

电 磁 波

S. A. 謝 昆 諾 夫 著

廖 世 靜 譯

目 录

原 序

第一章 向量和坐标系統

1.1 向量	1
1.2 点的函数	4
1.3 散度	7
1.4 綫积分、循环量和旋度	7
1.5 坐标系統	8
1.6 梯度、散度和旋度的微分表达式	10
1.7 微分不变量和格林定理	12
1.8 其他方程式	13

第二章 有关振盪和波动的数学

2.1 复变数	14
2.2 指数函数	18
2.3 指数的和調和的振盪	20
2.4 波动	23
2.5 奈培、貝尔、分貝	25
2.6 駐波	26
2.7 阻抗概念	26
2.8 平均功率和复数功率	31
2.9 阶躍和脉冲函数	32
2.10 自然波与受迫波	39

第三章 貝塞尔函数和勒讓德函数

3.1 化偏微分方程成寻常微	
----------------	--

分方程	45
3.2 边界条件	47
3.3 貝塞尔函数	48
3.4 变型貝塞尔函数	51
3.5 $n + \frac{1}{2}$ 級的貝塞尔函数以及关联的函数	53
3.6 球諧函数与勒讓德函数	54
3.7 公式集	57

第四章 基本电磁方程式

4.1 采用 MKS 單位制的基 本方程式	61
4.2 迫佈力	72
4.3 通过封閉面的电磁流	74
4.4 电磁感应的微分方程式 和边界条件	74
4.5 电流膜、磁流膜近区的 边界条件	76
4.6 直綫电流絲、磁流絲近 区的条件	76
4.7 运动着的不連續面	76
4.8 能量定理	78
4.9 衍生电磁常数	83
4.10 介質与导体内的波	88
4.11 極化	92
4.12 無源区域中麦克斯韋方 程式的特殊形式	96

第五章 阻抗器、換能器和

網絡

- 5.1 阻抗器和網絡 99
- 5.2 換能器 107
- 5.3 疊接結構 110
- 5.4 对称 T 形網絡鏈 113
- 5.5 对称 π 形網絡鏈 114
- 5.6 連續的傳輸綫 115
- 5.7 濾波器 115
- 5.8 簡單串聯电路內的受迫振盪 118
- 5.9 簡單串聯电路內的自然振盪 121
- 5.10 簡單並聯电路內的受迫振盪 122
- 5.11 輸入阻抗函数的展开式 124

第六章 有关波动的一般理

論

- 6.0 引言 129
- 6.1 無限广闊的均匀媒質內給定电流分佈所产生的場 130
- 6.2 电流元的場 132
- 6.3 电流元的輻射 136
- 6.4 两个电流元間的互相阻抗和互輻射功率 138
- 6.5 随時間任意变化的迫佈电流 142
- 6.6 理想导电直綫上电磁势位的分佈 143

- 6.7 無限細理想导电的導綫上电流与电荷的分佈 146
- 6.8 中点饋电導綫的輻射 146
- 6.9 两个电流环間的互阻抗; 电流环的阻抗 148
- 6.10 小平面对載有均匀电流时的輻射 151
- 6.11 傳輸綫和波导 152
- 6.12 反射 160
- 6.13 感应定理 162
- 6.14 等效定理 162
- 6.15 靜止場 163
- 6.16 單荷層与双荷層近区的条件 164
- 6.17 电流环与双磁荷層的等效 166
- 6.18 靜止場的感应与等效定理 167
- 6.19 一羣导体系統的电位和电容系数 169
- 6.20 用等效电容網来代表一系列导体 170
- 6.21 靜止場的能量定理 171
- 6.22 鏡像法 173
- 6.23 兩維靜止場 177
- 6.24 平行电流系統的电感量 180
- 6.25 复变函数与靜止場 184

第七章 傳輸理論 194

- 7.0 引言 194
- 7.1 迫佈力和电流 195
- 7.2 点狀源 196

7.3	能量定理	197
7.4	均匀綫上波动函数的基本方程組	199
7.5	均匀傳輸綫的特性常数	201
7.6	輸入阻抗	204
7.7	傳輸綫用作換能器	207
7.8	点源产生的波	207
7.9	任意分佈源所产生的波	211
7.10	非均匀傳輸綫	212
7.11	用屢次近似法計算非均匀波函数	214
7.12	略不均匀的傳輸綫	217
7.13	均匀傳輸綫上的反射	218
7.14	反射系数視為阻抗比的函数	220
7.15	适用于傳輸綫上的感应定理和等效定理	225
7.16	饋給阻抗以最大功率的条件	226
7.17	阻抗的轉換与匹配	227
7.18	錐削傳輸綫和阻抗匹配	230
7.19	越过一段均匀傳輸綫的傳輸	231
7.20	非均匀綫上的反射	235
7.21	用反射系数來構成波函数	235
7.22	均匀傳輸綫上的自然振盪	238
7.23	用反射系数來表示阻抗匹配和自然振盪的条件	240
7.24	展开成部分分式	241

7.25	多型傳輸綫	243
7.26	疊接結構	245
7.27	略不均匀傳輸綫上的諧振	246

第八章 各种波、波导和諧

振器(上)	250
8.0 引言	250
8.1 均匀平面波	250
8.2 橢圓極化的平面波	257
8.3 在一点上的波阻 抗	258
8.4 均匀平面波在斜射入时的反射	260
8.5 均匀柱面波	269
8.6 圆柱狀空腔諧振器	276
8.7 綫圈筒和楔形傳輸綫	282
8.8 同心圆筒中 波的傳播	284
8.9 横电磁平面波 (TEM 波)	290
8.10 平行导綫上的横电磁波	292
8.11 横电磁球面波 (TEM 波)	295
8.12 同軸圓錐上的横电磁波	296
8.13 圆柱导綫上的横电磁波	300
8.14 斜交导綫上的波	302
8.15 空心金屬球內的圓磁波	304
8.16 空心球內的圓电波	308
8.17 兩維場	309
8.18 隔离理論	313
8.19 分層隔离理論	322
8.20 一个繞射問題	325
8.21 矩形截面波导管中的主	

波 ($TE_{1,0}$ 型)	325	9.19 通过吸收屏上矩形孔的 传输	366
8.22 圆形波导管中的主波 ($TE_{1,1}$ 型)	332	9.20 通过圆孔的传输和圆整 片的反射	367
8.23 曲率对波传播的影响	334	9.21 通过矩形孔的传输: 斜 向射入	369
第九章 辐射和绕射		9.22 矩形波导管开口端上的 辐射	370
9.0 引言	340	9.23 电角	371
9.1 远区场	341	9.24 菲涅尔绕射	377
9.2 一般的辐射公式	343	9.25 正弦型分佈电流的场	380
9.3 辐射向量的计算	343	9.26 两根平行金属线间相互 辐射功率	384
9.4 指向性	345	9.27 中点激发的直天线的幅 射功率	385
9.5 一个电流元的指向性	346	9.28 一对平行金属线的辐射 功率	386
9.6 很小电流环的指向性能	348	第十章 各种波、波导和谐 振器(下)	
9.7 垂直天线的指向性能	350	10.1 横磁平面波 (TM 波)	387
9.8 导线半径对辐射功率的 影响	351	10.2 横电平面波 (TE 波)	392
9.9 振幅均匀分佈的直线阵 列	352	10.3 用两个标量波函数表达 一般电磁场	394
9.10 电流元端射阵列的增益	355	10.4 柱形波导内的自然波	395
9.11 电流元垂射阵列的增益	358	10.5 矩形波导中的自然波	399
9.12 导线上前进电流波的幅 射	359	10.6 圆形波导管中的自然波	402
9.13 具有不均匀振幅分配的 阵列	360	10.7 同心圆管间的自然波	403
9.14 主辐射叶的立体角、形 式因数和增益	361	10.8 其他截面形状的波导管	404
9.15 由强指向性辐射体组成 的垂射阵列	363	10.9 近于圆形的波导管	411
9.16 大地的影响	364	10.10 横磁球面波	413
9.17 矩形阵列	364	10.11 横电球面波	418
9.18 平面电流膜与磁流膜的 辐射	365		

10.12 截面形狀变化的波导管	420
10.13 柱面波	421
10.14 循环波	424
10.15 平波波、柱面波和球面波之間的关联	424
10.16 無限長导綫上的波	432
10.17 同軸导綫上的波	433
10.18 平行綫上的波	436
10.19 金屬管中受迫波	439
10.20 介質綫中的波	440
10.21 介質板面上的波	443
10.22 平面地面上的波	446
10.23 波在同心球面間的傳播	450
10.24 柱形空腔諧振器內的自然振盪	452

第十一章 天綫理論

11.1 双錐天綫	456
11.2 关于圓錐天綫輸入阻抗与导納的一般考虑	465
11.3 天綫电流分佈和終端阻抗	466
11.4 終端阻抗逆量的計算	468

11.5 圓錐天綫的輸入阻抗和輸入导納	470
11.6 具有任意形狀和尾端影响的的天綫的輸入阻抗	476
11.7 天綫上电流分佈	483
11.8 斜导綫和受不对称激励的导綫	487
11.9 球狀天綫	489
11.10 互易定理	493
11.11 接收天綫	496

第十二章 阻抗概念

12.1 回顧	497
12.2 兩阻抗膜間的傳播	502
12.3 关于阻抗和波导中某些不規則地方对波的反射	507
12.4 矩形波导管內橫向导綫所見的阻抗	511

習 題	514
問題和練習題	528
書中所用符号	531
参考文献提要	532
譯名对照——譯者附	533

第一章 向量和坐标系統

1.1 向量

向量是例如速度、力、电场强度等这一类量的通称。它可以用圖解表示为有指向的綫段 PQ (圖 1.1)，其長度与此向量的大小成比例。

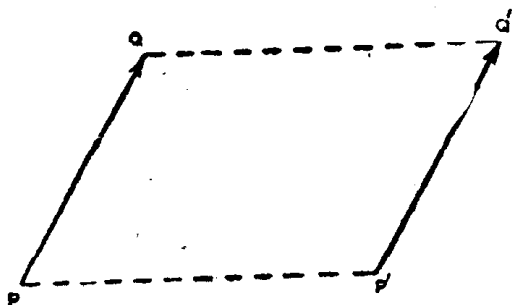


圖 1.1 相等向量

两个平行的向量 PQ 及 $P'Q'$ 如長度和指向均相同就認為是相等的。

向量相加求和的方法与其他量不同。两个向量相加的和等于以这两个向量为鄰边的平行四边形的对綫 (圖 1.2)，即*

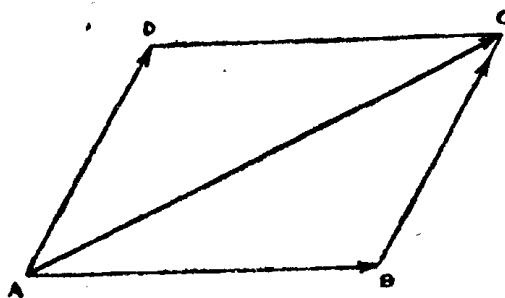


圖 1.2 两个向量相加

* 本書中对向量將不加特別的标志，假如从上下文可以分辨清楚的話，否則就在表示向量的字母頂上加一小橫。

$$AB + AD = AC.$$

两个以上的向量相加时，以第一个向量箭头端点作为第二个向量的起点，把所有向量串联起来，然后从第一个向量的起点到最末一个向量的箭头端点划一向量，就是向量的总和（圖 1.3）。

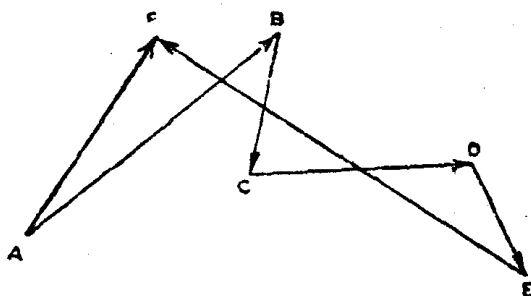


圖 1.3 几个向量相加

按照定义有

$$AB + BA = 0, \text{ 或 } BA = -AB,$$

所以向量的相減實質上与相加相同；因此（見圖 1.4）

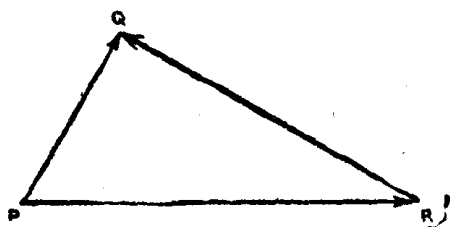


圖 1.4 向量相減

$$PQ - PR = PQ + RP = RQ.$$

可見有共同起点的两个向量的差就是将第二个向量終点連接到第一个向量起点的向量。

两个向量的無向积定义为它們的长度值相乘再乘以它們的夾角的余弦；写成

$$A \cdot B = (A, B) = ab \cos \psi.$$

两个單位向量的無向积等于兩者之間的夾角的余弦。当两个向量的無

向积等于零时，兩者便是直交。無向积的运算服从交换律和分配律，

$$A \cdot B = B \cdot A, (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

向量在給定的單位向量方向上的分量等于它們兩者的無向积，即这个向量在單位向量上的投影。从点 $P(x_1, y_1, z_1)$ 到点 $Q(x_2, y_2, z_2)$ 的向量的指向分量，沿坐标軸的正方向取，是差 $x_2 - x_1$ 、 $y_2 - y_1$ 、和 $z_2 - z_1$ 。如 l 是这向量的長度，同时 α, β, γ 是它与坐标軸的交角，則

$$PQ_x = x_2 - x_1 = l \cos \alpha,$$

$$PQ_y = y_2 - y_1 = l \cos \beta,$$

$$PQ_z = z_2 - z_1 = l \cos \gamma.$$

任意两个向量的無向积可以表成它們的相应指向分量的乘积的和，即

$$A' \cdot A'' = A'_x A''_x + A'_y A''_y + A'_z A''_z.$$

因此，两个向量之間的夾角的余弦等于它們的相应指向余弦乘积之和，即

$$\cos \psi = \cos \alpha'_x \cos \alpha''_x + \cos \alpha'_y \cos \alpha''_y + \cos \alpha'_z \cos \alpha''_z.$$

向量 A 和 B 的有向积 $A \times B$ 或 $[A, B]$ 是一个向量；它同时垂直于 A 和 B ；它的指向是右旋螺釘的前进方向，假如这螺釘的旋向是从 A 经过較小的夾角到 B （圖 1.5）的話；它的長度等于 A 与 B 的長度值相乘再乘以 A 与 B 間的夾角的正弦，也就是以 A 和 B 为鄰边的平行四边形的面积。有向积具有下式所示性質：

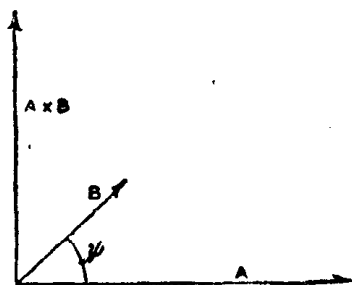


圖 1.5 有向积

$$A \times B = -B \times A, (A + B) \times C = A \times C + B \times C.$$

有向积的各分量与它的構成向量的各分量之間有下列关系式：

$$(A' \times A'')_x = A'_y A''_z - A'_z A''_y,$$

$$(A' \times A'')_y = A'_z A''_x - A'_x A''_z,$$

$$(A' \times A'')_z = A'_x A''_y - A'_y A''_x.$$

1.2 点的函数

点的函数或点函数是一个函数 $f(x, y, z)$, 其值仅随空间中点的位置而变。使点函数值相同的点的轨迹称为等位面或等值面; 在二维场合中称为等位线或等值线。有些等位面具有特别名称, 例如等势面、等温面和等压面。图 1.6 表示利用等值线构成一个二维点函数的图解法, 其中实线是 $u = \log \rho_1 / \rho_2$ 的等值线, ρ_1 与 ρ_2 为到两个定点的距

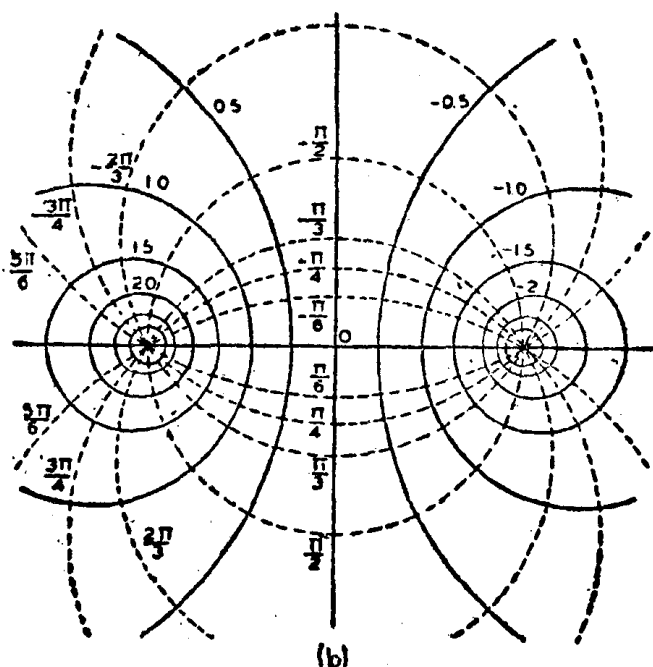
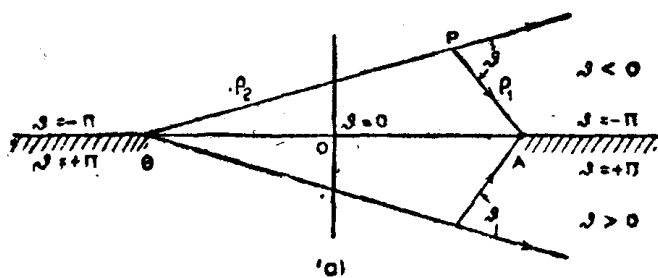


图 1.6 两族等值线

离，而虚线是圖 1.6 (a) 所示 BP 和 PA 間夾角 θ 的等值綫。

点函数的变动率不但有賴于点的位置，还依賴于該点变动路徑的方向。如以 ΔV 表示点函数 $V(x, y)$ 从点 $A(x, y)$ 到点 $B(x + \Delta x, y + \Delta y)$ 的变动值，並以 ΔS 表示距离 AB (圖 1.7)，則比值 $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ 便是 $V(x, y)$ 沿 AB 方向的平均变动率。当点不离开 AB 綫而趋近于 A 时这个比值的極限值称为 $V(x, y)$ 沿 AB 方向的定向导数。这个导数記为 $\frac{\partial V}{\partial s}$ 。偏导数 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial V}{\partial y}$ 就是沿坐标軸的定向导数。

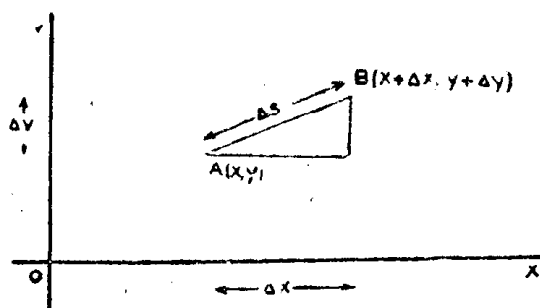


圖 1.7 表示定向增量

最大变动率出現在通过 A 点的等位綫的法綫方向上 (圖 1.8)。
 V 的梯度的定义为沿这个法綫方向的下列向量：

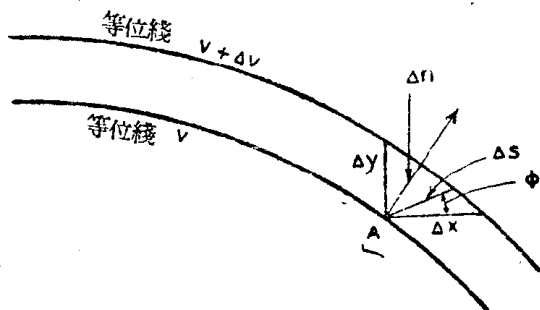


圖 1.8 表示梯度

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial n} \bar{n},$$

其中 $\bar{n}$ 是与等位綫正交的單位向量。就無限小的曲綫三角形說，有

$$\Delta n = (\Delta s) \cos \psi,$$

于是

$$\frac{\partial V}{\partial n} \cos \psi = \frac{\partial V}{\partial s}. \quad (2-1)$$

所以点函数的定向导数等于它的梯度在这方向上的分量。

上述方程式自然适用于三维空间的点函数。设 α, β, γ 是过点 A 的等位面的法线三个坐标轴的交角，于是按 (1) 有

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos \alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos \beta, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos \gamma, \quad (2-2)$$

其中偏导数是梯度的指向分量，因而

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

法向导数的另一表达式可从方程组 (2) 分别乘以 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 然后相加得到，即

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial V}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial V}{\partial z} \cos \gamma.$$

这个方程式可以直接写出，只要想到梯度等于它的各个分量在它本身上的投影之和。

复数点函数是这样一个函数，它的实部和虚部都是点函数，即

$$V(x, y, z) = V_1(x, y, z) + iV_2(x, y, z).$$

我们不能说复数点函数的等位面，因为它的实部有一族等位面，它的虚部又有一族等位面，它的绝对值也有一族等位面，还有其他等等。复数点函数有相同相角的点的轨迹

$$\psi = \tan^{-1} \frac{V_2(x, y, z)}{V_1(x, y, z)}$$

称为等相（位角）面，在划分平面波、柱面波、和球面波时要用到等相面。复数点函数的梯度的定义是一个复数向量，其各个分量是这函数的各个偏函数。

有向点函数是一个向量，它的指向分量是普通的点函数。

1.3 散度

一向量 $F(x, y, z)$ 通过面 S 的通量的定义为面积分

$$\Phi = \iint F_n dS,$$

其中 F_n 是正交于积分面的分量。向量通过單連通封閉曲面 S 的外出通量除以 S 面所包的体积 v 所得的值称为 F 的平均散度。当封閉面 S 收縮成一个点时，平均散度的極限值称为 F 在该点上的散度，写成

$$\operatorname{div} F = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{\iint F_n dS}{v}, \text{ 当 } S \rightarrow 0.$$

把封閉面 S 所包的体积 v 划分为許多小細胞体积元，我們可以观察到：越过 S 面的 F 的总通量等于越过各个小細胞体积分界面的通量之和，相鄰兩細胞公共分界部分上的通量对于总通量沒有影响。由于通过每一个細胞体积分界面的通量是 $\operatorname{div} F dv$ ，我們得到

$$\iint F_n dS = \iiint \operatorname{div} F dv. \quad (3-1)$$

面散度可以比照体积散度来下定义，即

$$\operatorname{div}' F = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\int F_n ds}{S}, \text{ 当 } s \rightarrow 0,$$

其中 s 是面 S 的分界綫。至于綫散度，就是尋常的导数。

1.4 綫积分、循环量和旋度

向量 F 沿路徑 AB (圖 1.9) 的綫积分的定义为这向量的切綫分量 F_s 的积分 $\int_{(AB)} F_s ds$ 。假如 F 代表力，这个綫积分就表示力 F 在沿着 AB 运动的質点上所做的功。假如路徑曲綫是閉合的，这个积分便称为循环量。調整無限小閉合环的方位使沿着它的循环量为最大，此时环上單位面积的循环量称为 F 的旋度 $\operatorname{curl} F$ ，它是一个向量，垂直于环所在的平面。旋度与循环量的正指向的关系如圖 1.10 所示。

設由簡單閉合曲綫圈定一曲面 S 。將此曲面分为許多小面积元，

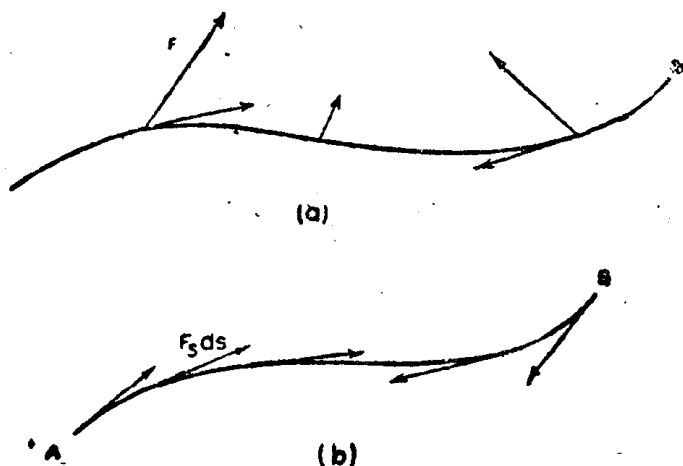


圖 1.9 說明綫積分

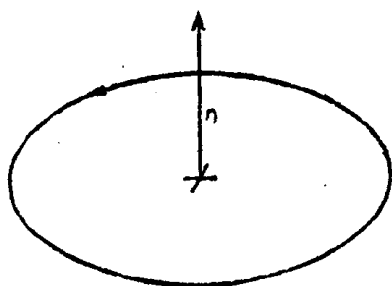


圖 1.10 F 的旋度和 F 的
循環量正指向間的关系

我們可以觀察到：沿着面 S 的边界綫所取 F 的循環量等于沿着各小面积元边界所取循環量之和，因为相鄰兩面积元公共边界部分对于总循環量的貢獻互相抵消。由于沿着每一面积元分界綫的循環量是 $\text{curl}_n F dS$ ，我們得到

$$\int F_s ds = \iint \text{curl}_n F dS. \quad (4-1)$$

1.5 坐标系統

实用中常用的坐标系統有直角坐标、柱面坐标和球面坐标；空間中一点 P 在这些坐标系中分別用 (x, y, z) 、 (ρ, φ, z) 和 (r, θ, φ) 表示。这些坐标的意义可从圖 1.11 上看出； x, y, z 是到三个互成垂直的平面的距离； ρ 是到 z 軸的距离； r 是到原点的距离；“極角” θ 是半徑 r 与 z 軸間的夾角；“經度” φ 是 xz 平面与由 z 軸和 P 点所定平面間的夾角。

在一般坐标系中，点 $P(u, v, w)$ 是由三个面

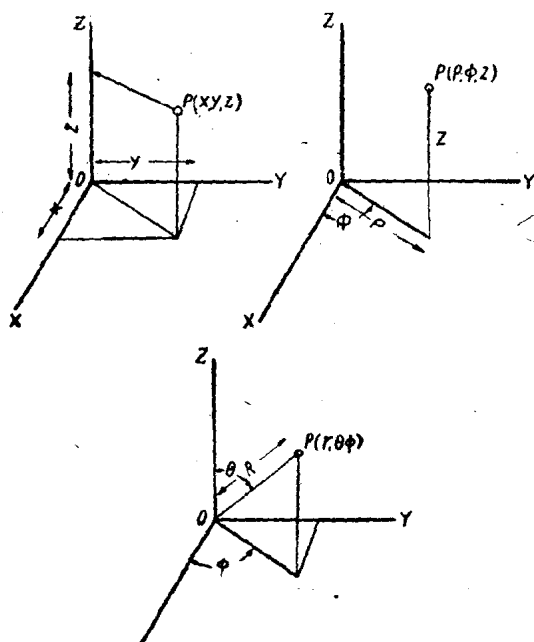


圖 1.11 直角、柱面和球面坐标系

$$f_1(x, y, z) = u, \quad f_2(x, y, z) = v, \quad f_3(x, y, z) = w$$

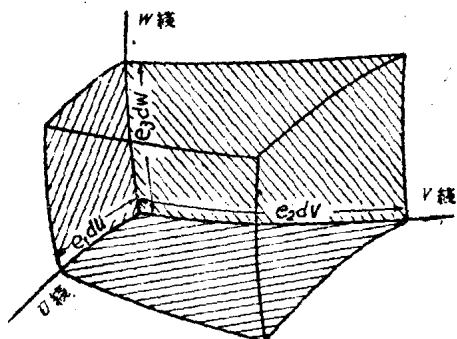


圖 1.12 一个元量坐标细胞体

的交点确定的。这些曲面的交线称为坐标线；例如 u 线是 v 面与 w 面的交线。

假如坐标系是正交的，则沿坐标线的微分量就正比于坐标的微分量（看圖 1.12），即

$$ds_u = e_1 du,$$

$$ds_v = e_2 dv,$$

$$ds_w = e_3 dw.$$

对于一般的元量长度 ds 我们有关式

$$ds^2 = (ds_u)^2 + (ds_v)^2 + (ds_w)^2 = e_1^2 du^2 + e_2^2 dv^2 + e_3^2 dw^2$$

就直角、柱面与球面坐标說，我們有

$$\begin{aligned} ds_x &= dx, \quad ds_y = dy, \quad ds_z = dz; \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2; \\ ds_\rho &= d\rho, \quad ds_\varphi = \rho d\varphi, \quad ds_z = dz; \quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2; \\ ds_r &= dr, \quad ds_\theta = r d\theta, \quad ds_\varphi = r \sin \theta d\varphi; \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \end{aligned}$$

对于坐标面內的元量面說，我們有

$$\begin{aligned} dS_u &= ds_v ds_w, \quad dS_v = ds_w ds_u, \quad dS_w = ds_u ds_v; \\ dS_x &= dy dz, \quad dS_y = dz dx, \quad dS_z = dx dy; \\ dS_\rho &= \rho d\varphi dz, \quad dS_\varphi = \rho d\rho dz, \quad dS_z = \rho d\rho d\varphi; \\ dS_r &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad dS_\theta = r \sin \theta dr d\varphi, \quad dS_\varphi = r dr d\theta. \end{aligned}$$

最后，元量坐标細胞体的体积是

$$dv = ds_u ds_v ds_w = dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

1.6 梯度、散度和旋度的微分表达式

点函数 V 的梯度沿各坐标綫方向的分量是沿 u, v, w 方向的定向导数，即 $dV/ds_u, dV/ds_v, dV/ds_w$ 。將上述三种坐标系中距离微分量的值代入，即得

$$\begin{aligned} \text{grad}_x V &= \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \text{grad}_y V = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \text{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z}; \\ \text{grad}_\rho V &= \frac{\partial V}{\partial \rho}, \quad \text{grad}_\varphi V = \frac{\partial V}{\rho \partial \varphi}, \quad \text{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z}; \\ \text{grad}_r V &= \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \text{grad}_\theta V = \frac{\partial V}{r \partial \theta}, \quad \text{grad}_\varphi V = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi}; \\ \text{grad}_u V &= \frac{1}{e_1} \frac{\partial V}{\partial u}, \quad \text{grad}_v V = \frac{1}{e_2} \frac{\partial V}{\partial v}, \quad \text{grad}_w V = \frac{1}{e_3} \frac{\partial V}{\partial w}. \end{aligned}$$

为了計算向量 F 在点 P 上的散度，我們在 P 点周圍取元量体积細胞，計算越过这体积元分界面的外出通量，再用这体积元的体积去除。这个体积元所截 u 坐标面的面积为 dS_u ，而通过此面的通量为 $F_u dS_u$ 。这个体积元所截 u 坐标面的面积为 dS_u ，而通过此面的通量为 $F_u dS_u$ 。因为沿 u 方向此通量的变动率是 $D_u(F_u dS_u)$ ，所以越这体积元

的 u 面的剩余通量是 $D_u(F_u dS_u) du$ 。同样，算出越过这体积元的 v 面和 w 面的剩余通量。然后得到越过这体积元的表面的全部外出通量为 $D_u(F_u dS_u) du + D_v(F_v dS_v) dv + D_w(F_w dS_w) dw$ 。將各种坐标系統里面积元量的值代入，並除以相应的元量体积的值即得

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + r \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + r \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right],$$

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{e_1 e_2 e_3} \left[\frac{\partial}{\partial u} (e_2 e_3 F_u) + \frac{\partial}{\partial v} (e_1 e_3 F_v) + \frac{\partial}{\partial w} (e_1 e_2 F_w) \right].$$

按照定义， $\operatorname{curl} F$ 的 u 方向的分量 $\operatorname{curl}_u F$ 是通过 P 点的單位 u 面面积的循环量（見圖 1.13）。假如我們以 F 表示机械力，則 $\operatorname{curl}_u F$ 就是 F 在 u 面上單位面积內所做的功。設在 P 点周圍取以 v 綫及 w 綫圍成的面积元， F 沿过 P 点的 w 綫所作的功是 $F_w ds_w$ ，此功沿 v 綫方向的变动率是 $D_v(F_w ds_w)$ ，所以 F 在此面积元周界上 w 綫部分沿反

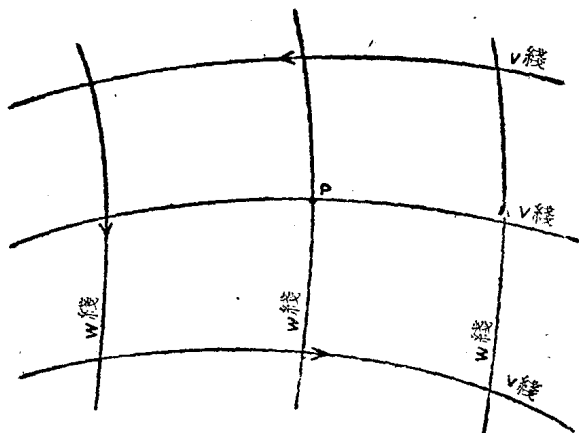


圖 1.13 說明向量的旋度的推导