

岩波講座 基礎工学 2

電磁気学 I

岡村総吾 著



岩波書店

71.2)
001
=8

岩波講座 基礎工学 2

電 磁 気 学

I

岡 村 総 吾

18. 18,
24/2/6



岩波講座 基礎工学 2 電磁気学 I (全19巻／第8回配本)

1968年9月16日 第1刷発行

東京都千代田区神田一ツ橋2-3 株式会社 岩波書店／精興社印刷・松岳社製本

は じ め に

電磁気学は古くから力学と共に、物理学の基礎となる重要な学問として知られている。また工学の分野でも、特に電気工学の分野では、電磁気学を最も基礎的な学科として重要視し、多くの優れた先生方が、いろいろ特徴のある立派な講義をしてこられた。したがって電磁気学に関しては物理学者や電気工学者によって数多くの不朽の名著が出版されており、今更浅学非才の著者が新たに一書を加える必要はないような気がする。『基礎工学』の編集にあたって、いろいろ議論の末『電磁気学』をその一部門に加えることになり、著者がその執筆を引き受けることになったとき、まず考えたのは以上のことであった。しかし、このように電磁気学の名著が多数出版され、沢山の名講義が方々で行なわれているにもかかわらず、なお多くの学生が電磁気学を十分理解し得ないでいることも事実である。また、これをすっきりと体系づけようとする、いろいろ困難が多いことにも気がついた。したがって、電磁気学の講義にも、まだまだ多くの工夫をこらすべき余地があると思い、執筆に決意した次第である。

一般に電磁気学が理解しにくいのは、電気・磁気現象が目に見えなくて、抽象的であるため、具体的なイメージが浮かびにくいからであろう。電気力線や電束によって電界の様子を理解し、磁力線や磁束によって磁界の性質を会得することは、単に電気現象や磁気現象の勉強にとどまらず、工学一般の勉強に非常に必要な基礎的考え方の修得になることと思う。

本講においては、初学者になるべく理解し易いように努めながらも、一貫した体系で電磁気学を学習することを工夫した。すなわち静電気学におけるクーロンの法則を出発点として、すべての電気・磁気現象を導くことにした。したがって、電界、電流、磁界あるいはそれらの相互作用による電磁界の現象は、本質的には静止した電荷および運動している電荷にもとづく現象として、特殊相対性理論を用いて、クーロンの法則から導くことができるという立場をとっている。しかし理論的にすっきりした体系を作ることに努力しすぎると、理解

が困難になり、また工学的に必要な明確なイメージを与えにくくなるので、一応静電界、電流、静磁界、電磁誘導、電磁波などをつぎつぎに説明しながら、ところどころでそれらを一貫した体系にまとめ得ることを述べるようにした。

電磁気学は電気・磁気現象を巨視的に説明するものであることは勿論であるが、最近では物性論の初歩的知識が普及しているから、誘電体、電流、磁性体などの物質に関係した部分では、抽象的な説明よりも、簡単な物性論的モデルから具体的に現象を導く方が理解し易いと考えて、そのような工夫をしたつもりである。勿論これはあくまでも、電磁気学の法則を理解し易いようにするための手段であって、物性論としては厳密さを欠く点が多くあると思う。この点については本講座の材料関係の講義を参考にされたい。

本講は大学初年度で理解しやすいようにする計画であったから、難解な数学を使用することは避けるようにしたが、簡潔にしてかつ厳密に内容を表現する必要から、ベクトル演算を使用せざるを得なかった。特に重要なベクトル演算法については付録に簡単な説明を加えたが、ベクトル演算の理解に苦しむ読者は、専門書によって、予備知識を得ておかれることをおすすめしたい。

本講の執筆に当たって数多くの電磁気学の書物を参考にしたが、特に東京大学の山田直平先生の“電気磁気学”には教えられる所が多かった。クーロンの法則を出発点とする体系については、E. G. Cullwick 著 *The Fundamentals of Electro-magnetism*, L. Page & N. I. Adams 著 *Electrodynamics*, R. S. Elliott 著 *Electromagnetics* が大いに参考になった。またこの講義の計画当初から編集委員の各位その他の方々より、いろいろ貴重な御意見を得たが、特に古賀逸策先生からは講義ドラフトについて詳細な御意見御叱正を戴いた。著者の努力の及ばなかったため、十分御期待に沿えなかったことをお詫びすると共に深く謝意を表する次第である。

目 次

はじめに

第1章 真空中の静電界

1. 1 電 荷	1
1. 2 クーロンの法則	2
1. 3 電 界	7
1. 4 電 位	13
1. 5 ガウスの定理	21
1. 6 ポアソンの方程式とラプラスの方程式	25
1. 7 導体系の静電界	32
1. 8 静 電 容 量	45
1. 9 コンデンサー	51
1. 10 導体系の静電エネルギーおよび導体系に働く力	54
演 習 問 題	63

第2章 誘 電 体

2. 1 誘 電 体	65
2. 2 分 極	68
2. 3 電界と電束, 誘電率	75
2. 4 誘電体を含む系の静電界	82
2. 5 誘電体を含む系の静電エネルギーと, 誘電体に働く力	91
2. 6 誘電体の特殊現象	97
演 習 問 題	105

付 録 I

第1章

真空中の静電界

真空中の静電界の性質を知るために、まず二つの点電荷の間に働く力に関するクーロンの法則から出発し、多数の点電荷や連続した電荷にもとづく電界を求めた。次にこのような電界は電位から導くことができ、電荷分布の与えられた場合には、まず電位を求めて、電位の傾きとして電界を求める方が容易であることを説明する。またクーロンの法則が成立することから、正電荷から出発して負電荷に至る電束の概念を用いると静電界の理解が容易になることを示し、さらに静電界中の電位は、ラプラスの方程式またはポアソンの方程式を満足するような分布をすることを導いている。

次に導体系の静電界を求める方法を例を用いて具体的にしめし、また静電容量の概念、導体系の静電エネルギーおよび導体に働く力について説明を行なった。

1.1 電 荷

電気現象は摩擦電気等の現象によって、太古から多くの人々の注意をひいていた。またこの電気には二つの種類があって、同種の電気を帯びた物体は反発し合い、異種の電気を帯びた物体は吸引しあうことも判明した。このように物体が電気を帯びるのは正または負の電荷(electric charge)がたまると考えた。今日の物理学の知識では物質を構成する原子(atom)は原子核(nucleus)といくつかの電子(electron)とから成り立っており、電子は最小単位の負の電荷 $-e$ を、原子核はその整数倍(核外電子の数だけの倍数)の正の電荷を持っているので、全体として中性であるが、何等かの理由で電子が他の物体に移動すると、電子の不足した物体は正に帯電し、電子の過剰になった物体は負に荷電すると考えられる。

電荷の大きさ(電気量)の単位はクーロン [C][†]で表わされるが、電子の電荷の大きさ e は

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ [C]}$$

という非常に小さい量であるから、電磁気学においては電荷が有限の素量から成り立っていると考える必要がなく、連続的な量として考えるのが普通である。

1.2 クーロンの法則

a) 帯電体の間に働く力

電荷を帯びた物体(帯電体)がお互いに力をおよぼし合うことは、多くの人々が観測しているが、その結果を整理すると、次のようになる。

- (1) 同種の電荷を帯びた物体の間には斥力が作用する。
- (2) 異種の電荷を帯びた物体の間には引力が作用する。
- (3) 帯電した二つの小さい物体の間に働く力は、それぞれの物体の中心を結ぶ直線上にある。
- (4) 帯電した二つの物体の間に働く力はおおのこの電荷の大きさの積に比例する。
- (5) 以上の力の大きさは二つの物体間の距離の2乗に反比例する。

このような関係は1785年にクーロン(C. A. Coulomb)が詳細に実験して報告している^{††}。彼は同種の電荷を持った物体の間の斥力については、ねじり秤を用いて測定し、約5%の誤差で、距離の2乗に反比例することを見出した。また異種の電荷を持った物体のあいだの引力については、振動子の周期の測定から、同様の関係を見出している。このような彼の発表が認められて、この法則を**クーロンの法則**(Coulomb's law)といい、このような力を**クーロン力**(Coulomb force)と呼んでいる。

もっとも、このような関係はクーロンよりも早く、幾人かの人々が気付いていたのであって、たとえばフランクリン(B. Franklin) (1706~1790)、ブリー

[†] 電気量の単位クーロンは後述する電流の単位アンペア[A]から導かれる。すなわち1Cは1Aの不变電流が1秒間に運ぶ電気量である。なお、何故このような単位を用いるかについては付録III. 1電気単位系を参照されたい。

^{††} 付録I. 1クーロンの実験参照。

スレイ (J. Priestley) (1733~1804) 等は 1775 年ないし 1776 年ごろ、帯電体間に働く力が物体間の引力のように、距離の 2 乗に反比例することを推論しているし、また 1778 年にはロビンソン (J. Robinson) が独特の電位計を用いて、帯電体間の力を測定してほぼ距離の 2.06 乗に反比例するという結果を得ている。また 1772~1773 年に、キャベンディッシュ (H. Cavendish) は中空の金属球に電荷を与えても、その内部に電荷が存在しないことを確かめて、間接的にクーロンの法則を証明し、逆二乗法則の指数が 2 ± 0.02 であることを確かめている。同様の方法を用いて後にマックスウェル (J. C. Maxwell) とマッカリスタ (D. McAlister) が 1878 年に実験を行なって、べき指数を $\pm 1/21600$ の精度で求め、また 1936 年にはブリントン (S. J. Plimpton) とロートン (W. E. Lawton) とが $\pm 2 \times 10^{-9}$ の精度を得ている。

b) 二つの点電荷の間に働く力

このような帯電体間に働く力は、物体の電荷がなくなると消滅するから、電荷と電荷の間に力が働くために生じるものであると考えることができる。従って帯電体間に働く力から類推して次の関係が成立すると思われる。

- (1) 同種の点電荷の間には斥力が作用する。
- (2) 異種の点電荷の間には引力が作用する。
- (3) 二つの点電荷の間に働く力は、電荷の存在する点を結ぶ直線上にある。
- (4) 二つの点電荷の間に働く力は、各々の電荷の大きさの積に比例する。
- (5) 以上の力の大きさは二つの点電荷間の距離の 2 乗に反比例する。

この関係を数式で表わしてみよう。すなわち図 1.1 のように、A, B 二点にある真空中の点電荷を考えると、 Q_1 に働く力 F_{12} および Q_2 に働く力 F_{21} は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} i_{12} \\ F_{21} &= k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} i_{21} = -k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} i_{12} \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

ただし Q_1, Q_2 : A 点および B 点にある電荷の大きさ

† 付録 I.2 キャベンディッシュの実験参照。

r : AB間の距離

i_{12} : B点からA点に向かう単位ベクトル

i_{21} : A点からB点に向かう単位ベクトル

k : 比例定数

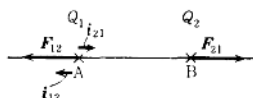


図 1.1 二つの点電荷の間に働く力

ところが(1.1)に示すクーロンの法則は、前に述べたような実験だけによって厳密に証明することは不可能である。すなわち実験には測定精度の限界があるから、どんな精密な実験を行なっても、力 F_{12} の方向がベクトル i_{12} とごくわずかなずれしているかもしれないとか、 k の値が Q_1, Q_2 の値によってごくわずかな変化するかも知れないとか、距離の2乗に反比例するのではなくて、距離の n 乗 (n は2よりごくわずかな異なる値) に反比例しているのかも知れないとかいうような疑問を解決することはできない。したがって、クーロンの法則は実験事実からわれわれが推論して、存在すると考えた公理であって、理論的に証明したり、実験的に導いたりできるものではない。しかしこの法則を受け入れて、これを出発点として、以下本章に述べる静電界に関するいろいろの法則を導くことができ、これらの法則が、われわれの観測する各種の現象をよく説明できるので、今日ではクーロンの法則は厳密に成り立つものであると認められている。さらに静電界のみでなく、電流、磁界、電磁誘導、電磁波などの電磁気学全体の法則が、結局クーロンの法則から導くことができるのである。

c) 電気量の単位

クーロンの法則を用いて電荷の大きさ(電気量)の単位を定めることができる。

たとえば真空中で1cmの距離にある相等しい電荷に働く力の大きさが1dynであるときの電荷の大きさを単位にとるとき、これを1CGS静電単位(CGS esu)の電気量、または1フランクリン[Fr]という。したがって(1.1)をCGS esuで表わすと $k=1$ となって

$$F_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} i_{12} \quad [\text{dyn}] \quad (1.2)$$

ただし $Q_1, Q_2: [\text{Fr}]$

$r: [\text{cm}]$

となる。前述のようにクーロンの法則を出発点としてすべての電気磁気現象を説明することができるから、Frを出発点として、すべての電気磁気単位系を組み立てることができる。この単位系をCGS 静電単位系[†]という。しかし工学の分野では長さの単位にメートル[m]、質量の単位にキログラム[kg]、時間の単位に秒[s]を用い、また電気的量の基本量として電流の単位アンペア[A]を用いたMKSA 有理単位系^{††}(または単にMKS 有理単位系あるいはMKSA 単位系と呼ぶ)を用いると便利ことが多い。本講においても、以後主としてMKSA 単位系を使用することにする。

d) MKSA 単位系を用いたクーロンの法則

MKSA 有理単位系を用いて(1.1)を表わしてみよう。(1.2)に示すように $Q_1 = Q_2 = 1 [\text{Fr}]$ で $r = 1 [\text{cm}]$ のとき $k = 1 [\text{dyn} \cdot \text{cm}^2 / \text{Fr}^2]$ であるが、

$$1 [\text{dyn}] = 10^{-5} [\text{N}]^{\dagger\dagger}$$

$$1 [\text{cm}] = 10^{-2} [\text{m}]$$

$$1 [\text{Fr}] = \frac{1}{10c_0} [\text{C}]^{\ddagger}$$

ただし、真空中の光速 $c = c_0 [\text{m/s}]$ で $c_0 = 2.997925 \times 10^8$ の関係があるから

$$k = 10^{-7} \times c_0^2 [\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2] \quad (1.3)$$

いま

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.4)$$

とおけば(1.1)は

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} i_{12} [\text{N}] \quad (1.5)$$

^{†,††} 付録 III.1 参照。

^{†††} 1 ニュートン[N]の力は1 dynの10万倍で、地球上で約100 gの質量に働く重力に等しい力である。

[‡] 付録 III.1 参照。

ただし $Q_1, Q_2: [\text{C}]$ $r: [\text{m}]$

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c_0^2} [\text{F/m}] = 8.85419 \times 10^{-12} [\text{F/m}]^\dagger$$

のように表わすことができる。ここで ϵ_0 は真空中の誘電率(permittivity of vacuum)と呼ばれている。

e) 多くの電荷または分布した電荷にもとづく力

図1.2に示すごとく、多くの電荷が存在する場合に作用する力は、個々の電荷が独立に存在する場合に働く力のベクトル和に等しい^{††}。すなわち、図において、 n 個の電荷 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ が、電荷 Q に作用する力 F は

$$F = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_{i0}^3} r_{i0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|r_0 - r_i|^3} (r_0 - r_i) \quad (1.6)$$

となる。また図1.3に示すように電荷が空間に連続的に分布しているときは、電荷密度を $\rho [\text{C/m}^3]$ 、微小体積素を $dv [\text{m}^3]$ とすれば電荷 Q に働く力 F は

$$F = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{v_0} \rho \frac{r}{r^3} dv \quad (1.7)$$

で表わされる。

なお、(1.6)、(1.7)等の関係式で $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ の電荷、あるいは分布した電荷密度 ρ の電荷が静止していれば、電荷 Q はたとえ移動していても、ある点に

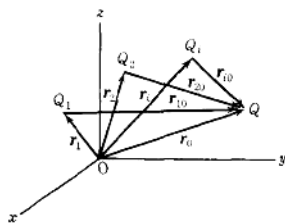


図1.2 多くの点電荷が存在するとき

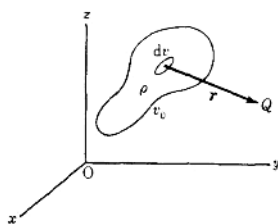


図1.3 分布した電荷の存在するとき

[†] F は後述するように静電容量の単位ファラドで $[\text{N}] \cdot [\text{m}] = [\text{J}]$ (ジュール) とすれば $1 [\text{J}] = 1 [\text{C}^2/\text{F}]$ の関係がある。

^{††} このように原因(この場合は電荷)をいくつか重ね合わせると、結果(この場合は力)も各々の結果を重ね合わせたものになることを重ねの理(principle of superposition)という。

Q が存在する瞬間の力は(1.6)あるいは(1.7)で示されることがわかっている。

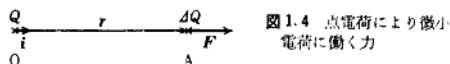
1.3 電 界

a) 電荷にもとづく電界

前節で述べたように、電荷が存在すると、他の電荷にクーロン力を及ぼすことがわかった。すなわち電荷が存在すると、その周囲は他の電荷に力の働くような特別な状態になっていると考えることができる。この状態を**電界**(electric field)といい、電荷が静止している場合に発生する電界を**静電界**(electrostatic field)という。

一例として図1.4に示すように一点 O におかれた電荷 Q にもとづく電界について考えよう。 O 点から r [m] 離れた一点 A にこの電界を乱さない程度に小さい電荷 ΔQ をおくと、クーロンの法則から電荷 ΔQ に働く力は

$$F = \frac{Q\Delta Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{i} = \frac{Q\Delta Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.8)$$



いま単位電荷に働く力を $\mathbf{E}$ とすれば

$$\mathbf{E} = \frac{F}{\Delta Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{i} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad [\text{N/C}] \quad (1.9)$$

となる。ここで $\mathbf{E}$ を**電界の強さ**(intensity of electric field)または略して**電界**といい、[N/C]の単位で表わされるベクトルである。しかし電界の単位としては、後述するように[V/m]を用いることの方が多い。

次に多数の電荷および連続した電荷が存在する場合の電界について考えてみよう。電界の強さはその点に電界を乱さない程度の微小電荷をおいたとき、その電荷に働く力の単位電荷当りの大きさおよび方向で表わされるから、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_{i0}^3} \mathbf{r}_{i0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v_s} \rho \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv \quad (1.10)$$

が成立する。

b) 電気力線と電束

電界の様子をわかりやすく示すために、電界中に線を仮想して、その線の接線が常に電界の方向と一致するようにすることができる。この場合この線を**電気力線**(electric line of force)という。

このような電界を直観的に説明しやすくするために、電荷が存在すると、その電荷から電荷の量に比例した流れが生じていると考え、この流体の流れている空間が電界であると考えることができる。このような流体の流れを**電束**(electric flux)と呼び、電束は正の電荷から流れ出して負の電荷に流れ込むと仮定する。また電束はゴム管のように常に縮小しようとする性質があるものと考え、異符号の電荷の間には引力が働き、同符号の電荷の間には斥力が働くというクーロンの法則を理解しやすい。MKSA 有理単位系では単位電荷から1本の電束が出入すると考えるので、電荷 Q [C] からは Q 本の電束が発生する。

いま点電荷 Q のみが存在するとき、発生する電束は電荷 Q から放射状に発生している筈であるから、電束は図 1.5 に示すように電気力線に沿って生じていることがわかる。そこで電荷 Q の存在する点 O から r の距離にある一点 A を通る O を中心とする球面を

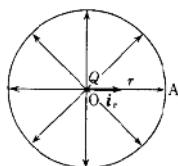


図 1.5 点電荷にもとづく電気力線

考えると、この球面上での電束の密度 D は一定であるから、球面を通る電束の数 Φ は

$$\Phi = Q = 4\pi r^2 D$$

ゆえに

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

となる。いま**電束密度**(electric flux density) D というベクトル量を考え、 D の方向は電束の方向で、 D の大きさは電束の方向に垂直な面内の電束の密度(電束の方向に垂直な単位面積当りの電束の数)で表わされるとすれば、

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{i}_r = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad [\text{C/m}^2] \quad (1.11)$$

となる。

D の単位は(1.11)で明らかなように $[C/m^2]$ である。すなわち(1.9)と(1.11)とを比較してみると、単一電荷にもとづく電束密度は電界の強さに比例した量で

$$D = \epsilon_0 E \quad (1.12)$$

の関係にあることがわかる。この関係は単一電荷にもとづく電界だけでなく、一般にあらゆる電界、すなわち、多数の電荷および連続した電荷が存在するときの電界についても成立する。したがって n 個の電荷 $Q_i (i=1, 2, \dots, n)$ と、体積 v_0 中に分布した電荷密度 ρ の電荷から発生する電束密度 D は

$$D = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\mathbf{r}_{i0}}{r_{i0}^3} + \frac{1}{4\pi} \int_{v_0} \rho \frac{\mathbf{r}}{r^3} dv \quad (1.13)$$

で表わされる。

なお空間にある曲面 S を考え、その微小部分を dS^1 とすれば、図 1.6 に明らかなように、曲面 S を通る電束 Φ は

$$\Phi = \int_S D \cos \theta dS = \int_S D \cdot dS \quad (1.14)$$

で表わされる。

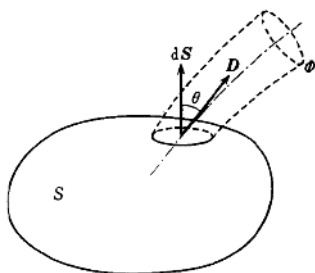


図 1.6 曲面 S の微小部分
を通る電束

また(1.12)で示されるように、真空中では電束密度が電界の強さの ϵ_0 倍になっているが、後述するように、この関係は電界の存在する媒質の性質によって定まる。このように電束密度は水の流れ、空気の流れ、電流等と同じような

↑ ベクトル dS は面積を示すベクトルで、大きさは面積 dS 、方向はその面に引いた法線の方法を示す。付録 I.3 参照。

性質があり、電界の強さは圧力やポテンシャルの傾きと同じような性質をもっている。いずれもベクトル量であるが、電束密度や水の流れを測定するには、原理的にこの流れを切って測定器を挿入する必要があり、電界の強さや圧力は、流れに沿って測定器を動かすことによって測定できるので、前者を **vector through variable** と呼び、後者を **vector across variable** と呼んでいる。

このように正の電荷から出発して、負の電荷に終端する電束が存在するという考え方が成立するためには、前に述べたように、クーロンの法則が厳密に成立しなければならない。たとえばクーロンの法則で電荷の間に働く力が距離の2乗に反比例するのではなくて、2乗よりすこしずれているとすると、電束の概念は成立しないのである。すなわち、このような電束や電界の概念が成り立つためには、クーロンの法則を認めなければならない。

c) 電荷分布が与えられたときの電界の求め方

以下、二三の例について電界を求めてみよう。

(1) 点電荷 Q による電界: (I. 9) および (I. 11) に示す通り

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}, \quad D = \frac{Q}{4\pi} \frac{r}{r^3}$$

であるから、電界および電束密度の方向は、電荷 Q を中心として、放射状で、 $Q > 0$ であれば外向き、 $Q < 0$ であれば内向きで、大きさは電荷からの距離の2乗に反比例する。

(2) 二点 A, B に電荷 $+Q$ および $-Q$ が存在する場合の電界:

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} - \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{i(x-a/2) + jy + kz}{\{(x-a/2)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} - \frac{i(x+a/2) + jy + kz}{\{(x+a/2)^2 + y^2 + z^2\}^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (I. 15)$$

実際に数値計算を行なって電気力線を書くと図 1.7 のようになる。

(3) 球体内に一樣に分布した電荷にもとづく電界: 半径 a の球が一樣な電荷密度 ρ をもっているとする。球の中心 O から距離 r だけ離れた一点 A の電界 E を求めよう。

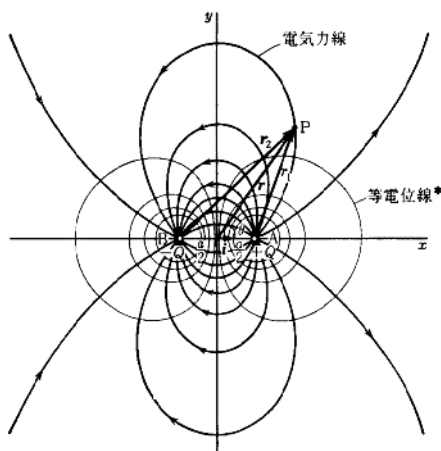


図 1.7 二点 A, B に $+Q, -Q$ の電荷の存在する場合の電界(図中 * 印は 1.4 節 e 項参照)

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v_0} \frac{\rho \mathbf{r}'}{r'^3} d\nu = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dr_0 \int_0^\pi \frac{\rho r'}{r'^3} 2\pi r_0^2 \sin \theta d\theta$$

さて図 1.8 をみれば明かなように, 対称性から $\mathbf{E}$ は $\vec{OA}$ の方向をもっているから, その方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}$ とすれば

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{i}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a dr_0 \int_0^\pi \frac{\rho}{r'^2} 2\pi r_0^2 \sin \theta \cos \alpha d\theta$$

となる. ここで

$$r_0^2 = r'^2 + r^2 - 2r'r \cos \alpha$$

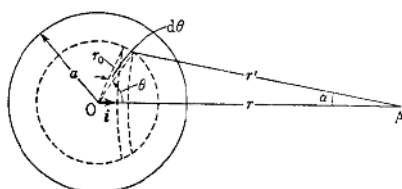


図 1.8 球体内に一様に分布した電荷にもとづく電界