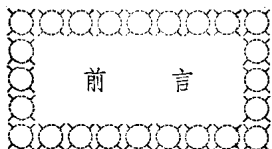
TF·49 定价1.90元

译 者 的 话

目前我国在冶金机械设计的强度计算方面基本上仍沿用材料力学的一些传统计算方法，而较精确的现代强度计算及疲劳强度设计方法远未普及，因此设计出的设备一方面比较笨重，另一方面还经常发生疲劳破坏事故。为了提高我国冶金机械的先进性和可靠性，延长设备及其零件的使用寿命，迫切需要采用更精确的静强度计算方法，并由静强度设计向疲劳强度设计过渡。

本书除简要介绍差分法静强度分析、蠕变和疲劳强度理论外，对冶金机械的一些主要零件做了疲劳强度计算。本书可供在设计新设备进行强度计算及检验旧设备的潜力时参考。

本书的翻译过程也是译者的学习过程，译者试图使译文尽量忠于原文，有不当之处敬请读者批评指正。



前 言

近年来，各部门对依靠技术改造及运用新工艺来最大限度地利用现有设备潜力和提高设备的生产率十分重视。

这一重大工作虽在冶金生产中早已进行，但现今由于科学技术的进步而更具有特殊意义。

在机械运行中由于各种原因可能产生故障，为揭示和消除这些故障必须全面和专门研究每个单独零件、部件以及整台装置。

对苏联许多工厂的冶金设备强度潜力的调查表明，事故的发生不仅仅是因为违反工艺规范及安装工艺，而主要是因为设备过载，甚至在按章操作时也会发生过载。有些锻锤及锤身发生断裂，经检查表明：按普通钢的工艺规程锻造合金钢及高合金钢是造成锻锤过载的原因。为了避免事故就必须制订新的规程。

轧钢机连接零件和机架的损坏都是由于轧制强度增加而机架强度不够所造成的。应注意，在验算时如疲劳强度安全系数小于1，这并不意味着零件会立即损坏，而零件将在载荷循环次数小于所谓基本循环次数(例如一百万次)时损坏，而从外表看裂纹是完全突然产生的。所以必须定期检查设备的疲劳强度。

许多高炉的事故是由于增大炉顶压力所造成的，如大钟杆拉断，其断裂的基本原因在于大、小钟杆密封不良而落入灰尘以致造成钟杆磨损；另一个原因在于斜楔及螺栓连接处产生蠕变，造成连接不正常及钟罩倾斜而使大钟杆弯曲。为此，在改变操作制度时要求检查密封并验算蠕变强度。

有时惯性振动筛的偏心轴和弹簧会损坏。经检查表明：轴的自振频率与来自电机激振力频率相近而发生共振。这种现象也发生在某些弹簧上，虽然其自振频率很低，但在起动及制动的特定时刻将与变化着的激振频率重合。为了避免这些事故，需改变电机转动速度，为获得非线性振动系统则需要装设附加弹簧。

在其它一些地方的振动也往往不被注意，例如共振会致使吊车桁架结构各部件和滚动轴承很快磨损。

在许多工厂，蠕变现象使一些既受力又受高温作用的零件和

结构发生变形，属于这一类零件和结构的有：混铁炉、电炉、高炉炉壳、平炉钢结构承压梁、蒸气及气体管道的法兰连接件、热风阀等。

人们一般不大注意蠕变，但在许多情况下蠕变不仅仅破坏设备的正常使用，而且造成不幸事故，因此必须进行预防性检查并拧紧连接件。

在许多所调查的工厂里发现轧辊、辊道的辊子、锯片、减速机零件的大量磨损造成了它们的早期损坏。经检查表明：在大多数情况下，所用零件均没有进行相应的化学热处理。已充分证明，齿轮啮合面和轧辊采用表面淬火后，其磨损程度可大大降低。

初轧机的剪断机刀架在正常使用中发生断裂，分析表明刀架存在着典型的疲劳裂纹，在这种情况下必须及时检验剪断机刀架的强度。

轧机牌坊一般在压下螺母孔处损坏，但有时也发现立柱断裂，该处却是强度安全系数较大的部位。

以上列举的例子还远不能详尽地包罗所有已发现的设备故障。

可见，为了使设备能正常使用，不仅要执行生产或工艺规程，而且在许多情况下需要重新修订规程，但后者只有当考虑到温度、速度、作用力等参数不断增长，在全面研究冶金机械强度潜力的情况下才能实现。

本书以作者所进行的或曾参加的试验、计算及理论研究著作为基础。

第三章由Г.П.古斯列娅科娃(Гуслякова)一人所写，其余章节为几位作者合著。

作者仅向提出一系列极珍贵意见的审校者、工程技术副博士В.В.斯米尔诺夫(Смирнов)致以深切感谢。

目 录

前言

第一章 用弹性力学方法确定冶金机械基件的静应力和位移	1
一、基本解析式.....	1
二、差分法(网格法)概念——框架比拟.....	5
三、用网格法计算基件的补充概念.....	12
四、多联域的计算.....	13
五、网格法求解轴扭转问题.....	14
六、用网格法计算变断面形状的零件.....	16
七、大型带孔零件(厚板)的精确计算方法.....	24
八、确定冶金机械基件的变形.....	28
第二章 蠕变	33
一、非稳定蠕变.....	34
二、稳定蠕变.....	36
三、合金的蠕变.....	42
四、蠕变断裂.....	43
第三章 金属和合金在循环载荷作用下的变化规律	46
一、准静态破坏.....	47
二、低周疲劳.....	47
三、高周疲劳.....	53
四、疲劳过程中组织变化.....	54
五、疲劳裂纹的增长速度.....	56
六、温度影响.....	59
七、预变形的影响.....	60
第四章 炼铁车间设备	68
一、大钟杆的蠕变和疲劳计算.....	69

二、法兰联接螺栓计算	73
三、布料器支承辊接触疲劳强度计算	76
四、按振动载荷计算惯性振动筛零件	77
第五章 炼钢车间主、辅设备零件的应力计算	80
一、热应力	80
1. 转炉托圈计算	87
2. 各种联接情况下的零件热应力计算	87
二、废铁场设备基件应力状态的分析	93
1. 开口剪断机的机架强度计算	94
2. 压力机底座计算	97
3. 锻锤零件强度分析	103
第六章 轧机零件强度潜力的研究	121
一、轧机机架	121
1. 疲劳强度计算	145
2. 270轧机精轧机列的机架应力状态研究	165
3. 270精轧机座零件的弹性变形研究	170
二、计算轧机零件的实际安全系数	174
1. 主接轴工况分析	174
2. 冶金机械零件疲劳强度的补充资料	176
三、万能轧机 600/500/600 主机列和三辊机座零件强度潜力的研究	177
1. 万能轧机的机架计算	181
2. 压下装置	185
3. 水平工作辊	186
4. 立辊	187
5. 立辊的传动接轴	188
6. 立辊传动接轴的联轴器	189
7. 立辊调整机构	190
8. 梅花接轴和安全联轴器的计算	191
参考文献	199

第一章 用弹性力学方法确定冶金机械 基件的静应力和位移

冶金机械设计中需要经常计算那些在使用中不更换的大型零件(基件),例如轧机及压力机的机架、铸造框架、横梁、炼铁及炼钢机械中承受集中或均布载荷的构件等等。在尺寸比例上,这些零件大多不符合材料力学中的杆件概念。如果弹性件的高与长之比大于 $1/4$ 时,按材料力学的基本假设就得不出满意的结果,这些假设只适用于有足够长度的杆件。

计算基件往往没有现成的公式和图表,即实际上没有严格的解题方法。然而承载大是冶金机械工作的一个特点,因此有必要不断地完善现有计算方法。

如今一些研究、设计单位及工厂(全苏冶金机械科学研究院、中央黑色冶金科学研究院、中央工艺与机械制造科学研究院、乌拉尔重机厂、新克拉马托尔斯克厂等)对这些问题都给予很大的重视。近年来对发展近似计算和数值计算方法做了大量研究工作,这些方法在计算复杂零件时是唯一可行的。

与其它工业部门的机械相比,冶金机械在结构和工作条件方面都是最复杂的,它在极其繁重的条件下工作,承受重载和高温。

设计经验表明,当进行强度计算时必须谨慎地选择零件形状和材质以及分析其工艺操作制度。冶金机械零件的尺寸和重量是如此之大,以致稍微增大其强度安全系数就要造成消耗大量金属材料,因此最佳解决办法应在降低其重量的同时保持或者改善零件应有的强度和刚度,并提高生产率。

一、基本解析式

在研究冶金机械零件的应力状态和计算其强度时,可将其看

成弹性力学的平面问题。在文献[1、2等]中这些原则已叙述得相当详细，在本章中只简单说明基本解析式。

1. 平面应力状态

假如一个基件或它的某部分沿周边承受一定载荷，该载荷沿厚度方向均布，则在零件表面的应力分量 σ_x 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} 等于零，同时认为它们在零件内部也等于零。在此情况下，应力状态将仅由分量 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 来决定，而且沿零件厚度不变（与 z 无关）^[2]。在弹性力学中这种假定称之为平面应力状态。

2. 平面变形

同理，上述假定也可用于在 z 轴方向尺寸很大的零件，此时可以认为所有横断面都处于相同条件（伯努利假说）。采用这种假定可以研究由间距为1的两个横断面之间的薄层，其位移分量 u 及 v 是 x 和 y 的函数而与 z 无关。取 ε 为相对伸长， γ 为相对剪切变形，则可写出变形分量表达式：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

在纵向位移 w 等于零的条件下表达式1-1写成：

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

纵向正应力 σ_z 可按胡克定律通过 σ_x 与 σ_y ，借助于变形分量的已知公式来表示^[1]：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} (1-3)$$

式中 E ——材料弹性模数；

μ ——泊桑系数。

当 $\varepsilon_z = 0$ 时，作用在零件各断面上的正应力：

$$\sigma_x - \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

或
$$\sigma_x = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (1-4)$$

应力分量 τ_{xz} 及 τ_{yz} 等于零，而应力 σ_x 在已知 σ_x 及 σ_y 时由公式 1-4 确定，即平面变形问题同样也归结于求应力分量 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} — x 和 y 的函数。

3. 边界条件

在零件实体内部，应力分量是变化的，应力达到零件边界后应与作用在周边上的外力相平衡，因此以后可把外力看成内应力的继续。

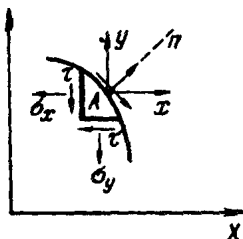


图 1-1 确定边界条件

现分析一个其外形由曲线或斜线构成的弹性体（零件）（图 1-1）。当沿着这样的弹性体周边划分区段时，必然要产生三角形单元，而外载荷应与作用在三角形单元水平与垂直边上的力相平衡。以 \bar{X} 和 \bar{Y} 表示作用在 A 点单位面积上的表面力分量，则可写出在轮廓上外载与应力的相关条件：

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x \cos n x + \tau_{yx} \cos n y \\ \bar{Y} &= \sigma_y \cos n y + \tau_{xy} \cos n x \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

式中 $\cos n x$ 、 $\cos n y$ ——周边法线 n 的方向余弦。

方程1-5称为边界（周边）条件。

在工程上很多零件的侧面可能平行于 x 和 y 轴。例如，若零件的一边与 x 轴平行，则这部分周边的法线 n 将平行于 y 轴。当 $\cos n x = 0$ 、 $\cos n y = 1$ 时，公式1-5 则变成 $\bar{x} = \pm \tau_{xy}$ ， $\bar{y} = \pm \sigma_y$ 。所得的表达式是上述所讨论的一种特殊情况。

4. 应力函数

通常，当任一物体（零件）的自重看作体积力时，可写出如下方程〔1〕：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \rho g &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

$$\left. \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \right\} \quad (1-7)$$

式中 ρ ——物体单位体积质量；

g ——重力加速度。

向方程1-6和1-7追加边界条件式1-5。

由弹性力学得知，当引入某一与应力分量相关的函数 $\varphi(x, y)$ 时，方程1-6满足下式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

函数 φ 称为应力函数^①，方程组1-6可以有很多解，但满足方程组1-7的解才是真正的解。将表达式1-8代入方程式1-7中可以看出，应力函数 φ 满足下式：

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad (1-9)$$

这样，问题就归结为解一个四阶偏微分方程式，该方程满足边界条件式1-5。这个方程式称为双调和方程^②。

方程式1-9可直接用积分来求解，但却出现难以全面求解的任意常数。

在这种情况下，可选取一个满足方程式1-9和边界条件式1-5的应力函数 φ ，以获得应力关系式，并算出在弹性体内已知坐标的任一点的应力。为此我们利用差分原理，用差分率取代方程式1-9中的导数。这样把解一个微分方程变成求解一组线性代数方程组。

二、差分法（网格法）概念——框架比拟

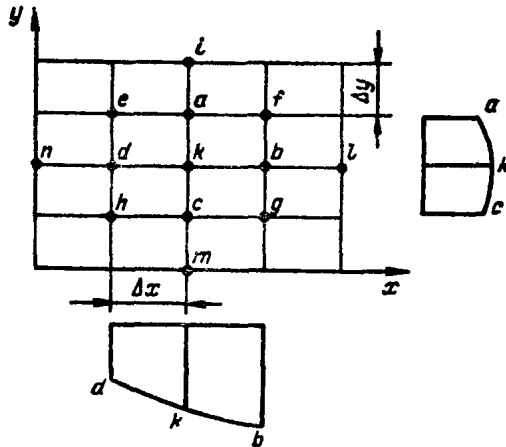


图 1-2 差分法的概念（点 a 、 b 、 c 与函数 φ_a 、 φ_b 、 φ_c 对应）

① 1861年由英国天文学家埃里首先提出，因之常称埃里函数。

② 方程 $(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\varphi = 0$ 或 $\Delta\varphi = 0$ 称为调和方程。取拉氏二次算子可获得双调和方程 $\Delta\Delta\varphi = 0$ 。

1. 基本方程

众所周知，任何曲线的一小段都可看成抛物线。按步长为 Δx 和 Δy 的等分段划分函数 $\varphi = f(x, y)$ 的积分区域，分割直线应平行于坐标轴。用抛物线代替曲线对应于矩形网格的三点 d 、 k 、 b (图1-2)。

此抛物线写成如下方程：

$$\varphi = \frac{\varphi_d - 2\varphi_k + \varphi_b}{2\Delta x^2} x^2 + \frac{\varphi_d - \varphi_b}{2\Delta x} x + \varphi_k$$

当 $x=0$ 时，点 k 的一阶及二阶导数确定如下：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_d - \varphi_b}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi_d - 2\varphi_k + \varphi_b}{\Delta x^2}$$

由上式可知，函数的导数用差分量代替。同理，通过 c 、 k 、 a 点的函数可写出如下形式：

$$\varphi = \left(\frac{\varphi_c - 2\varphi_k + \varphi_a}{2\Delta y^2} \right) y^2 + \left(\frac{\varphi_c + \varphi_a}{2\Delta y} \right) y + \varphi_k$$

其导数

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_c - \varphi_a}{2\Delta y}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi_c - 2\varphi_k - \varphi_a}{\Delta y^2}$$

用类似方法在二阶微分曲线的基础上获得四阶导数的差分表达式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} &= \frac{(\partial^2 \varphi / \partial x^2)_c - 2(\partial^2 \varphi / \partial x^2)_k + (\partial^2 \varphi / \partial x^2)_a}{\Delta x^2} \\ &= \frac{\frac{\varphi_m - 2\varphi_c + \varphi_k}{\Delta x^2} - 2 \frac{\varphi_c - 2\varphi_k + \varphi_a}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_k - 2\varphi_a + \varphi_i}{\Delta x^2}}{\Delta x^2} \\ &= \frac{6\varphi_k - 4\varphi_c - 4\varphi_a + \varphi_m + \varphi_i}{\Delta x^4} \end{aligned} \quad (1-10)$$

同理类推获得函数 φ 的下列四阶导数:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \frac{6\varphi_k - 4\varphi_d - 4\varphi_b + \varphi_l + \varphi_n}{\Delta y^4} \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{4\varphi_k - 2\varphi_d - 2\varphi_b - 2\varphi_c - 2\varphi_a + \varphi_h + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_e}{\Delta x^2 \Delta y^2} \quad (1-12)$$

将式1-10~1-12代入基本微分程式1-9中, 并取 $\Delta y^2/\Delta x^2 = \alpha_1$, 可得一个十三元差分方程式:

$$\begin{aligned} \varphi_k(6\alpha_1^2 + 8\alpha_1 + 6) - 4(\varphi_a + \alpha_1\varphi_b + \varphi_c + \alpha_1\varphi_d)(\alpha_1 + 1) \\ + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h)\alpha_1 \\ + (\varphi_i + \varphi_l\alpha_1^2 + \varphi_m + \varphi_n\alpha_1^2) = 0 \end{aligned} \quad (1-13)$$

对于方形网格, 当 $\Delta x = \Delta y$ 时, 方程式1-13则简化为下式:

$$\begin{aligned} 20\varphi_k - 8(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_g + \varphi_h) \\ + (\varphi_i + \varphi_l + \varphi_m + \varphi_n) = 0 \end{aligned} \quad (1-14)$$

在近似域内的所有各点对于方程式1-13或1-14均成立, 此时网格的每一点都以十二元差分方程与其邻接点联系在一起, 最后得出一组线性代数方程组, 问题也就归结于求解此线性方程组。这样的方程组可列表^①。

由于求得上述方程组, 则可确定近似域内所有各点的应力函数 φ 值。进一步借助于二阶导数的差分, 可写出各点应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 的公式。例如对于 k 点 (见图1-2) 的表达式:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_c + \varphi_d}{\Delta y^2} \quad (1-15)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{-2\varphi_k + \varphi_a + \varphi_b}{\Delta x^2} \quad (1-16)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{-\varphi_e - \varphi_f + \varphi_g - \varphi_h}{4\Delta x \Delta y} \quad (1-17)$$

① 将在以后计算各种零件的章节中列出各表。

研究者们可能还想了解 σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 的主应力。根据材料力学理论，这些应力由下式确定：

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

应力 $\sigma_{\max/\min}$ 分别作用于两个平面上，其一平面的法线与 y 轴成 α 角， α 角由表达式 $\tan 2\alpha = -2\tau_{xy}/(\sigma_y - \sigma_x)$ 确定。

当建立方程式1-13和1-14时，必须代入周边上各点和离周边线最近点的函数 φ 值，这些点包括 h 、 d 、 e 、 a 、 f 、 b 、 g 、 c （见图1-2）。根据边界条件周边上各点的函数值是已知的，而靠近边界各点的函数值则可采用外推法公式求出^[3]，这些公式可由已知的导数表达式来确定（图1-3）：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\Delta x}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2\Delta y}$$

由这些表达式可得：

$$\varphi_a = 2\Delta y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \varphi_c \quad (1-18)$$

$$\varphi_d = -2\Delta x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \varphi_b \quad (1-19)$$

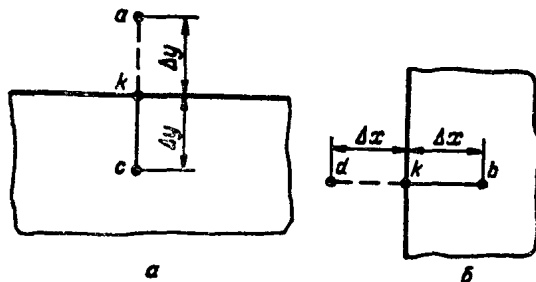


图 1-3 确定周边外的 φ 值

a —适于式1-18； b —适于式1-19

图1-3中 k 表示周边的边界点，点 a 、 b 、 c 、 d 与函数

φ_a 、 φ_b 、 φ_c 、 φ_d 对应。

网格法相当简单，不需花费很多时间就能学会。它不受实际中所遇到问题的条件限制，借助于它，很容易解决各种新的设计问题，这些问题用现有公式、图表或其它方法是不能解决的。

在以后章节中这种方法将用来计算具有各种外形的零件、带孔厚板等。这些零件可能是整体的，也可能有圆角、切口、凸台和孔等。

此外，可由下例进一步了解这种方法的实质。

令拉普拉斯方程为：

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1-20)$$

相应的差分方程为：

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0 \quad (1-21)$$

式中 φ_{xx} 和 φ_{yy} —— x 和 y 的第二差分：

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{xx} &= \frac{1}{h^2} [\varphi(x+h, y) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x-h, y)] \\ \varphi_{yy} &= \frac{1}{h^2} [\varphi(x, y+h) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-h)] \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

在表达式1-22中，所求函数值仅与离散布置的个别点有关，而且这些点的选择必须使其所组成的网格具有预选的步长 h 。

对于平面域 A ^②(图1-4)，它的所求函数满足拉普拉斯方程，而且在边界上的值为已知，则可求解诸如应力、温度分布等问题。差分法很重要的一点是不限制域的形状，因此以后所探讨的有关求解法可用于计算外形复杂的零件。

将域 A 按任意选定步长 h 划分网格。在网格中划出最近似于域 A 的周边 E ，这周边构成某一新的域 A_1 ，边界条件由周边 E 转换到域 A_1 的周边 B 上。这样域 A 的微分方程式1-9的边界条件求

① 原文误为 $+(x-h, y)$ 。——译者注

② 该域称单联域。