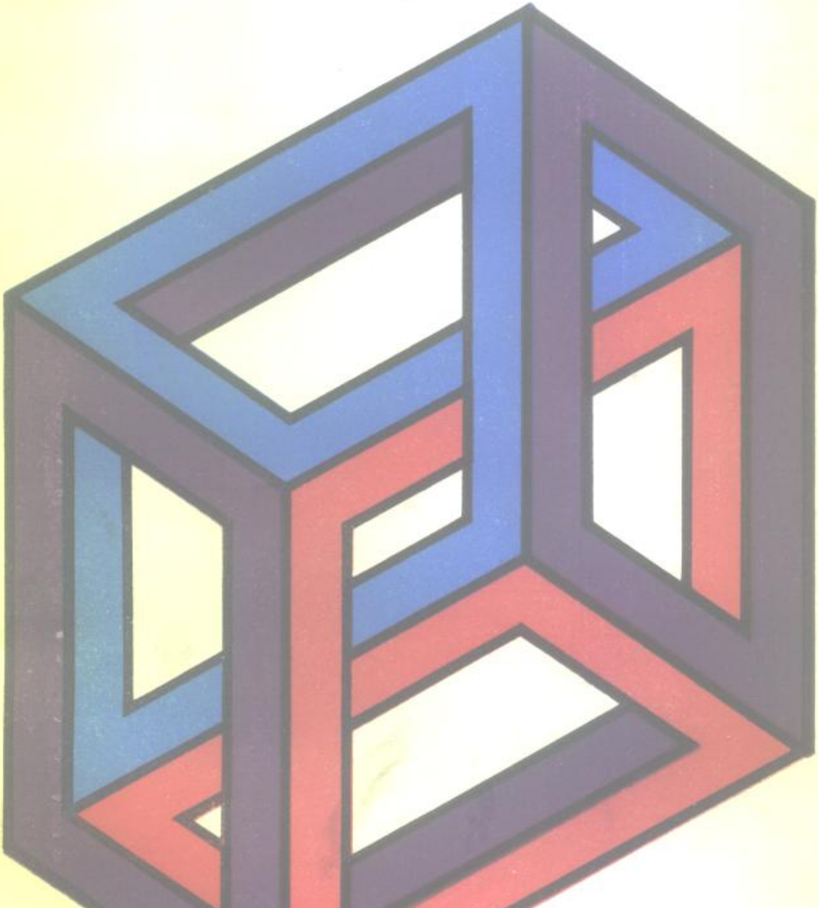
工程数学

# 拉普拉斯变换与傅里叶变换

[修订版]

周肇锡 编



工程数学

(2)

# 拉普拉斯变换与傅里叶变换

(修订版)

周肇锡 编

国防工业出版社

## 内容简介

本书是西北工业大学、北京航空航天大学、南京航空学院等院校数学教研室合编的《工程数学》七个分册之一。本分册介绍科学技术中最常用的两种积分变换——拉普拉斯变换与傅里叶变换。重点介绍基本概念、基本理论及应用。特别对各种应用介绍较多。书中附有适量习题，书后附习题答案。

本书可作为高等工科院校教材，也可供电视大学、业余大学作教材，还可供科技人员参阅和自学者自学。



工　程　数　学

**拉普拉斯变换与傅里叶变换**

（修订版）

[illegible]肇锡　编

责任编辑　陈子玉

国防工业出版社出版、发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张$5^{3}/_{8}$　135千字

1990年11月第一版　1990年11月第一次印刷　印数：0,001—18,000册

ISBN 7-118-00544-4/O·41　定价：4.20元

# 再 版 说 明

《工程数学》（修订版）包括：《概率论与数理统计》、《矢量分析与张量计算》、《复变函数》、《线性代数》、《计算方法》、《拉普拉斯变换与傅里叶变换》、《数学物理方程、特殊函数》。

这次修订再版作了如下更动：

从整体来说：第一章讲拉普拉斯变换，第二章讲傅里叶积分与傅里叶变换。对只需要拉普拉斯变换初步知识的读者，只阅读第一章的前三节即可。对全书许多部分的叙述，这次作了充实补充，力求做到细致易懂，便于读者阅读和自学。对每一节，再版时都分了段，每段标以醒目标题，使每段讲述的内容更明确集中。

第一版书名为《积分变换》，为使书名能够更反映具体内容，故改名为《拉普拉斯变换与傅里叶变换》。

在拉普拉斯变换这一章，再版将其性质分为§1.2与§1.4两节，从而使依据这些性质所展开的拉普拉斯变换的应用也分为§1.3与§1.5两节。编者作这样改动的目的，是想避免把十几条重要性质都摆在一起集中讲，以致使得注重其应用的读者迟迟见不着应用。这番改动也使拉普拉斯变换的应用分出了主次。在应用范围方面，增添了某些工程技术中常见的内容。这些内容都是以实例的形式介绍的。这些例子中有力学的，微分方程非齐次项是非初等函数的，还有其他一些类型的方程。在该章最后，编者着重改写了§1.6一节（单位脉冲函数）。

在傅里叶积分及傅里叶变换这一章中，增加了带有复习性质的§2.1（傅里叶级数概要）。熟悉傅里叶级数理论的读者，可以略去这一节不读。该章最后一节是拉普拉斯变换的反演公式。鉴于在通常教材的习题中遇到的求逆问题，不用反演公式也能解决，

我们便把这一节也列为选学内容。

再版时原有习题未作更动，只是根据本套工程数学的配套书——《工程数学题解》(国防工业出版社，1983年出版)中相关部分的补充题作了补充，编在“补充选作题”的栏目下，附在每章习题之后。由于编入习题的总量较大，读者只需选作其中一部分，比如说2/3左右。有的题偏难，若不会作可以翻阅题解，这对开阔眼界是有好处的。

本书承刘运华同志审阅并提出了许多宝贵意见，在此表示衷心感谢。对其他提出意见的同志，编者在此一并致谢。

编　　者

# 第一版前言

本书是西北工业大学、北京航空航天大学、南京航空学院等三院校数学教研室合编的《工程数学》教材之一。全套教材共分七册出版：《矢量分析》、《复变函数》、《积分变换》、《线性代数》、《计算方法》、《数学物理方程与特殊函数》、《概率论与数理统计》。

本册介绍科学技术中最常用的两种积分变换——傅里叶变换和拉普拉斯变换，并着重于基本概念、基本理论以及各类应用。

书中加有“*”号的内容可根据情况予以取舍，排小字的内容供阅读时参考。各部分附有适量习题，书后附习题答案。阅读本书只需具备一般高等数学知识。

本册由西北工业大学周肇锡编写，由北京航空航天大学刘运华主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、北京航空航天大学、南京航空学院、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。我们对在本书编写过程中给予大力支持和提供宝贵意见的所有同志，在此一并致以衷心感谢。

由于水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　　者

# 目　录

# 引　言

我们知道，"函数"的自变量与函数值都是数或数组。从函数概念拓广出去，便是"变换"的概念。"变换"的自变量与因变量还可以是向量、矩阵或函数。例如线性代数中的线性变换，便是以列向量为自变量及因变量的一种变换。又如微积分学中的求导运算也是一种变换，其自变量与因变量都是一元函数，其定义域便是可导函数类。

所谓**积分变换**，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。详言之，就是把某函数类$A$中任意的函数$f(x)$，乘上一个确定的二元函数$K(x, p)$，然后计算积分，即

$$F(p)=\int_a^b f(x)K(x, p)dx$$

这样，便变成了另一个函数类$B$中的函数$F(p)$。其中积分域是确定的。$K(x, p)$的形式，决定着变换的不同名称。通常把$K(x, p)$称作**核**；把$f(x)$称作**像原函数**，把$F(p)$称作$f(x)$的**像函数**；在一定条件下，它们是一一对应的，并且变换是可逆的。

用积分变换去解微分方程或其它方程，是基于这样一种想法：假若不容易从原方程中直接求得未知的解$x$，那么，便去求它的某种变换的像函数$X$；然后再由求得的$X$去找$x$。这种变换的选择，应当使得：①能把$x$的方程变成$x$的像函数$X$的方程。②$X$的方程是容易求解的。

在初等数学里，也有类似的作法。例如，欲解代数方程$x^3=\sqrt[4]{a}\times b^5/c$，其中$a$、$b$、$c$为已知。先对方程两边取对数，把求未知数$x$的问题，转化为求它的对数$X=\lg x$的问题；求出了$X$，再取反对数，$x$也就得出了。以上运算过程，是离不开对数

表的。

从上例中我们得到的启示是：

1．对特定类型的方程，必须选用适宜的“变换”。上例取对数，便可以用较简单的运算代替相对来说是复杂的运算（具体地说，是用加、减运算代替乘、除，用乘、除代替乘方、开方）。若对上述方程取其他“变换”，例如取正弦，显然是不能成功的。

2．对这种“变换”，应制成备查用的“变换表”，它的作用与对数表的作用相同。

下面分别介绍最常用的积分变换：拉普拉斯变换、傅里叶变换、傅里叶正弦变换、傅里叶余弦变换。先讨论它们的定义与性质，在此基础上制成最简单的变换表。有了这些准备，才有可能讨论应用——解某些微分方程及其它方程。

为便利读者记忆、比较，我们将书中要讲的几种积分变换列表于下：

| 积分变换名称 | 像原函数 $f(t)$ 的定义域 | 积分核 | 定　义 | 常用记号 | 求逆公式 |
|---|---|---|---|---|---|
| 拉普拉斯变换 | $(0, +\infty)$ | $e^{-pt}$ | $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ | $F(p)$ · $\mathscr{L}\{f(t)\}$ | $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}F(p)dp$ |
| 傅里叶变换 | $(-\infty, +\infty)$ | $e^{-i\alpha t}$ | $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt$ | $F(\alpha)$ · $\mathscr{F}\{f(t)\}$ | $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}F(\alpha)d\alpha$ |
| 傅里叶余弦变换 | $(0, +\infty)$ | $2\cos\alpha t$ | $2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt$ | $F_c(\alpha)$ | $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\alpha)\cos\alpha t d\alpha$ |
| 傅里叶正弦变换 | $(0, +\infty)$ | $2\sin\alpha t$ | $2\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt$ | $F_s(\alpha)$ | $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha t d\alpha$ |

# 第一章　拉普拉斯变换

本章讨论拉普拉斯（Laplace）变换的定义、性质及各方面的应用。对拉普拉斯变换的定义，采用直接给出的方式，与此同时也给出其逆变换概念而不给出逆变换的积分表达式；我们把其复反演公式放入第二章最后一节。这样安排使得我们有可能尽早讨论最感兴趣的问题——拉普拉斯变换的各种应用，尤其是用它来解常系数线性常微分方程。其他应用，有的还有待于在电学、控制论、数学物理方程等课程中继续深入介绍。

学习本章，要具备微积分学，尤其是其中的含参变量积分、广义积分、Γ函数以及线性常微分方程理论等方面的数学基础知识。

## §1.1　拉普拉斯变换概念

### （一）拉普拉斯变换的定义

**定义**　对定义在区间（0，+∞）上的实自变量$t$的函数$f(t)$，乘以$e^{-pt}$（其中$p$为复数），然后对$t$由0到+∞积分。此广义积分若收敛，便确定了一个复数$p$的复值函数$F(p)$

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1.1.1)$$

这样，上式中的积分给出了函数$f(t)$与另一函数$F(p)$的对应规律，这种对应规律叫做积分变换。这里的变换称**拉普拉斯变换**，用记号$\mathscr{L}\{f(t)\}$表示，即

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (1.1.1)'$$

所以（1.1.1）式变成了

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}$$

我们称函数$F(p)$为函数$f(t)$的**像函数**；也称$F(p)$为

$f(t)$的**拉普拉斯变换的结果**，简称为$f(t)$的拉普拉斯变换。反之，我们称函数$f(t)$为函数$F(p)$的**像原函数**或**拉普拉斯逆变换**。$F(p)$的拉普拉斯逆变换用记号$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$表示，所以有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$$

根据以上定义，可得出两个重要的恒等式：

$$\mathscr{L}^{-1}\mathscr{L}\{f(t)\}=f(t)$$

$$\mathscr{L}\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=F(p)$$

以上两式都表示了**变换与其逆变换的作用能相互抵消**，这本是意料中的事●。

注意，拉普拉斯变换是复变数$p=s+i\sigma$的复值函数，其中$s=\mathrm{Re}(p)$、$\sigma=\mathrm{Im}(p)$。(1.1.1)式及(1.1.1)′式中的积分，应理解为实自变量$t$的复值函数

$$f(t)e^{-pt}=f(t)e^{-st}(\cos\sigma t-i\sin\sigma t)$$

沿着$t$轴的正半轴的积分；也可从实函数的积分去理解它，即看作两个实函数积分的线性组合

$$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\cos\sigma t dt-i\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\sin\sigma t dt$$

**我们约定，像原函数今后均用小写字母表示**，如$f(t)$、$g(t)$等等。它们对应的像函数，则用对应的大写字母表示，如

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p),\quad \mathscr{L}\{g(t)\}=G(p)$$

等等。于是还有

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=f(t),\quad \mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}=g(t)$$

等等。对此，今后不再一一说明。

**线性性质**

容易证明，**拉普拉斯变换是线性变换**，即对任意两个函数$f_1(t)$、$f_2(t)$及任意常数$c_1$、$c_2$，都有

● 这里需给$f(t)$、$F(p)$以某种良好的条件或引入等价函数类的概念。但在应用上不必作如此仔细的追究。

$$\mathscr{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=c_1\mathscr{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathscr{L}\{f_2(t)\} \tag{1.1.2}$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}\\&=\int_0^{+\infty}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]e^{-pt}dt\\&=c_1\int_0^{+\infty}f_1(t)e^{-pt}dt+c_2\int_0^{+\infty}f_2(t)e^{-pt}dt\\&=c_1\mathscr{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathscr{L}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$

更一般地，有

$$\mathscr{L}\left\{\sum_k c_kf_k(t)\right\}=\sum_k c_k\mathscr{L}\{f_k(t)\} \tag{1.1.3}$$

**拉普拉斯逆变换也是线性变换**，即有

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_k c_kF_k(p)\right\}=\sum_k c_k\mathscr{L}^{-1}\{F_k(p)\} \tag{1.1.4}$$

事实上，若设函数 $F_k(p)$ 的逆变换为 $\varphi_k(t)$：$\mathscr{L}^{-1}\{F_k(p)\}=\varphi_k(t)$，则$\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}=F_k(p)$，$(k=1,2,3,\cdots)$。利用拉普拉斯变换的线性性质（1.1.3）式，有

$$\mathscr{L}\left\{\sum_k c_k\varphi_k(t)\right\}=\sum_k c_k\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}$$

这式子表明：$\sum\limits_k c_k\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}$ 的像原函数就是 $\sum\limits_k c_k\varphi_k(t)$（由拉普拉斯逆变换的定义），即

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_k c_k\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}\right\}=\sum_k c_k\varphi_k(t)$$

这就是（1.1.4）式，证完。

〔**例 1**〕 求$\mathscr{L}\{t^\alpha\}$，其中$\alpha>-1$。

**解** 为推导方便计，我们设积分参数$p>0$，则

$$\mathscr{L}\{t^{\alpha}\}=\int_0^{+\infty}t^{\alpha}e^{-pt}dt=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}u^{\alpha}e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)$$●

其中用到变量代换 $pt=u$。

若在上式中令 $\alpha=n=1,\ 2,\ 3,\cdots$，根据 $\Gamma$ 函数的性质 $\Gamma(n+1)=n!$，便有

$$\mathscr{L}\{t^{n}\}=\frac{1}{p^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

与此对应

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{n+1}}\right\}=\frac{t^{n}}{n!}$$

〔例 2〕 求 $\mathscr{L}\{e^{-at}\}$，其中 $a$ 为复常数。

**解**

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\}=\int_0^{+\infty}e^{-at}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p+a)t}dt$$

$$=-\frac{1}{p+a}e^{-(p+a)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p+a}$$

其中假设 $\mathrm{Re}(p+a)>0$，即 $\mathrm{Re}(p)>-\mathrm{Re}(a)$。

与此对应

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\}=e^{-at}$$

〔例 3〕 求 $\mathscr{L}\{\sin\omega t\}$，其中 $\omega$ 为实常数。

**解** 由 $\sin\omega t=(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})/2i$ 及例 2 结果，得

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\mathscr{L}\left\{\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}[\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\}-\mathscr{L}\{e^{-i\omega t}\}]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-\omega i}-\frac{1}{p+\omega i}\right]=\frac{\omega}{p^{2}+\omega^{2}}$$

---

● 这里所采用的 $\Gamma$ 函数定义为

$$\Gamma(m)=\int_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-t}dt\qquad(m>0)$$

类似可得 $\cos\omega t$、$\mathrm{sh}\,\omega t$、$\mathrm{ch}\,\omega t$ 的拉普拉斯变换。当然，这些函数的拉普拉斯变换，也可由直接计算广义积分得到。

下面是常用的最基本的变换表：

| 序　号 | 像　原　函　数 | 像　函　数 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | $u(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| 2 | $t^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 3 | $t^{\alpha}(\alpha>-1)$ | $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ |
| 4 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{p+a}$ |
| 5 | $\cos\omega t$ | $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| 6 | $\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$ |

利用这张表以及拉普拉斯变换线性性质，我们可以求得其他变换公式。

〔**例 4**〕 求$\mathscr{L}\{\mathrm{sh}\,\omega t\}$。

**解** 因 $\mathrm{sh}\,\omega t=-i\sin(\omega t i)$，由上表公式 6，得

$$\mathscr{L}\{\mathrm{sh}\,\omega t\}=-i\mathscr{L}\{\sin(\omega t i)\}$$

$$=-i\frac{\omega i}{p^2+(\omega i)^2}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

这便是本书末附表二中的公式 14。

〔**例 5**〕 已知$Y(p)=\dfrac{2p^2-4}{(p+1)(p-3)(p-2)}$，计算$\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}$。

**解** 求有理分式的像原函数时，首先要把它化为部分分式。令

$$Y(p)=\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-3)(p-2)}$$

$$=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p-2}$$

等式两边同乘 $(p+1)(p-3)(p-2)$，比较 $p$ 的同次项系数，计算可得

$$A=-\frac{1}{6},\ B=\frac{7}{2},\ C=-\frac{4}{3}，所以$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1/6}{p+1}+\frac{7/2}{p-3}+\frac{-4/3}{p-2}\right\}\\&=-\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}+\frac{7}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-3}\right\}\\&\quad-\frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\right\}\\&=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}-\frac{4}{3}e^{2t}\end{aligned}$$

解完。

### （二）单位阶跃函数

**定义** 单位阶跃函数 $u(t)$ 定义为(图 1-1)

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

由于本章所讨论的函数都是单侧函数，仅定义在正半数轴 $(0,+\infty)$ 上，所以单位阶跃函数也就是在定义域（正半数轴）中恒取单位 1 为值的函数，它在所有像原函数当中起着“单位”的作用，因此有些教材便把这个函数记作 $1(t)$ 或简写为 1。

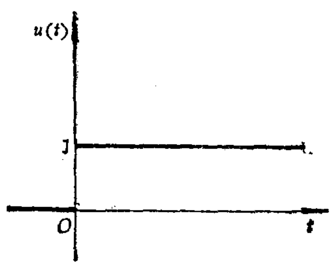



图 1-1

〔例 6〕 求 $\mathscr{L}\{u(t)\}$。

**解**