

T1311.11

Y82

410100

有限元法与 C 程序设计

俞铭华 吴剑国 王 林 编著



科学出版社

1998

前 言

随着计算机技术的发展,结构分析的有限元法已广泛地应用于解决船舶、航空、土建、水利和其他结构工程的各类问题中.工程师不仅要懂得工程专业知识,还需要懂得计算机软件设计知识,方能主动应用现代工程设计方法处理工程中的各种设计问题.

我们在近年的结构力学和有限元法的教学与科研中,曾用 FORTRAN 77 和 True BASIC 语言编写过有关程序.本书尝试用 C 语言进行编写.C 语言是国际上广泛流行的很有发展前途的高级语言.它具有描述能力强、编译实现容易、生成的代码质量高、通用性和移植性良好的特点,成为人们开发系统软件的理想工具.不仅如此,C 语言结合了高级语言的基本结构与汇编语言的实用性,它既有很强的数值计算能力,又有一定的符号推理功能及很强的屏幕处理和图形功能,也适合于编写应用软件,是广大科技工作者所喜欢使用的程序设计语言.

在开发工程设计专家系统中,结构有限元分析是一个重要的组成部分.如何用 C 语言进行开发,值得进行探索.目前,我们在国内尚未见到有关用 C 语言编写的有限元分析程序设计的书籍.因此,我们尝试编写《有限元法与 C 程序设计》还是很有意义的.

本书主要讲述杆系矩阵法、平面问题和板弯曲有限元法原理和程序设计方法;以较大篇幅讲述结构分析前后处理的图形功能和菜单技术的程序设计方法;最后介绍当前国内外有限元软件的发展和趋势.在编写时,结合以往的教学经验,力求做到循序渐进,深入浅出,从物理概念上说明问题.在介绍每一类结构分析的基本原理后,介绍如何设计框图,怎样编写程序,以求达到学以致用目的.书中还提供了平面框架和平面问题分析的 C 程序.本书没用深奥的理论推导,它适用于本科教学和一般工程技术人员自学阅读.

本书由俞铭华和吴剑国拟定编写提纲,俞铭华编写第一、二、三、四、六章,吴剑国编写第七、八、九、十一章,王林编写第五、十章.感谢研究生曹骥协助调试部分程序并编写了附录,奚健协助调试了部分程序,戚支全、窦培林和彭杰绘制了部分插图.感谢华东船舶工业学院领导、同事的支持和帮助,感谢学院教材委员会对本书出版的资助.本书是在教学和科研基础上编写的,部分内容取自同行有关参考文献,一并致谢.

本书备有一张软盘,内含书中平面框架和平面问题的 C 语言源程序,以及相应的解题实例,读者若需要可同作者联系.

由于作者水平有限,望读者对书中的错误和不当之处给予批评指正.

作 者

1997 年 5 月

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1.1 有限元法简介	(1)
§ 1.2 有限元法程序的内容	(2)
§ 1.3 程序设计的原则	(3)
§ 1.4 程序设计的语言	(3)
第二章 矩阵法原理	(5)
§ 2.1 概述	(5)
§ 2.2 杆元刚度矩阵	(6)
§ 2.3 结构刚度方程	(11)
§ 2.4 约束处理	(14)
§ 2.5 坐标转换	(16)
§ 2.6 空间杆系结构分析	(23)
第三章 矩阵法程序设计	(27)
§ 3.1 程序结构及主调函数	(27)
§ 3.2 原始数据的输入	(29)
§ 3.3 结构刚度矩阵的组装	(33)
§ 3.4 总荷载向量的组装	(37)
§ 3.5 约束支承条件的处理	(38)
§ 3.6 带型方程组的求解	(39)
§ 3.7 杆端内力的计算	(40)
§ 3.8 计算实例及平面刚架源程序	(41)
第四章 平面有限元法	(52)
§ 4.1 概述	(52)
§ 4.2 三角形单元的刚度矩阵	(56)
§ 4.3 结构刚度矩阵	(62)
§ 4.4 外荷载处理	(64)
§ 4.5 解题过程	(65)
§ 4.6 矩形单元	(67)
§ 4.7 四节点四边形等参单元	(69)
§ 4.8 八节点曲边四边形等参单元	(75)
第五章 平面的有限元法程序设计	(78)
§ 5.1 程序结构及主调函数	(78)
§ 5.2 原始数据的输入	(79)

§ 5.3	结构刚度矩阵的组装	(82)
§ 5.4	总荷载向量的组装	(86)
§ 5.5	约束支承条件的处理	(86)
§ 5.6	变带宽方程组的求解	(87)
§ 5.7	单元应力的计算	(90)
§ 5.8	计算实例及平面问题源程序	(91)
第六章	板弯曲有限元法	(101)
§ 6.1	概述	(101)
§ 6.2	矩形板单元	(102)
§ 6.3	三角形板单元	(107)
第七章	计算机绘图基础	(113)
§ 7.1	二维图形几何变换	(113)
§ 7.2	三维图形的二维显示	(116)
§ 7.3	坐标系统	(118)
§ 7.4	图形函数及其用法	(120)
第八章	矩阵法的前后处理	(127)
§ 8.1	结构图形的绘制原理	(127)
§ 8.2	结构简图的绘制	(128)
§ 8.3	结构编码图的绘制	(133)
§ 8.4	荷载作用图的绘制	(134)
§ 8.5	结构内力图的绘制	(140)
§ 8.6	前后处理的工程文件	(150)
第九章	矩阵法软件集成	(153)
§ 9.1	概述	(153)
§ 9.2	软件(VMDM)功能	(154)
§ 9.3	VMDM 的菜单设计与程序	(155)
§ 9.4	计算实例	(169)
第十章	平面有限元法的前后处理	(173)
§ 10.1	网格自动划分原理	(173)
§ 10.2	结构计算简图的绘制	(176)
§ 10.3	位移图的绘制	(177)
§ 10.4	主应力分布图的绘制	(178)
§ 10.5	等应力线的绘制	(180)
§ 10.6	软件(VFEM)的集成	(182)
§ 10.7	计算实例和程序	(184)
第十一章	现代有限元软件	(207)
§ 11.1	有限元软件概述	(207)
§ 11.2	ALGOR 软件与使用实例	(211)
§ 11.3	现代有限元软件技术	(216)
附录	(219)
A	Turbo C++ 软件包的简介与使用	(219)
B	VMDM 与 VFEM 的使用方法	(221)

第一章 绪 论

§ 1.1 有限元法简介

经典结构力学(力法、位移法、能量法)只能求解较为简单的工程问题. 随着结构工程的发展需要, 特别是计算机的迅速发展, 在结构计算中逐渐形成了一套适应计算机的计算方法, 这就是矩阵分析方法, 其实质是结构力学位移法的矩阵形式. 从 1955~1958 年间, 阿吉里斯(J. H. Argyris)等人研究复杂杆系结构, 进一步发展了结构分析的矩阵法. 在此基础上, 他导出了平面应力状态下矩形板格的单元刚度矩阵. 1956 年, 特纳(M. J. Turner)和克拉夫(R. W. Clough)等人将刚架位移法的思想推广应用于弹性体平面. 他们把平面连续划分成若干三角形单元和矩形单元, 使连续体变成离散体, 仅在单元节点处相连; 而后, 对单元体、应用几何、物理及平衡三方面条件导出单元刚度矩阵, 即单元节点力与单元节点位移的矩阵关系式; 再应用单元间位移的连续性和节点的平衡条件, 建立结构的总刚度方程, 即结构的节点位移和节点荷载间的矩阵关系式; 然后, 根据结构的边界位移条件来修改总刚度方程. 由此方程求得结构节点位移值, 最后, 应用物理方程求出各个单元的应力.

1960 年, 克拉夫首次引入了“有限元法”这一名词, 并发表了平面应力问题的有限元法论文. 在矩阵法中, 结构的构件都是一种各个杆件自然离散的单元. 假设的单元位移模式是一种精确的位移函数, 因而矩阵法属于一种精确法; 而在有限元法中, 需要把结构划分成有限个单元后, 在单元上构造位移模式. 一般来说, 它是一种近似的位移函数. 因此, 有限元法是一种近似的数值分析方法.

上述初期的有限元法是建立在虚功原理的基础上. 本书公式也主要利用大家较为熟悉的虚功原理来推导.

在 1960~1970 年间, 基于各种变分原理的有限元法得到了迅速发展, 梅劳(R. J. Melosh)等人应用势能原理建立了有限元位移模型; 卞学璜(Pian)应用余能原理建立了杂交应力有限元模型; 琼斯(R. E. Jones)、亚玛莫特(Y. Yamamoto)等人应用修正的势能原理建立了混合有限元模型; 艾拉斯(Z. M. Elias)等人应用余能原理建立了有限元平衡模型; 埃尔曼(L. R. Herrmann)应用汉林格-赖斯纳(Hellinger-Reissner)原理建立了薄板弯曲的混合型有限元法; 赞凯维奇(O. C. Zienkiewicz)、张佑启等人做了进一步发展与应用. 这样, 使有限元法获得了牢固的理论基础.

有限元法是用来分析各种结构问题的强有力的工具. 在经典的固体力学理论工作中, 尽管人们已经进行了几百年的努力, 但所能解决的实际问题为数不多. 然而, 有限元法却能成功地解决各种各样的固体力学的问题, 如杆系、板与壳(包括薄板、厚板、筒壳、任意壳等)和大变形问题等等. 不论结构的几何形状和边界条件多么复杂, 不论材料性质和外加荷载如何多变, 使用有限元法处理均可获得满意的答案. 有限元法解决实际问题的能力远远超过了经典方法, 并且已经取得了公认的成就, 因而受到普遍重视. 无论是大型飞机、大

型舰船,还是高层建筑、水利大坝,有限元法均可方便地进行结构分析.现在,掌握有限元法的原理和应用,对于一个从事结构分析与设计的工程师来说,已经是必不可缺的了.有限元法的实施,离不开程序设计.如果一个结构工程师,不仅懂得有限元法原理,而且掌握有限元法程序设计方法,无疑会在工作中如虎添翼,发挥更大的主动性.

利用计算机进行结构有限元分析的步骤如下:

第一步,用有限元法理论推导出用矩阵表达的近似公式,即建立数学模型.这就是本书有关原理部分章节所讲述的内容.

第二步,把矩阵表示的计算步骤及其公式编制成计算机能接受的计算程序,即程序设计.这就是本书有关程序设计章节所讲述的内容.为了提高计算效率并使计算结果便于分析应用,本书还增设了前后处理图形功能及菜单程序设计的章节.

第三步,将已编制完善且经调试通过的程序上机计算,输出电算结果,以供应用.

§ 1.2 有限元法程序的内容

有限元法程序是把有限元法理论和方法用计算机实施计算过程的载体,通常有三个基本内容,如图 1-1 所示.

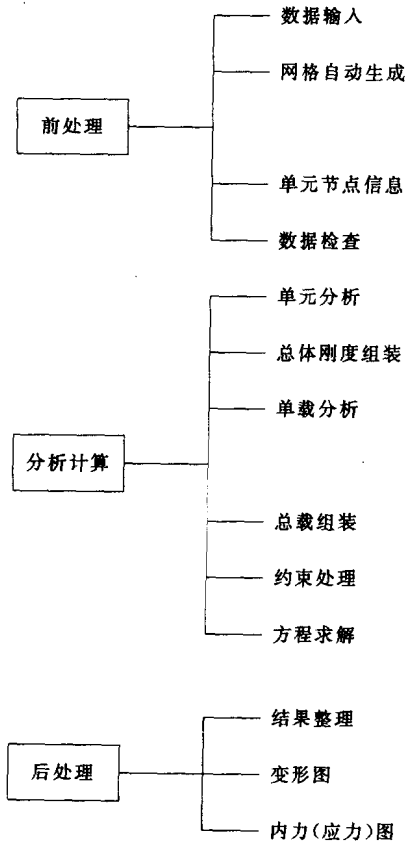


图1-1 有限元法程序的内容

1. 前处理(数据输入阶段)

这个阶段主要是读入数据和生成数据,以便形成有限元网格,为有限元分析计算做好准备.主要内容有:

(1) 程序控制信息,包括节点总数、单元批数或总数、问题类型、材料数组、支座数、荷载数等.控制信息用来控制数组的规模、循环语句的终止点或控制转移等.

(2) 网格自动生成.

(3) 节点坐标和约束信息.

(4) 单元信息,由单元类型、单元节点组成.

(5) 材料信息.

(6) 荷载信息.

(7) 计算简图生成,便于检查原始数据是否有错,以便及时加以修改.

2. 分析计算

这个阶段主要是有限元矩阵的计算、组装和求解.主要内容有:

(1) 计算单元的刚度矩阵,简单的单元

可直接利用显式,“对号入座”,组装成总体刚度矩阵。

- (2) 计算单元非节点荷载的等效节点荷载向量,“对号入座”,组装总荷载向量。
- (3) 根据已知的位移边界条件,进行约束处理,消除总刚度方程的奇异性。
- (4) 利用线性代数方程组的解法,对总刚度方程进行求解,得出结构节点位移向量。

3. 后处理(数据输出阶段)

这个阶段是对每个单元建立单元节点位移向量,再计算单元内指定截面的内力或指定点的应力。目前,后处理的发展很快,主要是增加图形输出,如变形图、弯矩图、剪力图、轴力图、主应力分布图、等应力线等。

另外,尚需进行软件集成,设计友好的界面,便于用户操作使用。

§ 1.3 程序设计的原则

在编制计算机程序时,一般要遵循以下原则:

- (1) 正确性:没有算法错误、没有语法错误。
- (2) 易读性:便于阅读、便于理解、便于使用。
- (3) 有效性:节省计算机存储量和机时,精度高。
- (4) 模块化:程序各部分相当独立,便于移植,便于修改扩充。

评价一个结构分析程序需要综合考虑以上几个方面。其中,程序的正确性是基本要求。验证所编程序的正确性应按照下述步骤进行:首先,利用被考核的程序计算几个有精确解或者已查明其计算结构是正确的考题,通过对比计算结果来判断此程序是否可靠;其次,可利用计算结果是否满足平衡条件来考核,不管是整体、某个分离体或某个节点,节点力、外荷载、支反力之和应为零;另外,也可以利用对称性或者位移、应力分布趋势和规律性等加以判断。若有电测应力或光弹性试验结果,亦可进行比较,加以考核。

程序设计首先要进行框图设计。按照计算步骤计算流程图,应用结构化程序设计的方法建立程序的模块方案,根据主、子程序(函数)结合及接口要求,画出程序主框图;确定各个模块之间的逻辑关系;建立数据结构及信息系统;设计输入/输出系统及程序诊断、查错、检查系统;建立程序模块、子程序、数组、变量名表。

结构化程序设计方法主要是采用从顶向下、逐步求精的设计方法,其核心是按照先全局后局部、先整体后细节、先抽象后具体的原则去组织抽象的编制工作。通常把整个程序抽象分为若干个相对独立的功能模块,每个模块可以由若干个子程序构成,每个子程序用若干只有一个入口和一个出口控制结构编写。这种分析思路清晰、逻辑关系简单、完全模块化了的程序结构,具有良好的可读性,便于修改、维护、增删和移植。有限元法程序可分为前处理、分析计算、后处理三大功能模块,每一模块根据功能逐一细化,各模块间通过数据文件或数组进行联系,组成一个逻辑上完整的程序。再通过菜单技术进行程序集成。

§ 1.4 程序设计的语言

程序设计语言是人类语言与计算机语言之间的桥梁,通过程序设计语言编制一个能

完成某种功能的计算机程序。程序设计语言的种类很多,每一种语言有其自身的特长和缺点。

FORTRAN 语言对结构工程师与大学生来说是一种比较熟悉的语言。该语言的结构层次清楚,进行数学计算和科学分析的能力较强,适用于编制大型结构计算程序。但是,对于前后处理来说,FORTRAN 语言的图形功能、数据结构类型、语句格式等方面还存在很多不足与不方便之处。近年推出的新版本在以上方面得到了改进,提供了 FORTRAN 图形库,库中包括丰富的绘图函数和字体输出函数,加强了数据结构与控制类型。

在 BASIC 语言基础上发展起来的 True BASIC,Quick BASIC 语言,学习容易,使用方便,图形处理能力强;有解释态和编译态,在编写程序过程中可自动编译并随时纠正语法错误,进行交互式编辑、交互式调试;结构层次和运算速度都有了很大的提高。但对于编制大型结构有限元分析系统来说,还是不太合适。

C 语言已在前言中稍作介绍,这里再作些说明。C 语言简洁、紧凑,使用方便、灵活,运算符、数据结构丰富,具有现代化语言的各种数据结构。它允许直接进行位、字节和字的操作,允许指针运算和地址操作,允许内存的动态分配和管理,因此,具有代码紧凑、执行速度快的优点。当今的 C 语言编译器所产生的优化执行代码的效率已经非常接近汇编语言的效率。C 语言也是一种模块化极强的高级语言,它用函数作为程序模块以实现程序的模块化,各函数间具有相对的独立性。另一方面,C 语言又是一种结构化极强的高级语言,它提供了各种循环结构(for 语句、while 语句、do-while 语句等)、分支结构(switch 语句)、条件语句(条件判断、条件赋值)、各种嵌套语句、预处理语句(include、宏定义 define、条件编译语句)、过程和递归调用等。另外,C 语言的通用性、可移植性和灵活性也是其倍受青睐的重要因素。而且用 C 语言设计的界面非常漂亮,图形功能也很强。所以,本书选择 C 语言作为有限元分析与前后处理的程序设计语言,可以充分发挥其特点;并为今后学习与编写工程结构设计专家系统打下基础。

第二章 矩阵法原理

§ 2.1 概 述

杆系结构的矩阵法实质上是结构力学中杆系结构位移法的矩阵表达形式,亦可说是杆系结构的有限元法.它用来对桁架、连续梁、框架(刚架)、板架(交叉梁系)和拱等平面或空间杆系结构进行内力和变形的计算.它的做法是:首先将杆系结构进行离散,通常采取按自然杆件离散的形式,也就是把结构的每根梁、杆、柱离散为杆元(单元)与节点,先研究这些基本杆元的特征,推导杆端力与杆端位移的矩阵关系式,即建立杆元刚度矩阵;然后,将其组成结构进行整体分析,实际上是建立各节点的平衡方程式,亦即建立结构刚度矩阵和荷载向量;接着进行约束处理以消除方程的奇异性,从而求解平衡方程式得到节点位移(即杆端位移);最后,由杆端位移求出各杆元的内力与变形,达到结构分析的目的.由于有限元法用于杆系结构时,具有十分清晰的物理意义,有利于了解有限元法在结构分析中各步骤的物理含义.这对于深入掌握有限元法并扩展到连续介质中去是有帮助的.本章主要讲授上述做法所包含的内容.

在采用矩阵法分析结构时,不能使用研究单跨梁的符号法则.因为这一符号法则规定杆两端的剪力、弯矩正方向不同,所以在建立节点平衡方程时容易造成混乱,因此有必要重新规定符号法则.

按照通常习惯,选取右手直角坐标系.为了求解刚架、板架等整个杆系结构问题,需要建立结构坐标系 $oxyz$,如图 2-1 所示.在研究每个杆元的特性时,建立每个杆元本身的坐标系 $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 比较方便,这种坐标系称为局部坐标系.从结构中任取一杆,置于图 2-2 所示的右手直角坐标系下,杆元分析时,局部坐标系 $\bar{o}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ 暂时省去上部横线,即用 $oxyz$.杆的两端为 i, j ,杆的中心轴线为 x 轴, ij 指向 x 轴正向, i 为原点, y, z 轴分别为断面的两个主惯性轴.

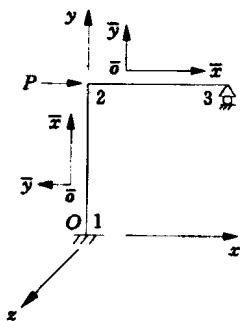


图 2-1 坐标系

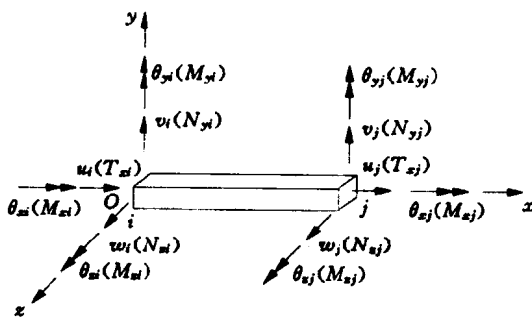


图 2-2

矩阵位移法的未知数是位移,即杆元两端的位移,它就是节点的位移,称为自由度.每

个杆端可以产生沿三个坐标轴的线位移 u, v, w 和绕这三个轴的角位移 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$. 与这 6 个位移分量对应的杆端力分量为轴力 T_x , 剪力 N_y, N_z , 扭矩 M_x , 弯矩 M_y, M_z .

符号法则规定如下: 在右手直角坐标系 $oxyz$ 中, 广义位移(含线位移和角位移)、广义力(含力和力矩)的矢量方向与坐标轴的正向一致为正, 反之为负. 图 2-2 所示的位移与力均为正向, 其中角位移、力矩是用双箭头右手矢量表示的.

为研究问题方便和计算上的需要, 现将杆端位移、杆端力以向量形式表示. 向量中各个分量排列方式如下: 先排 i 端点, 后排 j 端点; 每个端点先排线位移(或力), 后排角位移(或力矩), 并都按 x, y, z 次序排列. 故图 2-2 所示杆端位移向量 $\{d_{ij}\}$ 和杆端力向量 $\{F_{ij}\}$ 分别为

$$\begin{aligned} \{d_{ij}\} &= [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj} \quad \theta_{zj}]^T \\ \{F_{ij}\} &= [T_{xi} \quad N_{yi} \quad N_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad T_{xj} \quad N_{yj} \quad N_{zj} \quad M_{xj} \quad M_{yj} \quad M_{zj}]^T \end{aligned}$$

$\{d_{ij}\}$ 与 $\{F_{ij}\}$ 向量中对应分量排列次序一致, 一方面便于记忆, 另一方面可以保证杆元刚度的对称性. 对于实际结构, 杆端位移分量往往少于 6 个.

§ 2.2 杆元刚度矩阵

杆系结构通常按自然杆件离散化. 结构中的一根杆件称为杆元或单元. 杆件的基本变形为拉压、扭转、弯曲, 基本变形杆称为基本杆元. 各种结构中杆的变形无非是基本变形或基本变形的组合. 下面推导杆元的刚度矩阵, 即杆端力 $\{F_{ij}\}$ 与杆端位移 $\{d_{ij}\}$ 之间的关系矩阵. 它可以用有限元法的一套理论推导, 但对于直杆单元这类简单的单元, 只需利用结构力学的知识即可. 下述内容中, E 为材料的弹性模量, G 为剪切模量.

一、基本杆元的刚度矩阵

(一) 拉压杆元

对于图 2-3 中之杆元, 其横截面面积为 A . 设两端轴力为 $\{F_{ij}\} = [T_{xi} \quad T_{xj}]^T$, 两端节点位移为 $\{d_{ij}\} = [u_i \quad u_j]^T$, 它们均按正向画出. 则有一 $T_{xi} = T_{xj}$, 杆元的伸长为 $u_j - u_i$, 于是有应变

$$\epsilon = \frac{u_j - u_i}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{T_{xj}}{EA} = -\frac{T_{xi}}{EA}$$

从而得

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}$$

故得拉压杆元刚度矩阵为

$$[K^e] = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

(二) 扭转杆元

对于图 2-4 之杆元, 其横截面极惯性矩为 J_x . 两端之扭矩 $\{F_{ij}\} = [M_{xi} \quad M_{xj}]^T$, 相应的

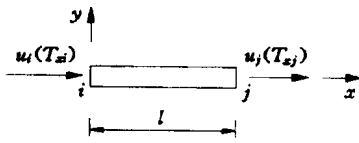


图 2-3

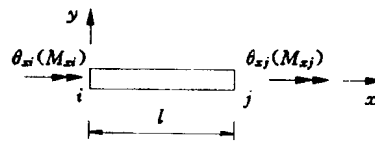


图 2-4

扭转角 $\{d_{ij}\} = [\theta_{xi} \quad \theta_{xj}]^T$, 均按正向画在图中, 则有 $-M_{xi} = M_{xj}$, 及

$$\frac{\theta_{xj} - \theta_{xi}}{l} = \frac{M_{xj}}{GJ_x} = -\frac{M_{xi}}{GJ_x}$$

从而得

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{GJ_x}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{xj} \end{Bmatrix}$$

故得扭转杆元刚度矩阵为:

$$[K^e] = \frac{GJ_x}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.2)$$

(三) xoy 平面内的弯曲杆元

如图 2-5 所示, 此种杆元的横截面惯性矩为 I_z , 其杆端力与节点位移的关系式, 可根据梁的弯曲理论直接得到

$$\begin{Bmatrix} N_{yi} \\ M_{zi} \\ N_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ & 4 & -\frac{6}{l} & 2 \\ \text{对} & & \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ & & & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_{zi} \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2.2.3)$$

式中, 4×4 的方阵即为 xoy 平面内弯曲杆元的刚度矩阵.

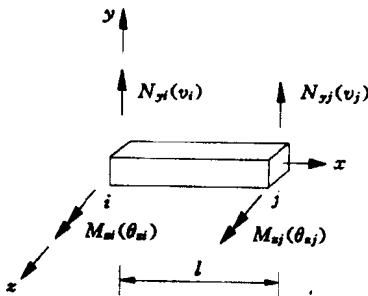


图 2-5

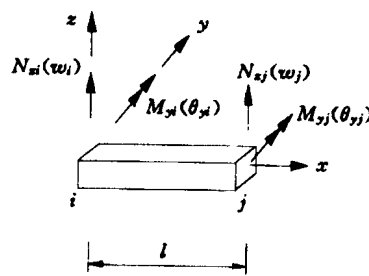


图 2-6

(四) xoz 平面内的弯曲杆元

如图 2-6 所示, 此种杆元的横截面惯性矩为 I_y , 其杆端力与节点位移间的关系式同理

可以得到:

$$\begin{Bmatrix} N_{xi} \\ M_{yi} \\ N_{xj} \\ M_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_y}{l} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} & -\frac{12}{l^2} & -\frac{6}{l} \\ & 4 & \frac{6}{l} & 2 \\ \text{对} & & \frac{12}{l^2} & \frac{6}{l} \\ & & & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{yi} \\ w_j \\ \theta_{yj} \end{Bmatrix} \quad (2.2.4)$$

式中, 4×4 的方阵即为 xoz 平面内弯曲杆元的刚度矩阵.

二、杆元刚度矩阵

在船舶结构和建筑结构中, 各杆元往往不在同一直线上, 各杆受力也较为复杂, 杆元的刚度矩阵可由基本杆元的刚度矩阵组合得到.

(一) 平面桁架杆元的刚度矩阵

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ N_{yi} \\ T_{xj} \\ N_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & 1 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (2.2.5)$$

式中, 4×4 的方阵即为刚度矩阵.

(二) 连续梁杆元的刚度矩阵

可由(2.2.3)得到.

(三) 平面刚架杆元的刚度矩阵

刚架杆元可由 xoy 平面内弯曲杆元(2.2.3)式和轴向拉压杆元(2.2.1)式组合得到.

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ N_{yi} \\ M_{zi} \\ T_{xj} \\ N_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} & 0 & -\frac{12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} \\ & & 4I_z & 0 & -\frac{6I_z}{l} & 2I_z \\ \text{对} & & & A & 0 & 0 \\ & & & & & -\frac{6I_z}{l} \\ & & & & & 4I_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2.2.6)$$

式中, 6×6 的方阵即为刚度矩阵.

(四) 平面板架(交叉梁系)杆元的刚度矩阵

板架杆元可由 xoz 平面内弯曲杆元(2.2.4)式和扭转杆元(2.2.2)式组合得到.

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ N_{zi} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ N_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} \frac{J_x}{2(1+\mu)} & 0 & 0 & -\frac{J_x}{2(1+\mu)} & 0 & 0 \\ & 4I_y & -\frac{6I_y}{l} & 0 & 2I_y & \frac{6I_y}{l} \\ & & \frac{12I_y}{l^2} & 0 & -\frac{6I_y}{l} & -\frac{12I_y}{l^2} \\ \text{对} & & & \frac{J_x}{2(1+\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & 4I_y & \frac{6I_y}{l} \\ & & & & & \frac{12I_y}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ w_i \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (2.2.7)$$

称

式中, 6×6 的方阵即为刚度矩阵; μ 为泊松比, $G = E/2(1 + \mu)$. 上述排列顺序是为了以后坐标转换矩阵 $[T]$ 与刚架杆元的坐标转换矩阵 $[T]$ 一致而重排的. 若在通常的板架计算中不计扭矩, 则 $J_x = 0$.

(五) 空间桁架杆元的刚度矩阵

与平面桁架情况类似, 空间桁架杆元的杆端力与杆端位移之间的关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ N_{yi} \\ N_{zi} \\ T_{xj} \\ N_{yj} \\ N_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{对} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} \quad (2.2.8)$$

称

式中, 6×6 的方阵即为刚度矩阵.

(六) 空间刚架杆元刚度矩阵

空间刚架杆元端点不受到约束的情况下可以产生三个线位移和三个角位移, 如图 2-2 所示. 该杆元受到拉压、扭转、 xoy 平面内弯曲和 xoz 平面内弯曲因素影响, 所以, 该杆元刚度矩阵由上述四种基本杆元组合生成. 可利用 (2.2.1)~(2.2.4) 式组合或“对号入座”, 其结果如 (2.2.9) 式, 简记为

$$\{F_{ij}\} = [K^e] \{d_{ij}\} \quad (2.2.9a)$$

式中, $[K^e]$ 为 (2.2.9) 式中 12 阶方阵, 为空间刚架杆元刚度矩阵.

§ 2.3 结构刚度方程

结构刚度方程相当于传统位移法的平衡方程. 为简单起见, 首先讨论连续梁, 由于杆元局部坐标系与结构坐标系方向一致, 故不必进行坐标转换. 下面研究结构的平衡方程, 可以用最小势能原理或虚位移原理建立, 但这里直接对节点建立平衡方程, 更易理解. 故先对节点力稍做说明.

一、节点力

1. 由节点位移引起的节点力— $\{F_{ij}\}$

上节已求得杆元 ij 的杆端力与节点位移间的关系为 $\{F_{ij}\} = [k^e]\{d_{ij}\}$, 即

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}$$

式中

$$\{F_i\} = [K_{ii} \quad K_{ij}] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix} \quad \{F_j\} = [K_{ji} \quad K_{jj}] \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \end{Bmatrix}$$

由于节点力与杆端力互为作用力与反作用力, 故因节点位移引起的节点力为 $-\{F_{ij}\}$.

2. 杆元上荷载引起的等效节点力— $\{\bar{P}_{ij}\}$

如果杆元上作用有分布荷载或集中力, 则杆端力应为 $\{F_{ij}\}$ 加上相应的固端力 $\{\bar{P}_{ij}\}$.

$$\{\bar{P}_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \bar{P}_i \\ \bar{P}_j \end{Bmatrix}$$

例如, 对于在 xoy 平面内的弯曲杆元, 固端力为

$$\{\bar{P}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \end{Bmatrix} \quad \{\bar{P}_j\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix}$$

3. 作用在节点上的集中外力(矩) $\{P_i\}$

4. 对于支座处节点还有支反力 $\{R_i\}$

一般情况下, 节点力包括 $-\{F_{ij}\}$ 和 $-\{\bar{P}_{ij}\}$, 以及节点上所受的集中外力或支反力. 除了 $-\{F_{ij}\}$ 之外, 我们把其余的力用符号 $\{P_{ij}\}$ 概括之, 并称为节点的外荷载向量, 因此, 节点力为

$$-\{F_{ij}\} + \{P_{ij}\} = - \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_i \\ P_j \end{Bmatrix} \quad (2.3.1)$$

二、节点力的平衡方程

有了上述节点力的概念, 即可对结构各节点建立平衡方程式. 在矩阵法中, 我们先不管结构的实际支座与约束, 而是先将各节点的平衡方程式全部列出, 然后再考虑约束处

理. 下面先讨论图 2-7 所示连续梁结构, 选取右手坐标系 $oxyz$. 图中 2 支座为弹性支座, 是节点位移 v_i 与支反力 R_i 成正比的支座, 即 $v_i = -R_i/k_i$, k_i 为其刚性系数, 3 支座为弹性固定端, 是弹固端转角 θ_j 与弹固端弯矩 M_{Rj} 成正比的支座, 即 $\theta_j = -M_{Rj}/k_j$, k_j 为其刚性系数.

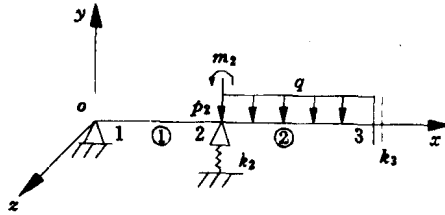


图 2-7

设杆元 1~2 为(1), 2~3 为(2), 分别有

$$\begin{cases} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{cases} d_1 \\ d_2 \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 \\ d_2 \end{cases} = \begin{cases} v_1 \\ \theta_{z1} \end{cases} \quad \begin{cases} d_2 \\ d_3 \end{cases} = \begin{cases} v_2 \\ \theta_{z2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{cases} = \begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{cases} d_2 \\ d_3 \end{cases} \quad \begin{cases} d_3 \\ d_2 \end{cases} = \begin{cases} v_3 \\ \theta_{z3} \end{cases}$$

节点 1 的平衡方程式为

$$- \{F_1^{(1)}\} + \{P_1\} = 0$$

即

$$[K_{11}^{(1)} \quad K_{12}^{(1)}] \begin{cases} d_1 \\ d_2 \end{cases} = \{P_1\} \quad (2.3.2)$$

式中

$$\{P_1\} = \begin{cases} R_1 \\ 0 \end{cases}$$

R_1 为支座 1 的支反力.

节点 2 因汇交杆① 和 ②, 故其平衡方程式为

$$- \{F_2^{(1)}\} - \{F_2^{(2)}\} + \{P_2\} = 0$$

即

$$[K_{21}^{(1)} \quad K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} \quad K_{23}^{(2)}] \begin{cases} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{cases} = \{P_2\} \quad (2.3.3)$$

式中

$$\{P_2\} = \begin{cases} -\bar{N}_{y2}^{(2)} - p_2 + R_2 \\ -\bar{M}_{z2}^{(2)} + m_2 \end{cases}$$

式中, $\bar{N}_{y2}^{(2)}$ 及 $\bar{M}_{z2}^{(2)}$ 分别为杆元②在 2 端的固端剪力与固端弯矩, p_2 及 m_2 分别为作用于 2 节点的集中力和力矩, R_2 为支座 2 的支反力.

节点 3 的平衡方程式为

$$- \{F_3^{(2)}\} + \{P\} = 0$$

即

$$[K_{32}^{(2)} \quad K_{33}^{(2)}] \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \{P_3\} \quad (2.3.4)$$

式中

$$\{P_3\} = \begin{Bmatrix} -\bar{N}_{y3}^{(2)} + R_3 \\ -\bar{M}_{z3}^{(2)} + M_{R3} \end{Bmatrix}$$

M_{R3} 为支座3的支反力矩。

将(2.3.2)、(2.3.3)、(2.3.4)三式合并,得整个结构的全部节点的平衡方程式

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\ 0 & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (2.3.5)$$

$6 \times 6 \quad 6 \times 1 \quad 6 \times 1$

可简记为

$$[K]\{D\} = \{P\} \quad (2.3.6)$$

上式称为结构的总刚度方程,它代表了整个结构中节点的平衡条件.式中 $[K]$ 称为结构刚度矩阵或总刚度矩阵,它联系了节点位移 $\{D\}$ 与节点外力 $\{P\}$ (或称总载向量)间的关系.

由所得的结果不难发现,结构刚度矩阵是由各杆元刚度矩阵的子矩阵按节点号码排列而成,子矩阵下标的数字决定了它在总刚度矩阵中的位置:第一个下标决定了它在总刚度矩阵中的行,第二个下标决定了它在总刚度矩阵中的列,两个下标相同的子矩阵在总刚度矩阵的同一位置相加.这一做法叫做子矩阵“对号入座”组成总刚度矩阵.同理,组成了节点外力向量 $\{P\}$,即将节点上的集中外力及杆元上荷载的等效节点力“对号入座”。

三、结构刚度矩阵的性质

结构刚度矩阵 $[K]$ 是节点外力 $\{P\}$ 与节点位移 $\{D\}$ 之间的关系矩阵,它与组成结构的杆元的刚度有关,与外荷载及支座无关.其中的任意元素 k_{rs} ,表示第 s 个节点位移分量为1而其余节点的位移分量为零时,对第 r 个节点力分量所产生的影响.总刚度矩阵有如下性质:

- (1) 结构刚度矩阵是对称方阵, $k_{ij} = k_{ji}$, 且 $k_{ii} > 0$.
- (2) 结构刚度矩阵是奇异矩阵,引入边界条件之前,不可求逆.

(3) 结构刚度矩阵是一个带状稀疏矩阵.非零元素分布在主对角线两侧,形成带状区域.带状区域的最大宽度叫做“带宽”.带状区域以外的元素及带状区域中的一些元素均为零,形成了稀疏矩阵.程序设计时,我们只需存储“半带宽”(HBW)包括主对角线上的非零元素.为节约计算机内存,总刚度矩阵的带状宽度越小越好,这就需要合理地编排节点的号码.因为结构中各节点仅与它相邻的节点(通过杆元相连的节点)直接发生力与位移的关系,因此杆元两端节点号的差值越小,则形成结构刚度矩阵的带状宽度越小.一般沿结构短方向编号,往长方向逐步推进.如图2-8所示,以图2-8(a)为好.大型结构尚应进行带宽优化处理.