工程问题的一些數学解法

И. А. 比尔格尔 著

国防工業出版社

工程問題的一些数学解法

И.А.比尔格尔 著

陆 傳 务 譯

國防工業出版社

本書提供的是标准基本函数和積分方程对于解工程問題的应用。

書中所考察的例子是有关强度、穩定性、彈性体系振动的問題，然而，其結果也可以应用在其他的技術領域中。

И.А. Биргер

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧ

Государственное Издательство Оборонной Промышленности

Москва 1956

本書系根据苏联國防工業出版社一九五六年俄文版譯出

工程問題的一些数学解法

〔苏〕比尔格尔 著

陸傳务 譯

*

國防工業出版社 出版

北京市書刊出版業营業許可証出字第074号

北京五三六工厂印刷　　新華書店發行

*

850×1168耗1/32·5¾印張·插頁1·151,200字

一九五七年八月第一版

一九五七年八月北京第一次印刷

印数：1—2,160册　定价：(10) 1.00元

序　　言

工程問題的解，常常归結到解常微分方程或解在一般边界条件下的常微分方程組。如果对应的方程是高階的和变系数的，那么問題就顯得困难了，因为要求出它的精确解通常是不成功的。甚至对于二階的方程也是这样，如果它們不能化成其解已列成表的某种方程（例如化成貝塞方程）的話。

困难也会發生在这样的一些场合：即方程的精确解虽是已知的（例如在常系数微分方程的场合），但是，在自变量变化的区間上，待求函数或它的導数却碰到跳躍（例如，杆在集中力和力矩作用下的弯曲問題，在具有分支的杆件中，溫度的分布問題）。

在上面的情况下，最有效的解法是应用标准基本函数，这在傑出的力学家和数学家 *А.Н.* 克雷洛夫院士的著作中已証明过。

在問題归結到变系数微分方程的场合，把微分方程轉化到積分方程是合理的。这样轉化的思想是与解微分方程的逐次逼近法的应用密切地联系着的，然而，轉化到積分方程就使我們有可能利用更广泛的和更有效的解法。

書中（第一、二章）討論的是标准基本函数法的应用，同时，也研究（第三、四章）边界積分方程和标准積分方程。

書中所附的例子是关于建筑力学的問題，然而，尽量采取一般化的叙述方式，使我們在解其他的工程問題时也能应用它的結果。

作者对 *Л.И.* 謝多夫院士，苏联科学院正式研究員 *С.В.* 謝連生，教授 *Ф.Р.* 甘特馬歇尔、*Р.С.* 基納苏斯維里、*С.Д.* 迫諾馬烈夫、*П.М.* 里斯，科学技術博士 *В.К.* 日伊托米斯基、*В.Я.* 納湯松在審査手稿时所提出的批評和建議表示謝意。

目　　录

第一章 具有常系数的綫性微分方程的标准基本函数

在技術問題中，应用标准基本函数的有效性，已在A.H.克雷洛夫的众所周知的著作中确立了。П.Ф.巴彼科維奇、Ш.Е.米格拉得澤、Н.К.斯尼科等在以后的著作中曾用这些函数來解决一系列的建筑力学的問題。

标准基本函数特别的优点，表現在作常系数微分方程的間断解（具有給定的導数跳躍的解）方面。

在建筑力学中（先从積分杆的彈性綫方程的著名問題着手），作出这样的解以及利用这样的解的全面試驗，使我們有可能將其結果推广到任意結構的綫性微分方程上去（Ш.Е.米格拉得澤的著作Ⅲ）。

本書是把标准基本函数的确定以及这些函数間簡單的微分关系建立成一般的公式。

借助于一般的关系，就可得到一定組数的标准基本函数，并可給出这些函数的一些新的应用。特别是，可以用这些函数來近似地積分变系数的微分方程。

把微分方程的解表成矩陣的形式，这是建筑力学众所周知的原始参数法（А.А.烏馬斯基、Н.И.别苏賀夫、Н.Г.楚得諾夫斯基等的工作）的数学表达方式。

§1. 問題的提出

設給定一个n階的綫性微分方程

$$L(y)=y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots\cdots\cdots+p_n(x)y(x)$$
$$=f(x), \qquad (1.1)$$

或

$$\sum_{i=0}^{n}p_i(x)y^{(n-i)}(x)=f(x), \qquad (1.2)$$

$$[p_0(x)=1,\ y^{(0)}(x)=y(x)]。$$

求方程1.1在x的某个变化区間（$a\leqslant x\leqslant b$）上的解。

齐次方程1.1的 n 个綫性独立的解$\{Y_k(x)\}$($k=0,1,\cdots\cdots$, $n-1$)，在滿足条件

$$Y_k^{(i)}(a)=\begin{cases}1 & i=k\\ 0 & i\neq k\quad (i,k=0,1,\cdots\cdots,n-1)\end{cases}\tag{1.3}$$

时，其全体称为方程 1.1 的具有始端 $x=a$ 的标准基本組。

方程 1.1 在原始条件为零时的特解記作 $Y_*(x)$。

这样一來

$$Y_*^{(i)}(a)=0\quad (i=0,1,\cdots\cdots,n-1)。\tag{1.4}$$

如果已知$\{Y_k(x)\}$和$Y_*(x)$，那么方程1.1的解可表为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}y^{(k)}(a)Y_k(x)+Y_*(x),\tag{1.5}$$

式中$y^{(k)}(a)$ ($k=0,1,\cdots\cdots,n-1$)是函数$y(x)$和它的首$n-1$階導数在始端 $x=a$ 处的值。这些值又称为原始参数。在解边界問題时，通常不僅要利用到函数$y(x)$，而且也要利用到它的直到 $n-1$ 階的導数。

为了今后的討論方便起見，引入“解行”

$$[y(x)]=\begin{bmatrix}y(x)\\ y^{(1)}(x)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ y^{(n-1)}(x)\end{bmatrix}\tag{1.6}$$

是合理的。由等式 1.5，用逐次微分法我們得到

$$[y(x)]=[Y(x)][y(a)]+[Y_*(x)],\tag{1.7}$$

式中

$$[Y(x)]=\begin{bmatrix}Y_0(x) & Y_1(x) & \cdots & Y_{n-1}(x)\\ Y_0^{(1)}(x) & Y_1^{(1)}(x) & \cdots & Y_{n-1}^{(1)}(x)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ Y_0^{(n-1)}(x) & Y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & Y_{n-1}^{(n-1)}(x)\end{bmatrix}\tag{1.8}$$

是齐次方程1.1的标准基本矩陣，而

$$[y(a)]=\begin{bmatrix} y(a) \\ y^{(1)}(a) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(a) \end{bmatrix}; \qquad [Y_*(x)]=\begin{bmatrix} Y_*(x) \\ Y_*^{(1)}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ Y_*^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}.$$

是原始参数行和特解行。标准基本矩陣在始端是一單位矩陣，而特解行是零。解案1.7是符合于原始参数法的应用的，在技術問題中，这个方法能广泛地加以应用。这个解称为矩陣形的解。

§2. 齐 次 方 程

我們來考察常系数齐次微分方程：

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y^{(n-i)}(x)=0\,, \quad (p_0=1, y^{(0)}(x)=y(x))\,。 \tag{2.1}$$

設$F(\lambda)$是方程2.1的特征多項式：

$$F(\lambda)=\sum_{i=0}^{n} p_i \lambda^{n-i}\,, \tag{2.2}$$

其根記作 λ_s $(s=0,1,\cdots)$ 。

如果选取諸任意常数使滿足下条件

$$y^{(i)}(a)=\eta^i \quad (i=0,1,\cdots\cdots,n-1)\,, \tag{2.3}$$

式中 η 是某个参数，那么方程2.1的解將是这样的❶

$$y(x)=B\frac{F(\lambda)-F(\eta)}{(\lambda-\eta)F(\lambda)}e^{\lambda(x-a)}\,, \tag{2.4}$$

式中 B 是完全積分殘数的运算符号❷。

如果現在把表达式2.4按参数 η 的乘冪展开成級数，那么，正如柯西早就确立过的，方程2.1的标准基本函数原來是展开式的諸系数：

---

❶ А.Н.克雷洛夫著“論某些数学物理微分方程”。ГИТТЛ, М.—Л., 1950年。

❷ 原文为символ операции полного интегрального вычета，其具体的算法見本節2.9和2.10兩式。——譯者

$$y(x)=Y_0(x)\eta^0+Y_1(x)\eta^1+\cdots\cdots+Y_{n-1}(x)\eta^{n-1}。\quad(2.5)$$

$A.H.$ 克雷洛夫在其著作“論某些数学物理微分方程”中，叙述了这个結果之后，便轉而研究簡單結構的具体微分方程，幷对这些方程進行上述的展开。不过，却能确立一些一般的結果，这些結果对于任意階的常系数微分方程都是正确的。

首先我們假設，特征多項式的根 λ_0，$\lambda_1,\cdots\cdots$，λ_{n-1} 都是單根。

把值

$$\frac{F(\lambda)-F(\eta)}{\lambda-\eta}=\sum_{i=0}^{n-1}p_i(\lambda^{n-i-1}+\lambda^{n-i-2}\eta+\cdots\cdots+\eta^{n-i-1})=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\eta^k\sum_{i=0}^{n-1-k}p_i\lambda^{n-1-k-i}\qquad(2.6)$$

代入等式2.4中，進行積分殘数計算，幷考慮到展开式2.5，我們得到❶

$$Y_k(x)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1-k}p_i\lambda_s^{n-1-k-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}p_i(n-i)\lambda_s^{n-i-1}}e^{\lambda_s(x-a)}\qquad(2.7)$$

$$(k=0,1,\cdots\cdots\cdots,n-1;\ p_0=1)。$$

在这个等式中，λ_s（$s=0,1,\cdots\cdots,n-1$）是特征多項式的根。

特別，对于函数 $Y_{n-1}(x)$，我們得到下面的表达式：

$$Y_{n-1}(x)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{e^{\lambda_s(x-a)}}{\sum\limits_{i=0}^{n-1}p_i(n-i)\lambda_s^{n-i-1}}\qquad(2.8)$$

$$(p_0=1)。$$

現在我們來研究重根的场合。設特征多項式2.2有 m 个不同的根 λ_s（$s=0,1,\cdots\cdots,m-1$），其重复数是 ν_s。

❶ 这个結果也可以由运算微積法得到。

对于所考察的场合，关系式2.4，2.5，2.6仍然有效，因此

$$Y_k(x)=B\frac{\sum_{i=0}^{n-1-k}p_i\lambda^{n-1-k-i}}{F(\lambda)}e^{\lambda(x-a)}。\tag{2.9}$$

作完全積分殘数运算，我們求得

$$Y_k(x)=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{1}{(\nu_s-1)!}\frac{\partial^{\nu_s-1}}{\partial\lambda^{\nu_s-1}}\left\{\frac{\sum_{i=0}^{n-1-k}p_i\lambda^{n-1-k-i}}{\frac{1}{(\lambda-\lambda_s)^{\nu_s}}\prod_{i=0}^{m-1}(\lambda-\lambda_i)^{\nu_i}}e^{\lambda(x-a)}\right\}_{\lambda=\lambda_s}。\tag{2.10}$$

在这个等式中是对 λ 進行微分，并在最后的結果中命 $\lambda=\lambda_s$。

如果所有的 $\nu_s=1$（$s=0,1,\cdots\cdots,m-1$），那么$m=n$，且

$$\frac{1}{\lambda-\lambda_s}\prod_{i=0}^{n-1}(\lambda-\lambda_i)\Bigg|_{\lambda=\lambda_s}=F^{(1)}(\lambda_s)=\sum_{i=0}^{n-1}p_i(n-i)\lambda_s^{n-i-1},$$

因而公式2.7与2.10一致。

当$k=n-1$时，由等式2.10，我們求到

$$Y_{n-1}(x)=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{1}{(\nu_s-1)!}\frac{\partial^{\nu_s-1}}{\partial\lambda^{\nu_s-1}}\left\{\frac{e^{\lambda(x-a)}}{\frac{1}{(\lambda-\lambda_s)^{\nu_s}}\prod_{i=0}^{m-1}(\lambda-\lambda_i)^{\nu_i}}\right\}_{\lambda=\lambda_s}。\tag{2.11}$$

今后將举出利用公式2.7和2.10的例子。

注意：在$Y_k(x)$($k=0,1,\cdots\cdots,n-1$)的公式中并不含有系数p_n的值。它的値只对特征多項式的根的値有影响。

§3. 介乎諸标准基本函数間的迭推关系式

由公式2.7和2.10可以确立下面的基本关系式：

$$\frac{d}{dx}Y_k(x)=Y_{k-1}(x)-p_{n-k}Y_{n-1}(x)\tag{3.1}$$

$$(k=0,1,\cdots\cdots,n-1)。$$

在这个公式中，当$k<0$时，应該承認 $Y_k(x)=0$。例如，对導数 $Y_0(x)$ 來說，我們將有

$$\frac{d}{dx}Y_0(x)=-p_nY_{n-1}(x)。$$

等式3.1使我們有可能求出常系数方程的一組标准基本函数，如果，例如，函数 $Y_{n-1}(x)$是已知的。这个方法在实际的問題中常常是很有效的，因为按公式2.8和2.11來确立 $Y_{n-1}(x)$是較为簡單的。

根据等式3.1

$$Y_{n-2}(x)=\frac{d}{dx}Y_{n-1}(x)+p_1Y_{n-1}(x),$$

$$Y_{n-3}(x)=\frac{d}{dx}Y_{n-2}(x)+p_2Y_{n-1}(x),\ \cdots\cdots, \quad (3.2)$$

这就使得能依次地确定所有的$Y_k(x)$（$k=0,1,\cdots\cdots,n-1$）。

迭推关系式3.1使我們有可能用标准基本函数的綫性組合式來表示導函数$Y_k^{(i)}(x)$（i，$k=0,1\cdots\cdots$，$n-1$）。

§4. 非齐次方程的解

設給定一个非齐次方程

$$\sum_{i=0}^{n}p_iy^{(n-i)}(x)=f(x),\ [p_0=1,y^{(0)}(x)=y(x)]。\quad (4.1)$$

方程4.1在原始条件为零时的特解，众所周知，可表为下面的形式：

$$Y_*(x)=\int_a^x Y_{n-1}(x-s+a)f(s)ds, \qquad (4.2)$$

这由直接代入法容易驗証。这个結果，如果利用等式2.8和2.11，也可以借助于積分殘数的理論來确立。

为了闡明公式4.2的意义，我們來举一个說明性的例子。

对于方程

$$y^{(2)}(x)+y(x)=f(x),$$

我們有

$$Y_0(x)=cos(x-a),\ \ Y_1(x)=sin(x-a),$$

$$Y_*(x)=\int_a^x Y_{n-1}(x-s+a)f(s)ds=\int_a^x sin(x-s)f(s)ds_{\circ}$$

方程4.1的一般解將是这样的:

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(a)Y_k(x)+\int_a^x Y_{n-1}(x-s+a)f(s)ds_{\circ} \quad (4.3)$$

矩陣形的解有1.7的形式。

§5. 間　　断　　解

我們將求方程 4.1 这样的解：它們滿足給定的原始条件，且其直到 $n-1$ 階的導数都具有給定的跳躍（第一类間断）。

这样的一类問題在考慮到集中的影响时將要碰到。注意：方程的諸系数在 x 的整个变化区間上沒有間断❶。

設函数$y^{(\nu)}(x)(\nu=0,1,\cdots\cdots,n-1)$有 m_ν 个位于分点$x=a_{\nu j}$（$1\leqslant j\leqslant m_\nu$）处的間断。函数 $y^{(\nu)}(x)$ 在分点 $x=a_{\nu j}$ 处的跳躍記作:

$$y^{(\nu)}(a_{\nu j}+0)-y^{(\nu)}(a_{\nu j}-0)=\Delta_j^{(\nu)}, \quad (5.1)$$

$$(\nu=0,1,\ \cdots\cdots,\ n-1;\ j=1,2,\ \cdots\cdots,\ m_\nu)\ 。$$

具有給定跳躍的諸函数$y^{(\nu)}(x)$应該有下面的結構:

$$y^{(\nu)}(x)=\varphi_\nu(x)+\sum_{j=1}^{m_\nu} S(x,a_{\nu j})\Delta_j^{(\nu)} \quad (5.2)$$

$$(\nu=0,1,\ \cdots\cdots,\ n-1),$$

式中　$S(x,\ a_{\nu j})$ 是一个單位函数，由等式

---

❶ 函数$y(x)$和它的首$n-1$階導数是否有間断，一般說來，是与微分方程諸系数的連續性無关的。可以發生相反的情況：就是在有間断的系数时，解却是連續的。

$$S(x,\ a_{\nu j})=\begin{cases}0 & x<a_{\nu j}\\ 1 & x\geqslant a_{\nu j}\end{cases}$$

給定，$\varphi_i(x)$是連續函数。 (5.3)

作为所提問題的解的函数 $y(x)$ 应該滿足方程4.1、原始条件和跳躍条件 5.2。

可以确立，

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1} y^{(k)}(a)Y_k(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_k}S(x,a_{kj})\Delta_j^{(k)}Y_{kj}(x)+Y_*(x) \quad (5.4)$$

將符合上述条件，如果諸函数 $Y_{kj}(x)$ 滿足齐次微分方程4.1和关系式

$$Y_{ij}^{(\nu)}(a_{kj})=\begin{cases}1 & \nu=k\\ 0 & \nu\neq k\end{cases}\quad (\nu,\ k=0,1,\cdots\cdots,n-1)\text{。} \quad (5.5)$$

諸函数 $Y_{kj}(x)$和 $n-1$个導数一起必須是連續的。

由前面顯然可見，諸函数 $Y_{kj}(x)$是具有始端 $x=a_{kj}$ 的标准基本函数。为了要使上述全部条件成立，只要命

$$Y_{kj}(x)=Y_k(x-a_{kj})\text{。} \quad (5.6)$$

这样一來，

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}y^{(k)}(a)Y_k(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=1}^{m_k}S(x,a_{kj})\Delta_j^{(k)}Y_k(x-a_{kj})$$

$$+\int_a^x Y_{n-1}(x-s+a)f(s)ds\text{。} \quad (5.7)$$

解5.7可以寫成更为对称的形式，如果把函数的原始値看作是諸給定的跳躍，而命

$$y(a)=\Delta_0^{(0)},\cdots\cdots\cdots,y^{(n-1)}(a)=\Delta_0^{(n-1)},$$

且視所有的$a_{k0}=a$ $(k=0,1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$。

現在等式5.4可寫成这样：

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m_k}S(x,a_{kj})\Delta_j^{(k)}Y_k(x-a_{kj})+Y_*(x)\text{。} \quad (5.8)$$

对于特殊形狀的方程來說，5.8型的解早已被应用在建筑力学中。Ш.Е.米格拉得澤❶曾用其他的方法把公式5.8确立成其他的形式。然而作者在論断中雜有錯誤：等式5.8僅僅对常系数方程是正确的，因为只有在这种场合下，諸函数 $Y_k(x-a_kj)$ 才滿足对应的微分方程。

我們現在轉到矩陣形的解。为了寫法的方便，設在分点 $x=a_j$ 处，所有的導数一般都有跳躍，这將表征出"跳躍行"

$$[\Delta_j]=\begin{bmatrix}\Delta_j^{(0)}\\ \Delta_j^{(1)}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \Delta_j^{(n-1)}\end{bmatrix}。\qquad (5.9)$$

当然，这个行中的某些元素可能等于零。

方程 4.1 的矩陣形的間断解將是这样的：

$$[y(x)]=\sum_{j=0}^{m}S(x,a_j)[Y(x-a_j)][\Delta_j]+[Y_*(x)], \qquad (5.10)$$

式中 m 是諸跳躍所在的分点的个数。

原始的跳躍行是

$$[\Delta_0]=\begin{bmatrix}y(a)\\ y^{(1)}(a)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y^{(n-1)}(a)\end{bmatrix}。\qquad (5.11)$$

矩陣 $[Y(x-a_j)]$ 具有形式 1.8，式中諸函数 $Y_k(x)$ 被

---

❶ Ш.Е.米格拉得澤著"建筑力学的某些問題"。Гостехиздат, М., 1948年。

$Y_k(x-a_j)$ 所代替。如果$[\Delta_j]$的所有元素都是給定的，那么我們將称諸跳躍为独立的。然而，常常碰到这样的問題，其中導数 $y^{(\nu)}(x)$在分点$x=a_j$处的跳躍是与函数 $y(x)$和它的諸導数在同样分点处的值有关（当間断存在时，为确定計，我們將考察諸函数在分点 $x=a_j$ 处的左側值；其結果几乎可毫無变更地应用在需要考慮到右側值的场合）。

这样一來，

$$[\Delta_j]=[C_j][y(a_j)]。\tag{5.12}$$

在这个场合，我們將称跳躍为相关的，而 $[C_j]$ 称为相关跳躍矩陣。在杆的理論中，常常使用一个四階的方程，同时

$$\begin{aligned}\Delta_j^{(2)}&=C_{20j}y(a_j)+C_{21j}y^{(1)}(a_j),\\ \Delta_j^{(3)}&=C_{30j}y(a_j)+C_{31j}y^{(1)}(a_j)。\end{aligned}\tag{5.13}$$

于是

$$[C_j]=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\C_{20j}&C_{21j}&0&0\\C_{30j}&C_{31j}&0&0\end{bmatrix}。\tag{5.14}$$

間断解既可以应用在体系受集中影响的场合，又可以应用在諸参数在体系的不同部分上有突变的场合，而这些部分都是用同一个微分方程來描寫的（例如階式杆件的弯曲）。

§6. 标准基本函数应用举例

作为一个例子，我們來考察，在給定的外力作用下，等截面的杆的弯曲問題（圖1）。

微分方程有形式

$$y^{(4)}(x)=\frac{f(x)}{EJ},\tag{6.1}$$

式中 $y(x)$是杆軸的撓度；EJ是在弯曲处的截面剛度；$f(x)$是杆在單位長度上的分布荷載。

齐次方程的特征多項式

$$F(\lambda)=\lambda^4$$

有一个四次（$\nu_0=4$）重根$\lambda_0=0$。

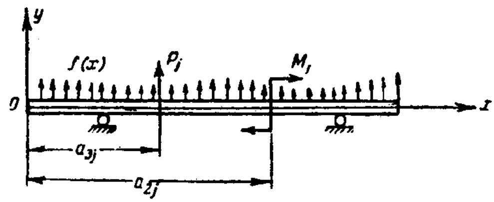

圖1　杆的弯曲

由公式2.10，我們求得（$n=4$，$m=1$，$a=0$）

$$Y_3(x)=\frac{3}{3!}\frac{\partial^3}{\partial\lambda^3}\left\{e^{\lambda x}\right\}_{\lambda=0}=\frac{x^3}{3!}。$$

由等式3.2，我們确定

$$Y_2(x)=\frac{d}{dx}Y_3(x)=\frac{x^2}{2!},$$

$$Y_1(x)=\frac{d}{dx}Y_2(x)=\frac{x}{1!},$$

$$Y_0(x)=\frac{d}{dx}Y_1(x)=1。$$

当然，不用求助于一般的結果，也可以寫出这一組函数來。

函数

$$Y_*(x)=\int_0^x\frac{(x-s)^3}{3!}f(s)ds。$$

在集中弯矩M_j的作用点处，力P_j就有導数跳躍

$$\Delta_j^{(2)}=\frac{M_j}{EJ},\quad \Delta_j^{(3)}=\frac{P_j}{EJ}。$$

根据等式5.7，我們得到杆的彈性綫的著名方程：