高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

（一）

第二卷 下册 分析基本原理

初 稿

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

(一)

第二卷 下册 分析基本原理

初稿

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社

高等数学(一)是南京大学数学天文学系在教学改革中集体編成的一部主要基础課程的新教材。它是把以往的解析几何、数学分析、微分几何、变分法、复变函数論、实变函数論和泛函分析等七門課程中的有用的內容和若干新添材料，結合起来的整体。全书共分四卷：分析基本方法、分析基本原理、复数分析与現代分析。第二卷分析基本原理分上、下册出版，下册包括函数項級数、傅立叶級数与傅立叶积分、漸近方法、变分法等四章。

本书可作为綜合大学数学、計算数学、天文、力学等专业的教材，其他如物理、气象等专业以及工科大学等均可参考。

高 等 数 学

(一)

第二卷 下册 分析基本原理

初 稿

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)

工 人 日 报 印 書 厂 印 裝

新华书店科技发行所发行

各 地 新 华 书 店 經 售

統一书号 13010·904 开本 850×1168 1/32 印張 8 6/16

字数 198,000 印数 00001—15,500 定价(6)¥0.80

1960 年 12 月第1版 1960 年 12 月北京第1次印刷

目　录

第五章　函数項級数

第六章　傅立叶級数与傅立叶积分

第七章 漸近方法

第八章 变分法

第五章　函数項級数

§1. 冪級数

1.1 冪級数及其收斂圜　在前面讲函数的泰勒展开式时，将所給函数 $f(z)$ 展成形式如下的級数:

$$a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots \tag{1}$$

或

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots. \tag{2}$$

这种形式的級数叫做冪級数。冪級数的研究对近似計算以及函数性質的討論都非常重要。本节将介紹一些关于冪級数的基本知識。

我們以(2)为例进行討論，关于(1)也一样。

当 $z=0$时，不論系数 a_n 如何，冪級数(2)都收斂，其和为 a_0，因此，冪級数至少有一个收斂的 z 值。有的冪級数对任何 z 都收斂，例如:

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

它們对一切 z 值都收斂，其和分別为 e^z, $\sin z$ 与 $\cos z$。

有的冪級数只在一定区域內收斂，例如:

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

在区域 $|z|<1$ 內收斂，其和为 $\frac{1}{1-z}$。又如

$$z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}+\cdots$$

也在区域$|z|<1$内收斂，其和为$\ln(1+z)$。

也有的冪級数除$z=0$外处处都不收斂，例如

$$z+(2z)^2+(3z)^2+\cdots+(nz)^n+\cdots.$$

冪級数收斂的区域有特殊的性质。为了进一步研究它的性質，我們先証明：

定理1　設$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$为一給定的冪級数。

1）若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_0^n$收斂，則当$|z|<|z_0|$时，冪級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$絕对收斂；

2）若$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz_1^n$发散，則当$|z|>|z_1|$时，冪級数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$也发散。

証明　1）設$\Sigma a_nz_0^n$收斂，$z_0\neq0$，因为

$$a_nz_0^n\to0,$$

故数列$\{a_nz_0^n\}$有界。設

$$|a_nz_0^n|<K,$$

当$|x|<|x_0|$时

$$|a_nz^n|=|a_nz_0^n|\cdot\left|\frac{z}{z_0}\right|^n\leqslant K\theta^n,$$

其中$0<\theta<1$，故$\Sigma K\theta^n$收斂，从而知Σa_nz^n絕对收斂。

2）設$\Sigma a_nz_1^n$发散，則$z_1\neq0$，設$|z|>|z_1|$，可知Σa_nz^n不能收斂；否則据1）知$\Sigma a_nz_1^n$应該收斂。由定理1可以証明：

定理2　設冪級数Σa_nz^n至少有一个异于零的收斂点与发散点，則存在一个正数r，它具有下列性質：

1) 当 $|z|<r$ 时, $\Sigma a_n z^n$ 絕对收斂;

2) 当 $|z|>r$ 时, $\Sigma a_n z^n$ 发散。

这个数 r 便叫做幂級数 $\Sigma a_n z^n$ 的收斂半徑, 并称 $|z|<r$ 为收斂圓。

証明 設幂級数 $\Sigma a_n z^n$ 在 $z_0(\neq 0)$ 点收斂, 在 z_1 点发散。兹考虑使 $\Sigma a_n z^n$ 收斂的一切 z, 它的絕对值 $|z|$ 有有限的上确界, 因为 $|z|\leqslant|z_1|$。設这个上确界为 r, 它就是所求的收斂半徑。

設 $|z'|<r$, 因为 r 是收斂点的絕对值的上确界, 故存在有收斂点 z, 它满足不等式

$$|z'|<|z|\leqslant r.$$

据定理 1 知 $\Sigma a_n z^n$ 絕对收斂, 卽性質 1) 成立。

設 $|z''|>r$, 显然可知 $\Sigma a_n z''$ 发散, 否則将有

$$r\geqslant|z''|.$$

因此性質 2) 也成立。定理証完。

如果幂級数 $\Sigma a_n z^n$ 只有一个收斂点 $z=0$, 我們說它的收斂半徑是零; 如果它处处收斂, 說它的收斂半徑为无穷大。

若收斂半徑为一有限正数 r, 則幂級数 $\Sigma a_n z^n$ 在点 $|z|=r$ 处或者收斂或者发散, 应根据具体情况加以討論。

我們已經知道了收斂半徑的存在性, 現在来考虑它的求法。

定理 3 設 $\Sigma a_n z^n$ 为一給定的幂級数, 若

$$\mu=\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|},$$

而 r 为此幂級数的收斂半徑, 則

1) $\mu=0$ 时, $r=+\infty$;

2) $\mu=+\infty$ 时, $r=0$;

3) $0<\mu<+\infty$ 时 $r=\dfrac{1}{\mu}$

証明

1) 若 $\mu=0$, 則 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, 对于任何 z, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nz^n|}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\,|z|=0$,

故 $r=+\infty$。

2) 若 $\mu=+\infty$, 則$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ 无界。如果冪級数 Σa_nz^n 在某一异于零的点 z_1 处收斂，首先可知$\{a_nz_1^n\}$有界, 从而$\{\sqrt[n]{|a_nz_1^n|}\}$也有界, 即存在有正数 K, 对任何 n 恒有$\sqrt[n]{|a_nz_1^n|}<K$, 或

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{K}{|z_1|}.$$

这就与$\sqrt[n]{|a_n|}$的无界性相矛盾, 故 $\Sigma a_nz_1^n$ 发散。

3) 設 $0<\mu<+\infty$, 并且設$|z_1|<\frac{1}{\mu}$, 选擇 ρ 使得:

$$|z_1|<\rho<\frac{1}{\mu}.$$

于是$\frac{1}{\rho}>\mu$, 因为 μ 是$\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$的最大聚点, 且$\frac{1}{\rho}>\mu$, 故 a_n 从某一項起恒滿足不等式

$$\sqrt[n]{|a_n|}<\frac{1}{\rho},$$

从而有

$$\sqrt{|a_nz^n|}<\left|\frac{z_1}{\rho}\right|<1,$$

因此 $\Sigma a_nz_1^n$ 絕对收斂。若$|z_2|>\frac{1}{\mu}$, 取 ρ' 使得

$$|z_2|>\rho'>\frac{1}{\mu}, \quad 或 \quad \frac{1}{\rho'}<\mu.$$

因为

$$\mu=\limsup_n\sqrt[n]{|a_n|},$$

故有无限多个 n 值滿足不等式

$$\sqrt[n]{|a_n|}>\frac{1}{\rho'},$$

对于这样的 n 有

$$\sqrt[n]{|a_n z_2^n|}>\left|\frac{z_2}{\rho'}\right|>1,$$

由此可知 $a_n z_2^n$ 不超于零，因而 $\Sigma a_n z_2^n$ 发散。

于是知 $r=\dfrac{1}{\mu}$.

作为特例，当 z 为实数 x 时，冪級数 $\Sigma a_n x^n$ 的收斂范圍是 x 軸上的一个区間 $(-r, r)$ 称为这个冪級数的收斂区間，r 为收斂半徑，在 $(-r, r)$ 内冪級数絕对收斂，在这区間外冪級数发散，而在两个端点 $x=\pm r$ 处須另行考慮。

1.2 冪級数的运算 設 $\Sigma a_n z^n$，$\Sigma b_n z^n$ 为二冪級数，其收斂半徑分別为 r_a, r_n。令 $r=\min(r_a, r_b)$，則在圓 $|z|<r$ 内，这两个冪級数都絕对收斂，因而有：

1) $\Sigma a_n z^n \pm \Sigma b_n z^n=\Sigma(a_n \pm b_n) z^n$;

2) $(\Sigma a_n z^n)(\Sigma b_n z^n)=\Sigma(a_0 b_n+a_1 b_{n-1}+\cdots+a_n b_0) z^n$.

設 $\Sigma a_n z^n$ 的收斂半徑为 $r>0$，在 $|z|<r$ 内令級数的和为

$$f(z)=\Sigma a_n z^n.$$

我們先証明：

定理 4 $f(z)$ 在 $z=0$ 处是連續的，即

$$\lim_{z \to 0} f(z)=f(0)=a_0.$$

証明 取正数 ρ，使 $0<\rho<r$，則級数 $\Sigma a_n \rho^n$ 絕对收斂，$\Sigma a_n \rho^{n-1}$ 亦然。令

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \rho^{n-1}=K,$$

則当 $|z| \leqslant \rho$ 时

$$|f(z)-a_0| \leqslant \left|z \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1}\right| \leqslant |z| \cdot K$$

由此可知

$$\lim_{z\to 0}[f(z)-a_0]=0$$

即

$$\lim_{z\to 0}f(z)=a_0=f(0).$$

根据这个定理,我們立刻可以証明

定理 5 設冪級数 $\Sigma a_n z^n$ 与 $\Sigma b_n z^n$ 在圓 $|z|<r$ $(r>0)$ 內有相同的和,即在 $|z|<r$ 时

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\equiv\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n,$$

则必有 $a_n=b_n, n=0,1,2,\cdots$。

这个定理也叫做冪級数的恒等定理。

証明. 在圓 $|z|<r$ 內因为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n\equiv\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n z^n$,故

$$g(z)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)z^n\equiv 0.$$

但 $g(0)=a_0-b_0$,故 $a_0-b_0=0$,即 $a_0=b_0$。因此

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)z^n\equiv 0$$

因

$$g(z)=z\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)z^{n-1}$$

且冪級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)z^{n-1}$ 在 $|z|<r$ 內收斂,据定理 4 有 $\lim\limits_{z\to 0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ $(a_n-b_n)z^{n-1}=a_1-b_1$

但 $g(z)\equiv 0$ 故当 $z\neq 0$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)z^{n-1}=0.$$

所以又有 $a_1-b_1=0$,即 $a_1=b_1$。

照这样作下去，可知 $a_n=b_n, n=0,1,2,\cdots$

現在我們来討論幂級数的除法。

定理 6 設

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots,$$

并設 $a_0\neq 0$，收斂半徑 $r>0$。令 $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$，則 $\varphi(z)$ 在某一个以原点为中心的小圓内可以展成幂級数：

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

証明： 我們先把 $f(z)$ 写成下面的形式

$$f(z)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=a_0[1-g(z)],$$

其中

$$g(z)=-\frac{1}{a_0}\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=1}^{\infty}a'_nz^n.$$

由幂級数在 $z=0$ 处的連續性，可知当 $|z|$ 充分小时可使 $|g(z)|<$ <1。对于这样的 z，我們有

$$\varphi(z)=\frac{1}{a_0}\frac{1}{1-g(z)}=\frac{1}{a_0}[1+g(z)+g^2(z)+\cdots]$$

即

$$\varphi(z)=\frac{1}{a_0}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a'_nz^n+\left(\sum_{n=1}^{\infty}a'_nz^n\right)^2+\cdots\right]$$

設

$$S^{(0)}=1,$$

$$S^{(1)}=\sum_{n=1}^{\infty}a'_nz^n=a_{11}z+a_{12}z^2+\cdots+a_{1m}z^m+\cdots$$

$$S^{(2)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a'_nz^n\right)^2=\quad a_{22}z^2+\cdots+a_{2m}z^m+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S^{(m)}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}a'_n z^n\right)^m= \qquad a_{mm}z^m+\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因为幂級数在收斂圓内絕对收斂，易知按行求和与按列求和結果相同，故

$$\varphi(z)=\frac{1}{a_0}[c'_0+c'_1z+c'_2z^2+\cdots]=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$$

欲求 c_n 可用未定系数法。因在以原点为中心的某一小圓内

$$\frac{1}{\Sigma a_nz^n}\equiv\Sigma c_nz^n,$$

故

$$(\Sigma a_nz^n)(\Sigma c_nz^n)\equiv 1$$

卽

$$\Sigma(c_0a_n+c_1a_{n-1}+\cdots+c_na_0)z^n\equiv 1$$

根据定理 5 有

$$\begin{aligned}a_0c_0&=1,\\ c_0a_1+c_1a_0&=0,\\ c_0a_2+c_1a_1+c_2a_0&=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots,\\ c_0a_n+c_1a_{n-1}+\cdots+c_na_0&=0,\end{aligned}$$

解之得

$$c_0=\frac{1}{a_0}\quad c_1=-\frac{a_1}{a_0^2},\quad c_2=-\frac{a_2}{a_0^2}+\frac{a_1^2}{a_0^3},\cdots.$$

例　将$\dfrac{x}{e^x-1}$展成幂級数。

令

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}=\frac{1}{1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\cdots}$$

設

施

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

則

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\right)=1$$

故

$$B_0=1.$$

又

$$\frac{1}{2!}\frac{B_0}{0!}+\frac{1}{1!}\frac{B_1}{1!}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n!}\frac{B_0}{0!}+\frac{1}{(n-1)!}\frac{B_1}{1!}+\cdots+\frac{1}{1!}\frac{B_{n-1}}{(n-1)!}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

用 $n!$ 乘之得

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}B_0+\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}B_1+\cdots+\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}B_{n-1}=0$$

因此，可簡写成

$$(B+1)^n=B^n,$$

其中 B^k 表 B_k。令 $n=2,3,\cdots$ 得

$$2B_1+1=0,$$

$$3B_2+3B_1+1=0,$$

$$4B_3+6B_2+4B_1+1=0,$$

$$5B_4+10B_3+10B_2+5B_1+1=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

解之得

$$B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30}\quad B_6=\frac{1}{42}\quad B_8=-\frac{1}{30},$$

$$B_{10}=\frac{5}{66}\quad B_{12}=-\frac{691}{2730},\quad B_{14}\frac{7}{6},\cdots$$

$$B_3 = B_5 = B_7 = B_9 = \cdots = 0.$$

这些数 B_n，便叫做貝努利数。

1.3 冪級数在近似計算上的应用 現在我們举几个例子，以以說明利用冪級数来作近似計算的方法：

例 1. 对数的計算 我們巳經知道当 $|x| < 1$ 时

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, \tag{3}$$

当 $x = 1$ 时，右端的級数收斂，在后面我們将知道它的和便等于左端在 $x = 1$ 时的值

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{4}$$

这就是說，計算右端級数的部分和，就可以得到 $\ln 2$ 的近似值。但是級数(3)收斂很慢，同时 x 的值还得限制在 $[-1, 1]$ 內，因此不便于直接应用。不实际計算时必需加以适当改变，一方面要改善級数的收斂速度，又要設法扩大計算的范圍。改善收斂性的方法很多，我們只就对数的展开式加以討論。

在(3)中，把 x 換成 $-x$ 便得

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots. \tag{5}$$

从(3)减去(5)得

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \tag{6}$$

右端的級数当 $|x| < 1$ 时收斂。設

$$x = \frac{1}{2N-1},$$

則

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{N+1}{N},$$

且当 $N > 0$ 时 $|x| < 1$。代入(6)中便得

$$\ln(N+1)=\ln N+\frac{2}{2N+1}+\frac{2}{3(2N+1)}+\frac{2}{5(2N+1)}+\cdots. \quad (7)$$

由此可知，若已算出 $\ln N$，据(7)便可以算出 $\ln(N+1)$的近似值，但 $\ln 1=0$，故令 $N=1$ 得

$$\ln 2=\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}+\cdots. \quad (8)$$

用这个公式可以計算 $\ln 2$ 的近似值。在近似計算中，我們还必需考慮計算結果的意义，即必須設法估計結果中那些数字准确的程度，也就是說，在用部分和作計算时应考慮誤差的大小。設級数(7)在 n 項以后的余式是

$$R_n(N)=\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+\frac{2}{(2n+3)(2N+1)^{2n+3}}+\cdots.$$

显然

$$0<R_n(N)<\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+1}}+$$

$$+\frac{2}{(2n+1)(2N+1)^{2n+3}}+\cdots$$

右端的級数为等比級数，其和为

$$\frac{1}{2N(N+1)}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n-1}} \quad (9)$$

故有

$$0<R_n(N)<\frac{1}{2N(N+1)}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2N+1)^{2n+1}} \quad (10)$$

这就証明：若用

$$\ln N+\frac{2}{2N+1}+\frac{2}{3(2N+1)^3}+\cdots+\frac{2}{(2n-1)(2N+1)^{2n-1}}$$

来代替 $\ln(N+1)$时，公式的誤差 $R_n(N)$不大于(9)。

例如，在計算 $\ln 2$ 时，$N=1$，故

$$0<R_n(1)<\frac{1}{4(2n+1)3^{2n-1}}.$$

取 $n=6$ 得

$$\frac{1}{4(12+1)3^{11}}=\frac{1}{52\times 3^{11}}<0.00000012,$$

所以，若取

$$\ln 2\approx\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{3\cdot 3^5}+\frac{2}{7\cdot 3^7}+\frac{2}{9\cdot 3^9}+\frac{2}{11\cdot 3^{11}} \tag{11}$$

則誤差为

$$0<\rho_6(1)<0.00000012.$$

在計算(11)的每一項时可取8位小数，卽每一項的誤差其絕对値都不超过

$$\frac{1}{2}\times 10^{-8}=0.000000005$$

于是

$$\frac{2}{3}=0.66666667, \qquad (-)$$

$$\frac{2}{3\cdot 3^3}=0.02469136, \qquad (-)$$

$$\frac{2}{5\cdot 3^5}=0.00164609, \qquad (+)$$

$$\frac{2}{7\cdot 3^7}=0.00013064, \qquad (+)$$

$$\frac{2}{9\cdot 3^9}=0.00001129, \qquad (+)$$

$$\frac{2}{11\cdot 3^{11}}=0.00000103. \qquad (-)$$

后面括号內的＋，－表校正数的符号，两端相加得

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}+\cdots+\frac{2}{11\cdot 3^{11}}\approx 0.69314708. \tag{12}$$

这个数量近似值，由于带(－)号的項有三个，它們的总誤差不超过

$$0.000000005\times 3=0.000000015,$$

从(12)中减去这个数，便知

$$\ln 2>0.693147065,$$