

STABILITY, BIFURCATIONS AND CHAOS

稳定性 分支 与混沌

李继彬 冯贝叶 著
by Jibin LI & Beiye Feng

云南科技出版社



51.6363

稳定性 分支与混沌

STABILITY, BIFURCATIONS AND CHAOS

by Jibin Li & Beiyue Feng

李继彬 冯贝叶 著

云南科技出版社



本文受云南省学术著作出版基金管理委员会筹备组赞助

(滇) 新登字 04 号

责任编辑: 杨新书 陆 勇

封面设计: 杨 峻

稳定性、分支与混沌

李继彬 冯贝叶 著

云南科技出版社出版发行 (昆明市书林街 100 号)

滇黔桂石油科学研究所印刷厂

开本: 787×1092 1/16 印张: 22.4 字数: 500 千

1995 年 2 月第 1 版 1995 年 2 月第 1 次印刷

印数: 1000

ISBN 7-5416-0679-0 / Z.132 定价: 38.00 元

Stability, Bifurcations and Chaos

By JibinLi and Beiye Feng

Abstract

A dynamical system is one which changes in time. The task of mathematical system theory is to investigate the patterns of how states change in the long run. Over the past twenty years, dynamical systems have become increasingly common as models in physics, chemistry, biology, economics and sociology. The theory of dynamical systems plays an important role in understanding qualitative behavior of these models. The general aims of this book are follows: (i) To provide an introduction to the bifurcation theory of dynamical systems including Hopt bifurcation, Poincare–Andronov bifurcation, homoclinic and heteroclinic bifurcation and chaotic dynamics. (ii) To form a compendium of useful techniques that are applicable to nonlinear differential equations. The idea is that anyone working in areas modeled by such nonlinear systems can use this book as an easy reference for ideas and methods. (iii) To introduce some of the authors's recent works involving a lot of new theoretical results and their applications.

The idea that the book should be suitable for both mathematicians and nonmathematicians. Students and research workers from divers fields, ranging from mathematics and physics to engineering sciences and biology, will find that this book is useful for their interest.

前 言

过去的 30 年是非线性微分方程和动力系统理论飞跃发展的黄金时期。动力系统是随时间的改变而发展的系统。动力系统理论的主要目标是研究随着时间的长期发展，系统的状态是如何改变和演化的。

经典的动力系统理论已经获得非常成功的应用。众所周知，人们对行星运行、原子爆炸的半经典行为以及宇航员乘登月舱登陆月球等所实现的精确预报和成功观测，已成为动力系统理论应用中最为辉煌的例子。近年来，一个揭示非线性系统共性，探索复杂性的边缘科学——非线性科学正在崛起，成为贯穿信息科学、空间科学、地球科学和环境科学的领域。分析、实验、计算三种手段共用，是探索非线性现象的特点。动力系统理论为非线性研究提供理论思维和分析工具，在非线性的研究中起着核心作用。生物、物理、化学、工程、经济与社会学等领域研究的科学家和工程师们已经充分地认识到，美丽的动力系统几何理论和严格的定性技术，作为强有力的数学工具，正促进着各个学科的发展，帮助他们理解各个领域中所提出的非线性模型的动力学行为。反之，各门科学提出的问题和取得的成就又促进着动力系统理论的新发展，使得动力系统成为数学领域中一个最具吸引力和非常重要的分支。

微分动力系统理论已经揭示这样的事实：在确定性的非线性动力系统中，在一定条件下，存在解的混沌和随机行为。为理解这种确定性系统的内在随机性，近年来，研究文章和著作正爆炸式地增加，各种严格的数学分析方法已经得到发展，许多漂亮的几何图形增强了人们的直观理解，动力系统理论的发展犹如一株参天大树，既根深叶茂又充满生机，要介绍基本事实与结果，需要多卷集著作才能实现。

本书的目标是有限度的，主要介绍与作者们研究有关的，涉及分支、混沌与稳定性方面的基本理论与结果。重点介绍同宿与异宿分支的基本思想及确定性混沌的基本理论与数学分析方法。本书图文并茂，并有许多应用实例。

全书共分七章，第一章是预备知识，为以后几章作理论准备；第二章介

绍线性化理论，这是局部双曲性理论的具体应用；第三章讲解 Hopf 分支理论，涉及对无穷维系统的研究；第四章介绍 Poincaré—Andronov 中心分支，与引人注目的弱化的 Hilbert 第 16 问题有紧密联系；第五章研究平面动力系统的同宿与异宿分支及分支的稳定性，详尽地分析了临界情形与无穷远情形的分支性质；第六章严格地介绍 Smale 马蹄存在意义下的混沌理论，特别是 Melnikov 测量方法及其推广；第七章涉及混沌理论的应用，分析了几个典型系统的周期解存在性及混沌性质。

对于从事非线性系统研究的广大科技工作者，本书是一本兼顾理论与应用的基本参考读物，作者力图介绍 80 年代和 90 年代发展的最新成果与事实，把读者带到学科发展的最前沿，以便读者早日进入研究领域。

本书第二、三、五章初稿由冯贝叶执笔，第四、六与七章由李继彬执笔，第一章两人共同完成，初稿完成后，由李继彬作了较细致的统稿和修改加工，加写了前言和补充了文献目录。

衷心感谢云南省科委应用基础研究基金、云南省学术著作出版基金管理委员会筹备组的大力资助，并对云南科技出版社社长杨新书先生与编辑陆勇先生的积极支持和辛勤劳动，致以深深的谢意。

著者

1994 年国庆于春城

目 录

前言.....	(1)
第一章 预备知识.....	(1)
§ 1.1 V 函数与全导数	(1)
§ 1.2 鞍点性质及其不变流形.....	(10)
§ 1.3 Diliberto 定理与后继函数	(18)
第二章 线性化理论	(31)
§ 2.1 拓扑共轭、结构稳定性与分支.....	(31)
§ 2.2 线性有界算子的谱理论.....	(33)
§ 2.3 双曲线性算子和有界 Lipschitz 函数	(38)
§ 2.4 双曲线性映射的有界 Lipschitz 小扰动	(41)
§ 2.5 Hartman 线性化定理	(43)
§ 2.6 流的 Hartman 定理	(45)
§ 2.7 鞍点不变流形的直化定理.....	(46)
§ 2.8 微分方程的变换理论.....	(51)
§ 2.9 平面系统细鞍点邻域中的规范形.....	(58)
§ 2.10 光滑的线性化	(72)
§ 2.11 等时中心与光滑线性化	(82)
第三章 Hopf 分支及其应用.....	(85)
§ 3.1 平面系统的 Hopf 分支	(85)
§ 3.2 中心流形定理.....	(89)
§ 3.3 谱投影.....	(92)
§ 3.4 高维 Hopf 分支	(103)
§ 3.5 无穷维动力系统 Hopf 分支	(107)
§ 3.6 Hopf 分支存在性的直接代数判定.....	(113)
§ 3.7 Hopf 分支的应用.....	(117)
第四章 Poincaré-Andronov 中心分支	(128)
§ 4.1 变分引理	(128)
§ 4.2 Poincaré-Andronov 中心分支定理及其推广	(129)
§ 4.3 弱化的 Hilbert 第 16 问题及 Abel 积分的零点	(135)
§ 4.4 判定函数及其性质	(137)
§ 4.5 一类平面二次系统的 Poincaré-Andronov 分支.....	(139)

§ 4.6	极限环复眼分支, $H(3) \geq 11$	(143)
§ 4.7	一类三维流的扭结周斯轨道与不变环面	(156)
第五章	平面自治系统的同宿与异宿分支	(161)
§ 5.1	同宿点、同宿环及其分支	(161)
§ 5.2	粗情况下同宿环的稳定性和分支极限性的唯一性	(164)
§ 5.3	临界情况下同宿环的稳定性和分支极限环的唯一性	(167)
§ 5.4	同宿环分支的 Melnikov 函数	(179)
§ 5.5	高阶 Melnikov 函数	(187)
§ 5.6	同宿环分支的分析判据	(191)
§ 5.7	粗情况下异宿环的稳定性	(193)
§ 5.8	临界情况下异宿环的稳定性	(195)
§ 5.9	异宿轨线的破裂	(204)
§ 5.10	异宿环与极限环	(206)
§ 5.11	从同(异)宿环产生同(异)宿环	(208)
§ 5.12	一类二次系统无穷远同(异)宿环的稳定性	(224)
§ 5.13	无穷远奇环的破裂	(233)
§ 5.14	无穷远分界线的分支	(237)
§ 5.15	无穷远分界线的稳定性与产生极限环的条件	(238)
§ 5.16	无穷远分界线与二次系统极限环的集中分布	(250)
§ 5.17	空间同宿与异宿环的稳定性及应用	(256)
第六章	混沌与同宿穿插	(271)
§ 6.1	流与微分同胚	(271)
§ 6.2	移位映射与符号动力学	(276)
§ 6.3	二维微分同胚的双曲不变集	(278)
§ 6.4	跟踪引理	(285)
§ 6.5	Smale-Birkhoff 定理与混沌运动	(288)
§ 6.6	Smale 马蹄的简单模型	(291)
§ 6.7	横截异宿环	(293)
§ 6.8	扰动 Hamilton 系统的横截同宿性与次谐波分支	(295)
§ 6.9	两时间尺度系统的 Melnikov 函数	(302)
§ 6.10	两自由度自治 Hamilton 系统的 Melnikov 积分	(314)
第七章	应用模型分析	(316)
§ 7.1	ABC 流的混沌与共振流线	(316)
§ 7.2	旋转环箍上质点的混沌运动与次谐波分支	(321)
§ 7.3	具有参数与受迫激励的二阶振动系统的分支与混沌性质	(329)
§ 7.4	社会生态学中的混沌现象	(333)
§ 7.5	高阶 Ginzburg-Landau 振幅方程的异宿链	(337)
参考文献		(344)

第一章 预备知识

§ 1.1 V 函数与全导数

考虑微分方程

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^n, \quad (I) \text{ 或 } (1.1.1)$$

在微分方程理论发展的初期阶段,就象代数方程的研究一样,人们总是企图将微分方程积分出来,即把方程的解表示为初等函数或这些函数的积分的有限组合。如果这一点不能办到,就退而求其次,希望能求出微分方程的通积分,即 $n-1$ 个互相独立的函数 $F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得 (1.1.1) 的解 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 满足

$$\begin{cases} F_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) = C_1, \\ F_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) = C_2, \\ \dots\dots\dots \\ F_{n-1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = C_{n-1}. \end{cases} \quad (1.1.2)$$

而 $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ 称为积分常数,它们仅依赖于解的初值。

但是现在已经十分清楚,由 (1.1.1) 型的方程全体所组成的类中,上述的可积系统仅仅是稀如凤毛麟角的一部分。企图用一串可积系统去逼近一个不可积系统,并通过可积系统轨线的性质来得出极限系统轨线的性质是不可能的。

鉴于上述原因,微分方程研究的注意力已不再集中于去积分一个方程,而转变为通过研究方程 (1.1.1) 右端的函数所确定的向量场而直接得出轨线的性质。这就是经典的微分方程定性理论所研究的目标。

B. I. Arnold^[1] 将微分方程的一些古典的结果(解的存在性,唯一性及解对初值的连续依赖性)综合成下面的微分方程基本定理。

定理 1.1.1 (常微分方程基本定理) 设 $f(x)$ 连续可微, $f(x_0) \neq 0$, 则在 x_0 的充分小邻域内,向量场 $f(x)$ 与常向量场 e_1 微分同胚。因此在 x_0 的小邻域内方程 $\dot{x} = f(x)$ 的轨线微分同胚于一族平行直线。

这样,对于常点(即使得 $f(x_0) \neq 0$ 的点 x_0) 邻域的轨线,其结构我们已完全清楚了。余下的问题归结为在奇点(即使得 $f(x_0) = 0$ 的点 x_0) 的邻域研究微分方程轨线的性质。

为了理解轨线的全局结构, 极限集的研究是非常重要的。设 $\varphi(t, x_0)$ 表示方程 (1.1.1) 的在 $t=0$ 时刻经过 x_0 点的轨线。若存在 $t_n \rightarrow +\infty$ 或 $t_n \rightarrow -\infty$ 使得 $\varphi(t_n, x_0) \rightarrow \tilde{x}$ 称 $\tilde{x}$ 为一个极限点, 全体极限点的集合称为极限集。显然如果我们已经理解一个系统的极限集的全部结构, 此系统的轨线的全局结构也就确定了。然而, 这是一个十分困难的问题, 现在已经知道, 当 $n \geq 3$ 时, R^n 中极限集的结构是非常复杂的。

在定性理论的研究中, 计算一个给定的函数沿微分方程轨线的导数 (称为全导数) 是一个非常重要的手段。

设给定 $x \in R^n$ 的函数 $F(x)$, 如果把方程 (1.1.1) 的轨线方程 $x = x(t)$ 代入此函数, 便可得到一个 t 的函数 $F(x(t))$ 。由此我们可以计算此函数对 t 的导数, 称为 $F(x)$ 沿方程 (1.1.1) 的全导数。

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(I)} = \text{grad} F(x) \cdot \dot{x}(t) = \text{grad} F(x) \cdot f(x),$$

上式中的 “ $\cdot$ ” 表示内积。

通常我们考虑由 $F(x) = C$ 确定的一族曲线或曲面。

引理 1.1.1 设 $F(x) = C$ 是一族曲面, 当 $C_1 \neq C_2$ 时 $F(x) = C_1$ 与 $F(x) = C_2$ 不相交。若在 $x = x_0$ 处

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(I)} = \text{grad} F(x_0) \cdot f(x_0) > 0 (< 0),$$

则在 $x = x_0$ 处, 系统 (I) 的轨线在曲面 $F(x) = C_0$ ($C_0 = F(x_0)$) 上向着曲面 $F(x) = C > C_0$ ($< C_0$) 的方向穿出 (穿入)。

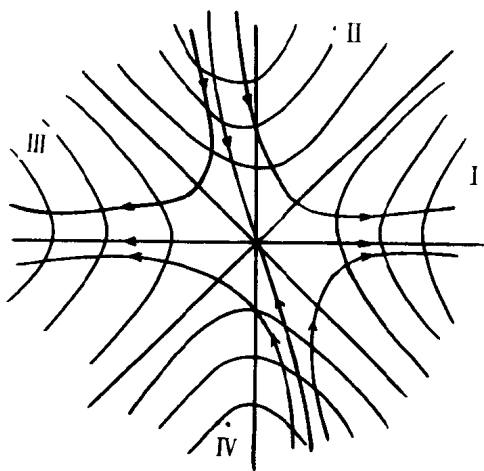


图 1.1.1 系统 (1.1.3) 的相图

例 1.1.1 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y^2, \\ \dot{y} &= -y + xy. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

这里 $f(x) = (x + y^2, -y + xy)^T$ 。显然 $y=0$ 即 x 轴是 (1.1.3) 的轨线。令 $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, 则

$F(x) = C$ 表示一族双曲线 (见图 1.1.1)。

直线 $y=x$ 及 $y=-x$ 把相平面划分成 4 个区域 I、II、III、IV。当 $C > 0$ 时, 这族双曲线位于 I、III 区域内, 且当 $C \rightarrow +\infty$ 时向着无穷远方向移动。当 $C=0$ 时双曲线退化为直线 $y = \pm x$ 。当 $C < 0$ 时双曲线位于 II、IV 区域内, 且当 $C \rightarrow -\infty$ 时向着无穷远方向移动。而

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1.1.3)} = \text{grad} F(x) \cdot f(x),$$

$$\begin{aligned}
&= (x, -y) \cdot (x + y^2, -y + xy), \\
&= x^2 + y^2, \\
&> 0.
\end{aligned}$$

因此由引理 1.1.1 知系统 (1.1.3) 的轨线在相空间的一切点上都是沿 C 增大的方向穿过这族双曲线的。

如果 $F(x) = C$ 表示一族围绕奇点 O 的闭曲线或闭曲面, 且当 $C \rightarrow C_0$ 时不相交地收缩到 O 点, 则我们可借助函数 $F(x)$ 去确定奇点 O 的稳定性。为此我们介绍奇点稳定性的定义。

定义 1.1.1 设 O 是系统 (I) 的奇点。若对 O 的任意邻域 U , 存在 O 的邻域 U_1 使得若 $x(0) \in U_1$ 则对一切 $t > 0$ 都有 $x(t, 0, x(0)) \in U$, 则称奇点 O 是稳定的, 否则便称 O 是不稳定的。(上面 $x(t, 0, x(0))$ 表示系统 (I) 的当 $t = 0$ 时经过 $x(0)$ 的解)

若 O 是稳定的, 且当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $x(t) \rightarrow 0$, 则称 O 是渐近稳定的。

引理 1.1.2 设 $F(x) = C$ 是一族封闭曲面。当 $C_1 < C_2$ 时 $F(x) = C_1$ 被包含在 $F(x) = C_2$ 所围在的空间中。 $F(x) = 0$ 表示奇点 O 。又恒有

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(t)} < 0 \quad (> 0),$$

则奇点 O 是渐近稳定的 (不稳定的)。

例 1.1.2 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = -x - ay(x^2 + y^2), \end{cases} \quad a > 0. \quad (1.1.4)$$

并考虑曲线族 $F(x, y) = x^2 + y^2 = C$, 这是一族同心圆, 显然符合引理 1.1.2 的要求。

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1.1.4)} &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y}, \\
&= 2x(y - ax(x^2 + y^2)) + 2y(-x - ay(x^2 + y^2)), \\
&= -2aF^2 < 0,
\end{aligned}$$

$F(x, y) = 0$ 是奇点 $O(0, 0)$, 故由引理 1.1.2 知, O 是渐近稳定的。

然而一般来说, $F(x) = C$ 究竟是不是一族闭曲面也并不是很容易判定的。但我们有下面的结果。

引理 1.1.3 设对 $0 < \|x\| \leq H$, $F(x) > 0$, 这里 $\|\cdot\|$ 表示 Euclid 范数。当 $x = 0$ 时 $F(x) = 0$ 。则当 C 充分小时, 曲面族 $F(x) = C$ 是封闭的, 且包围奇点 O 。

证 首先设 S 是任一属于区域 $\|x\| \leq H$ 的包含奇点 O 的闭曲面。设

$$\xi = \inf_{x \in S} F(x),$$

则由 $F(x)$ 的性质知 $\xi > 0$ 。设 $0 < C < \xi$ 。现考虑从奇点 O 出发通向无穷远的任一条连续曲线 L 。 L 必定与 S 交于某点 y 。

由于 $F(0)=0$, $F(y) \geq \xi > C$ 以及函数 $F(x)$ 沿曲线 L 是连续变化的。因此 $F(x)$ 必定在 L 的某点处取值为 C , 即 $F(z)=C$ 。这就说明曲线 L 与曲面 $F(x)=C$ 相交于 z 点。由 L 的任意性, 就证明了 $F(x)=C$ 是一个闭曲面。

由引理 1.1.2 及引理 1.1.3 即得下面的引理。

引理 1.1.4 设 $F(x)$ 具有性质:

(i) 对 $0 < \|x\| \leq H$, $F(x) > 0$, 当 $x=0$ 时 $F(x)=0$;

(ii) $\left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1)} < 0$,

则系统 (I) 的奇点 O 是渐近稳定的。

例 1.1.3 考虑系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \frac{1-A^2}{A}x^2 + 2xy - Ax^3 + x^2y, \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}\tag{1.1.5}$$

$$\begin{aligned}F(x,y) &= x^2 + y^2 + \left(-\frac{4}{3}x^3 + \frac{2(1-A^2)}{A}x^2y + \frac{4(1-A^2)}{3A}y^3\right) \\ &\quad + \left(\frac{3A^2-2(1-A^2)^2}{2A^2}x^4 + \frac{9A^2-14}{4A}x^3y - \frac{A^2+2}{4A}xy^3\right),\end{aligned}$$

$$\text{则 } \left. \frac{dF}{dt} \right|_{(1.1.5)} = -\frac{A^2+2}{4A}(x^2+y^2)^2 + R.$$

其中 R 是 x, y 的至少 5 次的齐次多项式。

由此看出, 当 $x^2 + y^2$ 充分小时 $F(x,y)$ 满足引理 1.1.4 的要求。因而奇点 $O(0,0)$ 渐近稳定。

满足引理 1.1.4 的函数 $F(x)$ 称为 Liapunov 函数或 V 函数。引理 1.1.4 只告诉我们如果存在 Liapunov 函数, 我们可用它来判断奇点的稳定性。但没有告诉我们如何去构造出这种函数。

由微分方程的初等教程我们知道, 一个平面系统如果有线性部分, 可写成

$$\dot{x} = Ax + \dots, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\tag{1.1.6}$$

的形式, 其中 “...” 表示 x, y 的 2 次以上的高阶项。又设

$$p = \text{Tr}A,$$

$$q = \det A,$$

$$\Delta = p^2 - 4q.$$

则可用 $q=0$, $\{q>0, p=0\}$ 及 $\Delta=0$ 这几条曲线在 $p-q$ 参数平面上对线性系统奇点的类型进行初步的划分。(见图 1.1.2)

图 1.1.2 中的记号如下:

S——鞍点; UN——稳定结点;

SN——稳定结点; UF——不稳定焦点;
SF——稳定焦点; C——中心。

划分区域的几条曲线也就是非线性系统(1.1.6)的奇点的类型发生转变的分界曲线。在这些线中, 对应于 $\{q > 0, p = 0\}$ 上的奇点可能是中心, 也可能是焦点, 因此产生中心焦点的判别问题。如果系统有线性部分, 且方程右端是多项式, 则可用下面的方法解决上述判定问题。

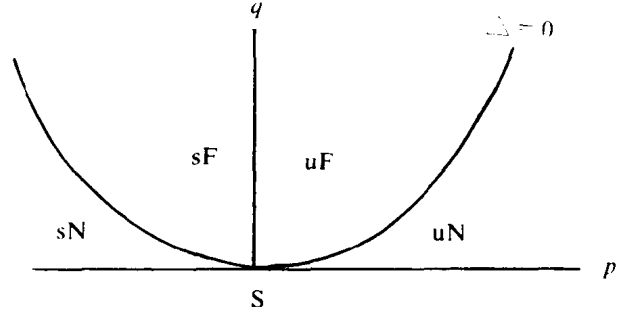


图 1.1.2 $p-q$ 参数平面的划分

对要进行中心焦点判别的系统, 必有 $TrA = 0$, 因而由线性代数的理论知一定可用非异线性变换将其线性部分化为

$$\begin{bmatrix} 0 & by \\ -bx & 0 \end{bmatrix}$$

的形式。再通过一个时间变量的替换 $t = b\tau$, 最终可将系统化为

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y + P_2 + P_3 + \cdots + P_n, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

其中 P_k, Q_k 都是 x, y 的 k 次齐次多项式。设 $F(x, y) = x^2 + y^2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_m$, 其中 F_k 是 x, y 的 k 次齐次多项式。则

$$\begin{aligned} \left. \frac{dF}{d\tau} \right|_{(1.1.7)} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{d\tau} \\ &= (2x + F_{3x} + F_{4x} + \cdots)(y + P_2 + P_3 + \cdots) \\ &\quad + (2y + F_{3y} + F_{4y} + \cdots)(-x + Q_2 + Q_3 + \cdots) \\ &= W_3 + W_4 + \cdots, \end{aligned}$$

其中 W_n 是 x, y 的 n 次齐次多项式:

$$\begin{aligned} W_n &= y \frac{\partial F_n}{\partial x} - x \frac{\partial F_n}{\partial y} + 2(xP_{n-1} + yQ_{n-1}) \\ &\quad + (P_{n-2} \frac{\partial F_3}{\partial x} + Q_{n-2} \frac{\partial F_3}{\partial y}) + (P_{n-3} \frac{\partial F_4}{\partial x} + Q_{n-3} \frac{\partial F_4}{\partial y}) \\ &\quad + \cdots + (P_2 \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y}) \\ &= y \frac{\partial F_n}{\partial x} - x \frac{\partial F_n}{\partial y} + 2(xP_{n-1} + yQ_{n-1}) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=3}^{n-1} (P_{n-k+1} \frac{\partial F_k}{\partial x} + Q_{n-k+1} \frac{\partial F_k}{\partial y}).$$

令 $W_3 = 0, W_4 = 0, \dots$ 我们即可得到一些方程:

$$X \frac{\partial F_n}{\partial y} - y \frac{\partial F_n}{\partial x} = E_n \quad (n=3, 4, \dots), \quad (1.1.8)$$

其中

$$E_n = 2(xP_{n-1} + yQ_{n-1}) + H_n.$$

$$H_n = \sum_{k=3}^{n-1} (P_{n-k+1} \frac{\partial F_k}{\partial x} + Q_{n-k+1} \frac{\partial F_k}{\partial y}).$$

注意 H_n 只依赖于 $F_3, F_4, \dots, F_{n-1}$.

现在须研究方程

$$x \frac{\partial F}{\partial y} - y \frac{\partial F}{\partial x} = E \quad (1.1.9)$$

何时有解及如何去解的问题。其中 E, F 均是 x, y 的齐次多项式。首先, E, F 的次数必须相同。设 E, F 均为次齐次多项式。为研究 (1.1.9) 的解, 引入极坐标:

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 并记 $F = r^n \varphi(\theta), E = r^n \psi(\theta)$ 其中 $\varphi(\theta) = F(\cos \theta, \sin \theta), \psi(\theta) = E(\cos \theta, \sin \theta)$.

$$\begin{aligned} \text{又因} \quad r^n \frac{d\varphi}{d\theta} &= \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= -r \sin \theta \frac{\partial F}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial F}{\partial y} = x \frac{\partial F}{\partial y} - y \frac{\partial F}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

把 (1.1.10) 代入 (1.1.9) 得

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \psi(\theta). \quad (1.1.11)$$

注意 $\varphi(\theta)$ 是不含常数项的。由积分学的知识知, 当是 n 奇数时 $\int \psi(\theta) d\theta$ 仍是 $\cos \theta, \sin \theta$ 的奇次的齐次多项式。因此也没有常数项。这时方程 (1.1.11) 总有解。当 n 是偶数时, 若 $\int \varphi(\theta) d\theta$ 中的常数项是零时 (1.1.11) 仍有解, 否则可能无解。但这时方程

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \psi(\theta) + c \quad (1.1.12)$$

必定有解, 其中 c 是一个适当的常数。

由以上的分析可知, 我们可逐次地解一些 (1.1.8) 型的方程。这一过程或者到解出全部方程为止, 或者到某一个 $n = 2k$ 时方程无解, 而去寻找一个常数使 c_k 使得

$$\frac{d\varphi_{2k}}{d\theta} = \varphi_{2k} + c_k.$$

将上式用 x, y 的多项式表示可得

$$x \frac{\partial F_{2k}}{\partial y} - y \frac{\partial F_{2k}}{\partial x} = E_{2k} + c_k (x^2 + y^2)^k.$$

因此, 最后我们总可求得一个函数

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + F_3 + \cdots + F_{2k},$$

使得或者 $\frac{dF}{dt} = 0$, 或者 $\frac{dF}{dt} = -c_k(x^2 + y^2)^k + \cdots$,

其中“...”表示 x, y 的次数大于 $2k$ 的项。在前一种情形发生时奇点是中心；而在后一种情况发生时奇点是焦点，且此焦点当 $c_k > 0 (< 0)$ 时是稳定（不稳定）的。文献中称 c_k 为第 k 个 Liapunov 常数。

例1.1.4 判定 $O(0,0)$ 是系统

$$\dot{x} = y - \frac{3}{2}x^2 + 2xy - 2x^3 + x^2y$$

$$\dot{y} = -x$$

的中心还是焦点，如果是焦点，确定它的稳定性。

在此例中，可逐步算出

$$E_3 = 2(xP_2 + yQ_2) = -3x^3 + 4x^2y,$$

$$\psi(\theta) = -3\cos^3\theta + 4\cos^2\theta\sin\theta,$$

$$\varphi(\theta) = \int(-3\cos^3\theta + 4\cos^2\theta\sin\theta)d\theta$$

$$= -3\sin\theta + \sin^3\theta - \frac{4}{3}\cos^3\theta$$

$$= (-3\sin\theta + 3\sin^3\theta) - 2\sin^3\theta - \frac{4}{3}\cos^3\theta$$

$$= -\frac{4}{3}\cos^3\theta - 3\cos^2\theta\sin\theta - 2\sin^3\theta.$$

于是，

$$F_3 = -\frac{4}{3}x^3 - 3x^2y - 2y^3,$$

$$E_4 = 2(xP_3 + yQ_3) + P_2 \frac{\partial F_3}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

$$= 2x^4 + 3x^3y - 12x^2y^2,$$

$$\psi(\theta) = 2\cos^4\theta + 3\cos^3\theta\sin\theta - 12\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$= -\frac{3}{4} + (\cos 2\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta) + (\frac{7}{4}\cos 4\theta + \frac{3}{8}\sin 4\theta).$$

这时 $\frac{d\varphi}{d\theta} = \psi(\theta)$ 没有齐次多项式解，但 $\frac{d\varphi}{d\theta} = \psi(\theta) + \frac{3}{4}$ 有齐次多项式解：

$$\varphi = (\frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{3}{8}\cos 2\theta) + \frac{7}{16}\sin 4\theta - \frac{3}{32}\cos 4\theta$$

$$= -\frac{15}{32}\cos^4\theta + \frac{11}{4}\cos^3\theta\sin\theta + \frac{9}{16}\cos^2\theta\sin^2\theta - \frac{3}{4}\cos\theta\sin^3\theta + \frac{9}{32}\sin^4\theta.$$

故
$$F_4 = -\frac{15}{32}x^4 + \frac{11}{4}x^3y + \frac{9}{16}x^2y^2 - \frac{3}{4}xy^3 + \frac{9}{32}y^4,$$

而 $\frac{dF}{dt} = -\frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 + \dots$.

因此奇点 O 是渐近稳定的焦点。

附注1 在确定 F_n 的过程中我们要进行如下的程序:

$E_n \rightarrow \psi(\cos\theta, \sin\theta \text{ 的齐次多项式}) \xrightarrow{\text{积分}} \psi(\text{三角多项式}) \rightarrow \varphi(\text{三角多项式})$
 $\rightarrow \varphi(\cos\theta, \sin\theta \text{ 的齐次多项式}) \rightarrow F_n$

在 $\psi \rightarrow \psi$ 的过程中要反复使用初等三角中的和角与倍角公式及二项式展开定理。在 $\varphi \rightarrow \varphi$ 的过程中如果直接将 $\cos k\theta$, $\sin k\theta$ 等阶数小于 n 的三角式化为 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 的多项式, 则所得的式子的次数要小于 n , 因而整个式子不是齐次的。这时在次数低于 n 的项上乘上一个 $(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^{n-k}$ 的因子即可。

附注2 在由 $\psi \xrightarrow{\text{积分}} \varphi$ 的过程中, 所得的 φ 可以相差一个积分常数, 因此在 F_n 中可以相差一个 $c(x^2 + y^2)^n$ 的项。所以 F_n 不是唯一的。利用这一点有时可适当化简 F_n 的表达式。在本例中如果把求得的 F_4 加上一个 $-\frac{9}{32}(x^2 + y^2)^2$ 的项即可以求得一个新的更为简化的 F_4 :

$$\begin{aligned} F_4 &= -\frac{15}{32}x^4 + \frac{11}{4}x^3y + \frac{9}{16}x^2y^2 - \frac{3}{4}xy^3 + \frac{9}{32}y^4 - \frac{9}{32}(x^2 + y^2)^2 \\ &= -\frac{3}{4}x^4 + \frac{11}{4}x^3y - \frac{3}{4}xy^3. \end{aligned}$$

利用计算函数沿一个系统的轨线的全导数的方法不但可以判定奇点的稳定性, 有时亦可直接验证某条曲线是一给定系统的积分曲线。

引理 1.1.5 设给定系统 (1.1.1) 及空间曲线 $\Gamma: x = F(x(u))$, 若沿曲线 Γ 处处有

$$\text{grad}F(x(u)) \parallel f(x(u)), \quad (1.1.13)$$

则 Γ 是系统 (1.1.1) 的积分曲线。特别, 若 Γ 是平面曲线 $F(x, y) = 0$, 则条件 (1.1.13) 等价于条件

$$\dot{F} = \text{grad}F(x) \cdot f(x) = 0. \quad (1.1.14)$$

证 $\text{grad}F(x(u))$ 即曲线 Γ 在点 x 处的法向量, $f(x)$ 是由向量场 $f(x)$ 确定的微分方程 $\dot{x} = f(x)$ 定义的积分曲线在 x 处的切向量。因此由积分曲线的定义, 条件 (1.1.13) 即表明 Γ 是系统 (1.1.1) 的积分曲线。

若 Γ 是平面曲线 $F(x, y) = 0$, 则把 x 看成参数, 其参数方程可写成 $(x, y(x))$ 。故由隐函数求导法则得

$$\text{grad}F(x, y) = (1, y'(x)) = (1, -\frac{F_y}{F_x}), \text{ 该向量平行于 } (F_x, -F_y).$$

因此条件 (1.1.13) 等价于条件

$$\frac{F_x}{f_1(x)} = -\frac{F_y}{f_2(x)},$$

这就是条件 (1.1.14)。

引理 1.1.2 通过判断轨线不断进入一族收缩的闭曲面而得出奇点是渐近稳定的。但有时我们只需知道轨线是否进入一个特殊的有界区域内，即判定所谓拉格朗日稳定性。

定义 1.1.2 设系统 (1.1.1) 的轨线 $x = \varphi(t, x_0)$ 当 $t \rightarrow +\infty$ 时是有界的，则称轨线 $\varphi(t, x_0)$ 是正向 Lagrange 稳定的或简记为 L^+ 稳定。若存在有界区域 Ω ，使得系统 (1.1.1) 的从 $\partial\Omega$ 上出发的轨线都进入 Ω 并且一直停留在 Ω 内，则称 Ω 是系统 (1.1.1) 的一个吸收集合。

引理 1.1.6 设 $\partial\Omega = S, n(x)$ 是 $x \in S$ 点的内法向量，若对任意 $x \in S$ 有

$$n(x) \cdot f(x) \geq 0 \quad (\leq 0), \quad (1.1.15)$$

则系统 (1.1.1) 的轨线从 S 上进入 (穿出) 区域 Ω 。因此 Ω 是系统 (1.1.1) 的正向 (负向) 的吸收集合。

证 条件 (1.1.15) 表明通过 S 上任一点 x ，系统 (1.1.1) 的轨线的切向量与 S 在 x 处的内法向量的交角是锐角，因此从 S 上出发的轨线都指向 S 的内部 (外部)。又 (1.1.1) 的轨线一旦进入 (或穿出) Ω 内部 (外部)，则这条轨线必将一直停留在内部 (外部)。否则如果轨线又从 S 上某点 y 穿出 (进入) Ω 的话，则在 y 点条件 (1.1.15) 将不满足，因此不可能发生这种情况。

例 1.1.5 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + lx^2 + y^2, \\ \dot{y} &= x(1 + (3l + 5)y). \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

设

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= x^2 - \frac{1}{2l+5}y^2 + \frac{4(l+3)}{(2l+5)(l+5)} + \frac{2(l+3)}{l(2l+5)(l+5)}, \\ \varphi_2(x, y) &= 1 + (3l+5)y. \end{aligned}$$

通过计算可知

$$\dot{\varphi}_1 = 2lx\varphi_1, \quad \dot{\varphi}_2 = (3l+5)x\varphi_2.$$

根据引理 1.1.5，只要 $\varphi_i = 0$ ($i = 1, 2$) 表示实曲线， $\dot{\varphi}_i = 0$ 就是系统 (1.1.16) 的积分曲线。

例 1.1.6 考虑系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x-1)(y+z-b(x+1)), \\ \dot{y} &= (x-1)^2 - a(y+xz) - b(xy+z), \\ \dot{z} &= -2az + 2(x-1) - 2bxz, \\ a &> 1, \quad -a < b < a-2. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

设 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ 表示如下的 4 张平面