本书根据 Gerald B. Folland 写的《Introduction to Partial Differential Equations》一书(美国 Princeton 大学出版社 1976 年出版)译出.

本书的特点是兼顾偏微分方程理论的古典问题和现代方法两个方面. 通过阅读本书和书后一些文献,学生能较容易地达到偏微分方程理论的前沿。

本书可用作偏微分方程理论的选修课和研究生教材或参考书。

偏微分方程引论

[美] Gerald B. Folland

齐民友　蹇素雯　程少兰
罗华珪　宋开泰　吴方同　译

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
上海群众印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 8.375　字数 199,000
1988 年 1 月第 1 版　1988 年 8 月第 1 次印刷
印数 00,001—3,410

ISBN 7-04-001635-4/O·684

定价 2.55 元

目　录

第 0 章

预备知识

这章的目的是规定一些全书通用的术语，同时介绍一些未包含在序言中提到的预备知识里的分析工具．正文从第一章开始．

A. 记号和定义

欧氏空间中的点和集合

$\mathbf{R}$ 表示实数域，$\mathbf{C}$ 表示复数域，我们将在 $\mathbf{R}^n$ 内工作，n 表示维数．$\mathbf{R}^n$ 内的点一般用 x，y，ξ，η 来表示；x 的坐标是$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$．有时，x_1，x_2，$\cdots$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的点列，而不是坐标，但是，总可以从上下文明显地看出，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是表示 $\mathbf{R}^n$ 内一点，还是表示 n 重坐标函数，偶而也会有些混淆．然而，要有系统地采用一种更精确的记号是太麻烦了．读者应该小心，当我们考虑的坐标系不是标准的坐标系时，将会出现这种混淆．

设 U 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集，则 $\overline{U}$ 表它的闭包，∂U 是它的边界．**区域**一词意指一开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$，而不必连通，但要求

$$\partial\Omega=\partial(\mathbf{R}^n-\overline{\Omega}),$$

即 Ω 没有"内边界点"．

设 x 和 y 是 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 内的点，我们令

$$x\cdot y=\sum_1^n x_j\overline{y}_j\left(=\sum_1^n x_j y_j,\ \text{如 } x,\ y \text{ 是实的}\right),\text{而且}$$

$$|x|=(x\cdot x)^{1/2},$$

对球面和(开)球我们用下面的记号：设 $x\in\mathbf{R}^n$ 及 $r>0$，

$$S_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n;\ |x-y|=r\},$$

$$B_r(x)=\{y\in\mathbf{R}^n;\ |x-y|<r\}.$$

测度和积分

函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 的子集 Ω 上相对于勒伯格测度的积分表示为 $\int_\Omega f(x)dx$，或简单地记为 $\int_\Omega f$. 假如积分符号没有下标，积分便理解为展布在 $\mathbf{R}^n$ 上. 设 S 是一光滑超曲面(参看 B 节)，S 上的自然的欧几里德测度表为 $d\sigma$；于是 f 在 S 上积分是 $\int_S f(x)d\sigma(x)$，或写作 $\int_S fd\sigma$，甚至写作 $\int_S f$. 于是 $d\sigma$ 的意义依赖于 S，但这不会引起混淆.

设函数 f 和 g 的乘积在 $\mathbf{R}^n$ 上是可积的，有时我们记

$$\langle f,g\rangle=\int fg,\quad (f,g)=\int f\overline{g},$$

这儿 $\overline{g}$ 是 g 的共轭复数，只有当我们直接和希尔伯特空间 L^2 打交道时，才采用厄尔米特对偶 (f,g)，而双线性对偶 $\langle f,g\rangle$ 用得更广泛些：参看第 E 节.

重指标和导数

设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是非负整数的 n 元组，我们称 α 为一个**重指标**. 我们定义

$$|\alpha|=\sum_1^n\alpha_j,\quad \alpha!=\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots\alpha_n!.$$

假使 $x\in\mathbf{R}^n$，我们令

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}.$$

$\mathbf{R}^n$ 上的导数将一般地简记为

$$\partial_j=\partial/\partial x_j.$$

于是高阶导数可用重指标方便地表示为

$$\partial^\alpha=(\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial/\partial x_2)^{\alpha_2}\cdots(\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}.$$

特别要注意，在 $\alpha=0$ 时，∂^α 是恒等算子. 采用了这样的记号，则当 u 是一个可微函数时，∂u 自然就表示函数的 n 元组 $(\partial_1 u,\ \partial_2 u,\ \cdots,\ \partial_n u)$；然而，我们将采用更通用的记号

$$\operatorname{grad} u=(\partial_1 u,\ \partial_2 u,\ \cdots,\ \partial_n u)$$

来代替它.

假设 $\mu=(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n)$ 是集 $V\subset\mathbf{R}^n$ 上的连续函数的 n 元组，而 u 是可微函数，我们用

$$\partial_\mu u(x)=\mu(x)\cdot\operatorname{grad} u(x)=\sum_1^n\mu_j(x)\partial_j u(x)$$

定义在 V 上的方向导数 $\partial_\mu u(x)$.

函数空间

假设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个子集，$C(\Omega)$ 表示在 Ω 上连续函数的空间（对 Ω 上的相对拓扑而言连续）. 设 Ω 是开的，k 是一个正整数，$C^k(\Omega)$ 将表示所有在 Ω 上具有 k 阶连续导数的函数空间，而 $C^k(\overline{\Omega})$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中所有使得 u 及 $\partial^\alpha u(|\alpha|\leqslant k)$ 能连续延拓到闭包 $\overline{\Omega}$ 上的全体函数所成的空间. 又令 $C^\infty(\Omega)=\bigcap_1^\infty C^k(\Omega)$ 及 $C^\infty(\overline{\Omega})=\bigcap\limits_1^\infty C^k(\overline{\Omega})$.

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是开集，且 $0<\alpha<1$，用 $C^\alpha(\Omega)$ 表示在 Ω 上满足具有指数 α 的局部一致的李普希兹(Lipschitz)(或赫尔德(Hölder))条件的连续函数的空间. 即是说，$u\in C^\alpha(\Omega)$ 是指对于任意紧集 $V\subset\Omega$，存在常数 $C>0$，使得对所有充分接近于零的 $y\in\mathbf{R}^n$，有

$$\sup_{x\in V}|u(x+y)-u(x)|\leqslant C|y|^\alpha.$$

（注意，由中值定理，对所有 $\alpha<1$ 有 $C^1(\Omega)\subset C^\alpha(\Omega)$）. 设 k 是一

个正整数，$C^{k+\alpha}(\Omega)$表示所有的$u\in C^k(\Omega)$，且对$|\beta|\leqslant k$的β有$\partial^\beta u\in C^\alpha(\Omega)$所成的集合.（或者，与此等价，只对$|\beta|=k$的$\beta$作此要求）.

函数u的**支集**用 supp u 表示，它是使u为 0 的最大开集的余集. 设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，我们用$C_0^\infty(\Omega)$表示在$\mathbf{R}^n$上属于$C^\infty$，且支集是$\Omega$内的紧集的全体函数组成的空间.（特别，假设$\Omega$是开集，则这种函数在$\partial\Omega$附近为零.）

空间$C^k(\mathbf{R}^n)$可简单地表示为C^k，C^∞，$C^{k+\alpha}$，C_0^∞也作同样的理解.

函数$u\in C^\infty(\Omega)$称为在Ω内**解析**，如果在Ω内每一点附近它能展成收敛的幂级数. 也就是说，所谓u在Ω上解析，即是对于任意$x\in\Omega$，有$r>0$存在，使得对所有$y\in B_r(x)$有

$$u(y)=\sum_{|\alpha|\geq 0}\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}\partial^\alpha u(x),$$

这级数在$B_r(x)$上绝对且一致收敛. 当讲到复解析函数时，常常用**全纯**这个词来代替解析.

施瓦兹(Schwartz)类 $\mathscr{S}=\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$是由这样的函数所组成的. 它们在$\mathbf{R}^n$上属于$C^\infty$，且各阶导数在无穷远处比$x$的任意次幂衰减得更快. 也就是说，$u\in\mathscr{S}$当且仅当$u\in C^\infty$且对所有重指标$\alpha$及$\beta$有

$$\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|x^\alpha\partial^\beta u(x)|<\infty.^*$$

日

B. 高等微积分中的一些结果

$\mathbf{R}^n$的子集S叫做$C^k(1\leqslant k\leqslant\infty)$类**超曲面**，假设对每一$x_0\in S$，存在一个包含$x_0$的开集$V\subset\mathbf{R}^n$及一个实值函数$\phi\in C^k(V)$，使得

---

* 译注：$\mathscr{S}$ 类函数时常称为急减函数.

grad ϕ 在 $S\cap V$ 上不为零，而且

$$S\cap V=\{x\in V;\ \phi(x)=0\}.^{*}$$

在这个情况下，由隐函数存在定理知，在 x_0 附近可对某坐标 x_i 求解方程 $\phi(x)=0$，而得

$$x_i=\psi(x_1,\ \cdots,x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,x_n),$$

ψ 是某个 C^k 函数. 因此可以用 C^k 变换

$$x\to(x',\ x_i-\psi(x'))$$

$$(x'=x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,x_n)^{**}$$

把 S 上的 x_0 的一个邻域映成超平面 $x_i=0$ 的一部分. 这个邻域也可用**参数形式**表示，即可看作 $\mathbf{R}^{n-1}$(坐标为 x')内一个开集在映射

$$x'\to(x_1,\ \cdots,x_{i-1},\ \psi(x'),\ x_{i+1},\cdots,\ x_n)$$

下的象，x' 可以看作是 S 上 x_0 邻域中的**局部坐标**.

把"C^k"改成解析，也有类似的讨论.

S，V，ϕ 意义如上所述，对每一个 $x\in S\cap V$，向量 grad $\phi(x)$ 在点 x 垂直于 S. 我们恒规定 S 是**可定向的**，也就是说，对于每一个 $x\in S$，已选定一个单位向量 $\nu(x)$，它关于 x 是连续变化的，而且在 x 垂直于 S^{***}. $\nu(x)$称 S 在 x 的**法向**. 显然在 $S\cap V$ 上我们有

$$\nu(x)=\pm\,\mathrm{grad}\ \phi(x)/|\mathrm{grad}\ \phi(x)|.$$

于是在 S 上 ν 是 C^{k-1} 函数. 特别，假使 S 是区域 Ω 的边界，我

* 译注：即是说 S 可以局部地但不一定是整体地用方程 $\phi(x)=0$ 来表示，这里 grad $\phi\neq0$.

** 译注：即是作变换 $y_j=x_j(j\neq i)$，$y_i=x_i-\psi(x')$，但并不将新坐标 y 写出，这样的记法是很常用的.

*** 译注：这里是要求 $\nu(x)$在整个 S 上存在，而不只是在某点 $x_0\in S$ 附近存在. 所谓连续变化包含这样的意思：当 x 在 S 沿任一闭路径绕行一周后 $\nu(x)$ 应该还原，而不只是 $\nu(x)$在一点附近连续. 因此，这样的 $\nu(x)$并不一定可以作出来，Möbius 带就是最著名的反例. 总之，可以定向是 S 的一个整体性质.

们常常这样选取 ν 的定向，使得 ν 指向 Ω 的外侧.

假设定义在 S 附近的函数 u 是可微的，于是我们用

$$\partial_\nu u=\nu\cdot\mathrm{grad}\ u$$

定义 u 在 S 上的**法向导数**. 我们先来计算球面 $S_r(y)$ 上的法向导数. 因为通过球心的直线垂直于球面，故有

(0.1) $\quad \nu(x)=(x-y)/r,$

$$\partial\nu=\frac{1}{r}\sum_1^n(x_j-y_j)\partial_j,\ \text{在}\ S_r(y)\text{上}.$$

以后我们将多次用到下面的命题：

(0.2) **命题** 设 S 是一个 $C^k(k\geqslant 2)$ 类的紧的可定向超曲面. 存在 S 的在 $\mathbf{R}^n$ 内的邻域 V 和数 $\varepsilon>0$，使得映射

$$F:(x,t)\longrightarrow x+t\nu(x)$$

是一个 $S\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 到 V 上的 C^{k-1} 同胚映射.

证明 (要点)：显然 F 是 C^{k-1} 的，再者，因为 ν 是 S 的法向，所以对每个 $x\in S$，F 的雅可比矩阵(关于 $S\times\mathbf{R}$ 上的局部坐标)在 $(x,0)$ 是非奇异的. 因此由逆映射定理，在 $(x,0)$ 的一邻域 W_x 上 F 是可逆的，于是对于某个 $\varepsilon(x)>0$ 有逆映射

$$F_x^{-1}:W_x\longrightarrow(S\cap W_x)\times(-\varepsilon(x),\varepsilon(x))$$

是 C^{k-1} 映射. 因为 S 是紧的，我们能够选取 $x_1,x_2,\cdots,x_N\in S$ 使得 W_{x_j} 覆盖 S，同时把这些映射 $F_{x_j}^{-1}$ 粘合起来，便得到 F 的一个从 S 的邻域 V 到 $S\times(-\varepsilon,\varepsilon)$ 的 C^{k-1} 逆映射，这儿

$$\varepsilon=\min\ \varepsilon(x_j).$$

命题(0.2)中的邻域 V 称为 S 的**管形邻域**. 把法向导数的定义推广到整个管形邻域 V 上对以后是方便的. 其作法是，假设 u 是 V 上的可微函数，对于 $x\in S$ 及 $-\varepsilon<t<+\varepsilon$，我们令

(0.3) $\quad \partial_\nu u(x+t\nu(x))=\nu(x)\cdot\mathrm{grad}\ u(x+t\nu(x)).$

为了我们的目的，将简单地把一个**向量场**看作是 $\mathbf{R}^n$ 的子集上

的 $\mathbf{R}^n$-值函数. 设 $\mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$是在开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 上一个可微向量场,我们定义它在 Ω 上的**散度** $\operatorname{div}\mu$ 为

$$\operatorname{div}\mu=\sum_1^n\partial_j\mu_j$$

用这个术语能够把一般的斯托克斯公式叙述成我们需要的形式:

(0.4) 散度定理 令 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是一个具有 C^1 边界 $S=\partial\Omega$ 的有界区域,并令 μ 是一个在 $\bar{\Omega}$ 上 C^1 类向量场,于是

$$\int_S \mu(y)\cdot\nu(y)d\sigma(y)=\int_\Omega \operatorname{div}\mu(x)dx.$$

每一个 $x\in\mathbf{R}^n-\{0\}$, 能唯一地表成 $x=ry$, 这里 $r>0$ 且 $y\in S_1(0)$——具体地说, $r=|x|$ 且 $y=x/|x|$, 公式 $x=ry$ 称为 x 的**极坐标表示**. 勒贝格测度的极坐标形式由

$$dx=r^{n-1}dr\,d\sigma(y)$$

给出,这儿 $d\sigma$ 是 $S_1(0)$上的曲面测度.

例如,假如 $0<a<b<\infty$ 及 $\lambda\in\mathbf{R}$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{a<|x|<b}|x|^\lambda dx&=\int_{S_1(0)}\int_a^b r^{n-1+\lambda}\,dr d\sigma(y)\\&=\omega_n(n+\lambda)^{-1}(b^{n+\lambda}-a^{n+\lambda})\qquad \text{设 } \lambda\neq-n,\\&=\omega_n\log(b/a)\qquad \text{设 } \lambda=-n,\end{aligned}$$

这里 ω_n 是 $S_1(0)$的面积(我们立刻就要来计算它). 作为一直接的推论,我们有:

(0.5) 命题 函数 $x\to|x|^\lambda$, 当且仅当 $\lambda>-n$ 时,在 0 的一个邻域内可积. 当且仅当 $\lambda<-n$ 时,在 0 的某个邻域的外部是可积的.

作为极坐标的另一个应用, 我们来计算也许是数学中最重要的定积分.

(0.6) 命题 $$\int_{\mathbf{R}^n} e^{-\pi|x|^2}\,dx=1.$$

证明：令
$$I_n=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}dx.$$
因为
$$\exp(-\pi|x|^2)=\exp(-\pi\sum_1^n x_j^2)=\prod_1^n \exp(-\pi x_j^2),$$
富比尼定理指出 $I_n=(I_1)^n$，或者等价地有 $I_n=(I_2)^{n/2}$。但是用极坐标，
$$I_2=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}\ rd\,rd\theta=2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr$$
$$=\pi\int_0^{\infty} e^{-\pi s}\,ds=\pi/\pi=1.$$
这个技巧之能起作用，是因为我们已经知道在 $\mathbf{R}^2$ 内 $S_1(0)$ 的"面积"是 2π。但是现在我们能反过来应用它对任意 n 计算 $\mathbf{R}^n$ 内的 $S_1(0)$ 的面积 ω_n。回忆对于 $\operatorname{Re}s>0$，**Γ 函数** $\Gamma(s)$ 定义为
$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{s-1}dt.$$
容易证明
$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\ \Gamma(1)=1,\ \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$$
(最后一个公式，用变量代换可化简为(0.6).)因此假设 k 是正整数，
$$\Gamma(k)=(k-1)!,\ \Gamma(k/2)=\frac{k-2}{2}\,\frac{k-4}{2}\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$
$$(k=\text{奇数}).$$
(0.7) **命题** $\mathbf{R}^n$ 内 $S_1(0)$ 的面积是
$$\omega_n=2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2).$$
证明 用极坐标来积分 $e^{-\pi|x|^2}$，且令 $s=\pi r^2$。
$$1=\int e^{-\pi|x|^2}dx=\int_{S_1(0)}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}r^{n-1}\,drd\sigma$$
$$=\omega_n\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}\ r^{n-1}dr=(\omega_n/2\pi^{n/2})\int_0^{\infty} e^{-s}s^{(n/2)-1}ds$$
$$=\omega_n\Gamma(n/2)/2\pi^{n/2}.$$

(注意，ω_n 总等于 π 的一个整数幂的有理数倍，尽管看起来不是这样.)

(0.8) 系 $\mathbf{R}^n$ 内 $B_1(0)$的体积是 $2\pi^{n/2}/n\Gamma(n/2)$.

证明 $$\int_{B_1(0)} dx=\omega_n\int_0^1 r^{n-1}\,dr=\omega_n/n.$$

(0.9) 系 对任何 $x\in\mathbf{R}^n$ 及 $r>0$, $S_r(x)$的面积是 $r^{n-1}\omega_n$, $B_r(x)$的体积是 $r^n\omega_n/n$.

C. 卷　　积

我们从测度空间(S,μ)上积分算子的一个一般定理开始，这个定理应该得到比现在更多的人的了解．在我们的应用中，S 或者是 $\mathbf{R}^n$ 或者是 $\mathbf{R}^n$ 中光滑超曲面.

(0.10) 推广的杨(Young)氏不等式 设(S,μ)是一个测度空间,且令$1\leqslant p\leqslant\infty$ 及 $C>0$. 假设 K 是一个在 $S\times S$ 上的可测函数,且使得对所有 $x\in S$ 有

$$\int_S|K(x,y)|\,d\mu(y)\leqslant C,$$

对所有 $y\in S$ 有

$$\int_S|K(x,y)|\,d\mu(x)\leqslant C,$$

并且假设 $f\in L^p(S)$. 于是由

$$Tf(x)=\int_S K(x,y)f(y)\,d\mu(y)$$

确定的函数几乎处处有定义,它属于 $L^p(S)$,且$\|Tf\|_p\leqslant C\|f\|_p$.

证明 如果 $p=\infty$,假设

$$\int_S|K(x,y)|\,d\mu(x)\leqslant C$$

是多余的，而证断是显然的. 如果 $p<\infty$, 设 q 是它的共轭指数,

即 $1/p+1/q=1$. 于是由赫尔德不等式

$$|Tf(x)|\leqslant\left(\int_S|K(x,y)|d\mu(y)\right)^{1/q}$$
$$\times\left(\int_S|K(x,y)||f(y)|^p d\mu(y)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant C^{1/q}\left(\int_S|K(x,y)||f(y)|^p d\mu(y)\right)^{1/p}.$$

两端 p 次方并积分,由富比尼定理有

$$\int|Tf(x)|^p d\mu(x)\leqslant C^{p/q}\int_S\int_S|K(x,y)||f(y)|^p d\mu(y)d\mu(x)$$
$$\leqslant C^{p/q+1}\int_S|f(y)|^p d\mu(y).$$

再取 p 次方根,

$$\|Tf\|_p\leqslant C^{(1/p)+(1/q)}\|f\|_p=C\|f\|_p.$$

这就完成了定理的证明.

以后当我们说 L^p 时,若不规定指另外的空间,则恒指 $L^p(\mathbf{R}^n)$.

令 f 及 g 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数*. f 及 g 的**卷积** $f*g$ 用公式

$$f*g(x)=\int f(x-y)g(y)dy$$
$$=\int f(y)g(x-y)dy=g*f(x)$$

来定义(用变量代换 $y\to x-y$, 这两个积分是相等的). 关于卷积存在的基本定理是下面的

(0.11) **杨氏不等式** 假设 $f\in L^1$ 及 $g\in L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$,于是

$$f*g\in L^p \text{ 且 } \|f*g\|_p\leqslant\|f\|_1\|g\|_p.$$

证明 对于 $S=\mathbf{R}^n$ 及 $K(x,y)=f(x-y)$ 应用(0.10).

附注 从赫尔德不等式,设 $f\in L^q$ 及 $g\in L^p$. 这儿 $1/p+1/q=1$, 则显然有 $f*g\in L^\infty$, 且 $\|f*g\|_\infty\leqslant\|f\|_q\|g\|_p$, 从黎斯(Riesz)凸

* 评注:即在 $\mathbf{R}^n$ 的任一紧集上可积的函数.

性定理(参看 Stein-Weiss[27]),能引出杨氏不等式的下述推广:假设 $1\leqslant p, q, r\leqslant\infty$ 及 $(1/p)+(1/q)=(1/r)+1$,设 $f\in L^q$, $g\in L^p$,于是 $f*g\in L^r$ 且 $\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_q\|g\|_p$.

下一个定理是卷积的最重要用途之一的基础,在引入它之前,我们需要一个技巧性的引理. 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上一个函数且 $x\in\mathbf{R}^n$, 我们用 $f_x(y)=f(x+y)$ 定义函数 f_x.

(0.12) 引理 假设 $1\leqslant p<\infty$ 及 $f\in L^p$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\|f_x-f\|_p=0.$$

证明 如果 g 是一个具有紧支集的连续函数,则 g 是一致连续的,所以当 $x\to 0$ 时,$g_x\to g$ 是一致的. 因为对 $|x|\leqslant 1$, g_x 与 g 的支集可放在同一紧集内,由此推得 $\|g_x-g\|_p\to 0$, 现在给出 $f\in L^p$ 及 $\varepsilon>0$,选取具有紧支集的连续函数 g 使得 $\|f-g\|_p<\varepsilon/3$. 因此亦有 $\|f_x-g_x\|_p<\varepsilon/3$,所以

$$\begin{aligned}\|f_x-f\|_p&\leqslant\|f_x-g_x\|_p+\|g_x-g\|_p+\|g-f\|_p\\&<\|g_x-g\|_p+2\varepsilon/3.\end{aligned}$$

但是对于充分小的 x, $\|g_x-g\|_p<\varepsilon/3$,所以 $\|f_x-f\|_p<\varepsilon$.

附注 当 $p=\infty$ 时,这结果不真. 事实上,条件 $f_x\to f$ 是一致的,正好是使 f 是一致连续的条件.

(0.13) 定理 假设 $\phi\in L^1$ 及 $\int\phi(x)dx=a$, 对每个 $\varepsilon>0$, 定义函数 ϕ_ε 为 $\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon)$. 设 $f\in L^p$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, 于是如果 $p<\infty$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时,按 L^p 范数有 $f*\phi_\varepsilon\to af$. 如 $f\in L^\infty$ 且 f 在集 V 上是一致连续的,于是在 V 上,当 $\varepsilon\to 0$ 时,一致地有

$$f*\phi_\varepsilon\to af.$$

证明 用变量代换 $x\to\varepsilon x$. 我们看到,对所有 $\varepsilon>0$ 有

$$\int\phi_\varepsilon(x)dx=a.$$

因此

$$f*\phi_\varepsilon(x)-af(x)=\int[f(x-y)-f(x)]\phi_\varepsilon(y)dy$$
$$=\int[f(x-\varepsilon y)-f(x)]\phi(y)dy.$$

设$f\in L^p$，且 $p<\infty$，对积分应用三角不等式(积分看作和的极限)得到

$$\|f*\phi_\varepsilon-af\|_p\leqslant\int\|f_{-\varepsilon y}-f\|_p|\phi(y)|dy.$$

但是 $\|f_{-\varepsilon y}-f\|_p$ 以 $2\|f\|_p$ 为界，且对于每个 y，由命题(0.12)，当 $\varepsilon\to0$ 时，$\|f_{-\varepsilon y}-f\|_p\to0$，因此从勒贝格控制收敛定理得到所要求的结果。

另一方面，假设$f\in L^\infty$，且在V上一致连续。已给$\delta>0$，选取一紧集W使得

$$\int_{\mathbf{R}^n-W}|\phi|<\delta.$$

于是 $$\sup_{x\in V}|f*\phi_\varepsilon(x)-af(x)|$$
$$\leqslant\sup_{x\in V,y\in W}|f(x-\varepsilon y)-f(x)|\int_W|\phi|+2\|f\|_\infty\delta.$$

右端第一项，当 $\varepsilon\to0$ 时趋于0，再用 δ 的任意性，便得$f*\phi_\varepsilon$在V上一致地趋于f。

假设 $\phi\in L^1$ 且 $\int\phi(x)dx=1$，上面定义的函数族$\{\phi_\varepsilon\}$叫做一个**恒等元逼近**(*approximation to the identity*)。它的好处在于：适当地选取ϕ，就能给出具有很好的性质的函数 $f*\phi_\varepsilon$。特别是：

(0.14) **定理** 设$f\in L^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$，而$\phi$在施瓦兹函数类$\mathscr{S}$中，则$f*\phi\in C^\infty$且对于所有的$x$有

$$\partial^\alpha(f*\phi)=f*\partial^\alpha\phi.$$

证明 设 $\phi\in\mathscr{S}$，于是对任意 q，每个导数 $\partial^\alpha\phi$ 都在 L^q 内，特别当 $(1/p)+(1/q)=1$ 时是如此. 由赫尔德不等式，积分

$$f*\partial^\alpha\phi(x)=\int f(y)\partial^\alpha\phi(x-y)dy$$

在 $\mathbf{R}^n$ 上绝对且一致收敛. 所以可以交换微分与积分的次序. 便得

$$\partial^\alpha(f*\phi)=f*\partial^\alpha\phi.$$

取 $\phi\in C_0^\infty$，可得更精确的结果. 在这种情形，仅需假设 f 为局部可积，即可使 $f*\phi$ 有定义，用同样的讨论可得 $f*\phi\in C^\infty$.

因为 C_0^∞ 函数的存在与否并不是完全显然的，我们暂时停止向前讨论，先来构造一些这样的函数. 首先，用下式来定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 f：

$$f(t)=e^{1/(t^2-1)}\quad(|t|<1),\ =0\quad(|t|\geqslant1).$$

于是 $f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$，所以 $\psi(x)=f(|x|^2)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上是 C^∞ 的，支集在 $\overline{B_1(0)}$ 内的非负函数. 特别，$\int\psi>0$，所以 $\phi=\psi/\int\psi$ 是一个 C_0^∞ 函数，而且 $\int\phi=1$. 由此可以得出，存在大量的 C_0^∞ 函数，证明如下：

(0.15) 命题 设 f 的支集在 $V\subset\mathbf{R}^n$ 内，g 的支集在 $W\subset\mathbf{R}^n$ 内，则 $(f*g)(z)$ 的支集在 $\{z;\ z=x+y,\ x\in V,\ y\in W\}$ 内.

证明 作为练习.

(0.16) 定理 对于 $1\leqslant p<\infty$，C_0^∞ 在 L^p 内稠密.

证明 选取

$$\phi\in C_0^\infty,\qquad 且\int\phi=1,\quad 令\ \phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon).$$

设 $f\in L^p$ 有紧支集，从(0.14)及(0.15)得到 $f*\phi_\varepsilon\in C_0^\infty$，从(0.13)可得在 L^p 内 $f*\phi_\varepsilon\to f$. 但是具有紧支集的 L^p 函数在 L^p 内稠密. 证明完成.

下面的定理，是另一个有用的构造方法：

(0.17) **定理** 设 $V\subset\mathbf{R}^n$ 是紧的，$\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是开的，并假设 $V\subset\Omega$。于是存在 $f\in C_0^\infty(\Omega)$ 使得在 V 上 $f=1$ 且处处有

$$0\leqslant f\leqslant 1.$$

证明 令 $\delta=\inf\{|x-y|;\ x\in V,\ y\notin\Omega\}$，由于 V 和 Ω 的假设，有 $\delta>0$。令 $U=\{x;\ 对于某个\ y\in V,\ |x-y|<\delta/2\}$。于是 $V\subset U$，$\overline{U}\subset\Omega$。令 χ 是 U 的特征函数，选取非负函数 $\phi\in C_0^\infty(B_{\delta/2}(0))$ 使得 $\int\phi=1$。于是我们可以取 $f=\chi*\phi$，这个简单的验证留给读者去完成。

现在我们能够证明"一的分割"(*partition of unity*)的存在性。下面我们只叙述对于紧集的结果，这对我们已完全够用了，然而在更一般的情况下，它们仍是正确的。

(0.18) **引理** 令 $\overline{\Omega}\subset\mathbf{R}^n$ 是紧的，$V_1, V_2, \cdots, V_N$ 是开集且 $\overline{\Omega}\subset\bigcup_1^N V_j$。则存在开集 $W_1, W_2, \cdots, W_N$ 使得

$$\overline{W}_j\subset V_j\ 且\ \overline{\Omega}\subset\bigcup_1^N W_j.$$

证明 对于任给 $\varepsilon>0$，令 V_j^ε 是 V_j 内的使与 $\mathbf{R}^n-V_j$ 的距离大于 ε 的点的集合。显然 V_j^ε 是开的，且 $V_j^\varepsilon\subset V_j$。我们断言，如果 ε 充分小，则有 $\overline{\Omega}\subset\bigcup_1^N V_j^\varepsilon$。如果不然，对于任意 $\varepsilon>0$，都存在 $x_\varepsilon\in\overline{\Omega}-\bigcup_1^N V_j^\varepsilon$。因为 $\overline{\Omega}$ 是紧的，当 $\varepsilon\to 0$ 时，x_ε 有一个聚点 $x\in\overline{\Omega}$，但是这样一来，$x\in\overline{\Omega}-\bigcup_1^N V_j$，而这是荒谬的。

(0.19) **定理** 令 $\overline{\Omega}\subset\mathbf{R}^n$ 是紧的，$V_1, V_2, \cdots, V_N$ 是有界开集且使得 $\overline{\Omega}\subset\bigcup_1^N V_j$。则存在函数 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_N$ 使得在 $\overline{\Omega}$ 上 $\sum_1^N\zeta_j=1$，其中 $\zeta_j\in C_0^\infty(V_j)$，而且 $0\leqslant\zeta_j\leqslant 1$。

证明 如在命题(0.18)中那样选取开集 $W_1, \cdots, W_N$，并选取 $\phi_j\in C_0^\infty(V_j)$ 使得 $0\leqslant\phi_j\leqslant 1$ 且在 W_j 上 $\phi_j=1$。(由定理(0.17)，因为 $\overline{W}_j$ 是紧的，这是可以做到的。) 于是在 $\overline{\Omega}$ 上 $\sum_1^N\phi_j\geqslant 1$，所以我们可以取