电　磁　波

S A.謝昆諾夫著
廖　世　靜　譯

目　录

第五章 阻抗器、换能器和網絡

第六章 有关波动的一般理論

第七章 傳輸理論 ………… 194

第九章 輻射和繞射

第十章 各种波、波导和諧振器（下）

第一章　向量和坐标系統

1.1 向量

向量是例如速度、力、电場强度等这一类量的通称。它可以用圖解表示为有指向的綫段 PQ （圖 1.1)，其長度与此向量的大小成比例。

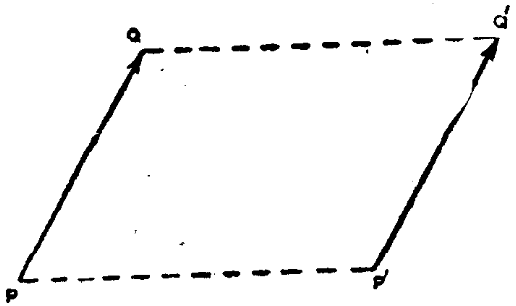


圖 1.1　相等向量

兩个平行的向量 PQ 及 $P'Q'$ 如長度和指向均相同就認为是相等的。

向量相加求和的方法与其他量不同。兩个向量相加的和等于以这兩个向量为鄰边的平行四边形的对角綫（圖 1.2)，即*

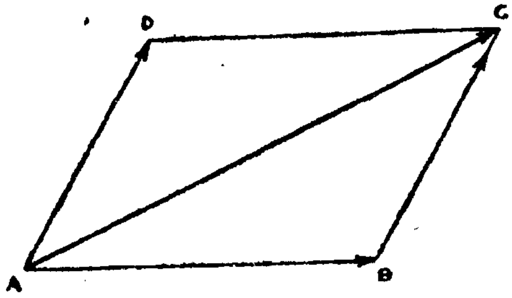


圖 1.2　兩个向量相加

---

* 本書中对向量將不加特別的标志，假如从上下文可以分辨清楚的話，否則就在表示向量的字母頂上加一小横。

$$AB + AD = AC.$$

兩个以上的向量相加时，以第一个向量箭头端点作为第二个向量的起点，把所有向量串联起来，然后从第一个向量的起点到最末一个向量的箭头端点划一向量，就是向量的总和（圖 1.3）。

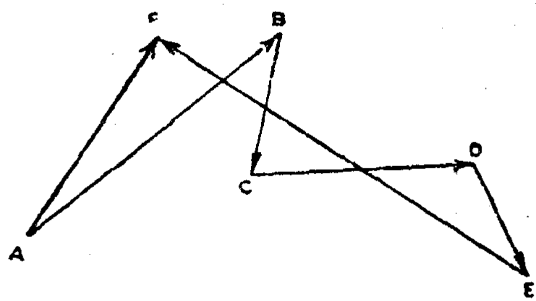


圖 1.3　几个向量相加

按照定义有

$$AB + BA = 0, \text{ 或 } BA = -AB,$$

所以向量的相减实質上与相加相同；因此（見圖 1.4）

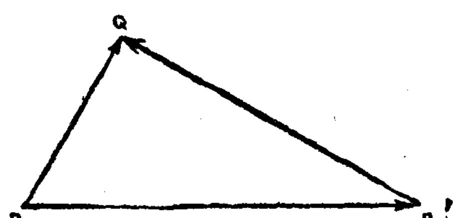


圖 1.4　向量相减

$$PQ - PR = PQ + RP = RQ.$$

可見有共同起点的兩个向量的差就是將第二个向量終点連接到第一个向量起点的向量。

兩个向量的無向积定义为它們的長度值相乘再乘以它們的夾角的余弦；写成

$$A \cdot B = (A, B) = ab\cos\psi.$$

兩个單位向量的無向积等于兩者之間的夾角的余弦。当兩个向量的無

向积等于零时，兩者便是直交。無向积的运算服从交換律和分配律，

$$A \cdot B = B \cdot A,\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

向量在給定的單位向量方向上的分量等于它們兩者的無向积，即这个向量在單位向量上的投影。从点 $P\ (x_1, y_1, z_1)$ 到点 $Q\ (x_2, y_2, z_2)$ 的向量的**指向分量**，沿坐标軸的正方向取，是差 $x_2 - x_1$、$y_2 - y_1$、和 $z_2 - z_1$。如 l 是这向量的長度，同时 α、β、γ 是它与坐标軸的交角，则

$$PQ_x = x_2 - x_1 = l \cos \alpha,$$

$$PQ_y = y_2 - y_1 = l \cos \beta,$$

$$PQ_z = z_2 - z_1 = l \cos \gamma.$$

任意兩个向量的無向积可以表成它們的相应指向分量的乘积的和，即

$$A' \cdot A'' = A'_x A''_x + A'_y A''_y + A'_z A''_z.$$

因此，兩个向量之間的夾角的余弦等于它們的相应指向余弦乘积之和，即

$$\cos \psi = \cos \alpha'_x \cos \alpha''_x + \cos \alpha'_y \cos \alpha''_y + \cos \alpha'_z \cos \alpha''_z.$$

向量 A 和 B 的**有向积** $A \times B$ 或 $[A, B]$ 是一个向量；它同时垂直于 A 和 B；它的指向是右旋螺釘的前进方向，假如这螺釘的旋向是从 A 經过較小的夾角到 B（圖 1.5）的話；它的長度等于 A 与 B 的長度值相乘再乘以 A 与 B 間的夾角的正弦，也就是以 A 和 B 为鄰边的平行四边形的面积。有向积具有下式所示性質：

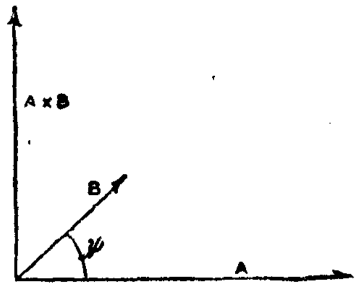


圖 1.5 有向积

$$A \times B = -B \times A,\ (A + B) \times C = A \times C + B \times C.$$

有向积的各分量与它的構成向量的各分量之間有下列关系式：

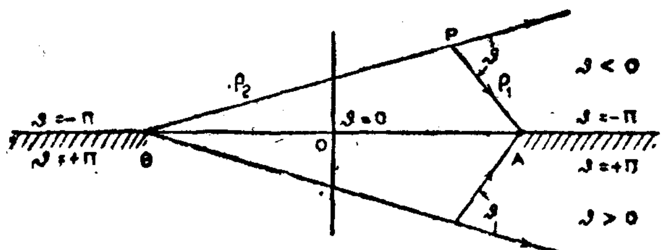
$$(A' \times A'')_x = A'_y A''_z - A'_z A''_y,$$

$$(A' \times A'')_y = A'_z A''_x - A'_x A''_z,$$

$$(A' \times A'')_z = A'_x A''_y - A'_y A''_x.$$

1.2 点的函数

点的函数或**点函数**是一个函数 $f(x, y, z)$，其值仅随空間中点的位置而变。使点函数值相同的点的軌跡称为**等位面**或**等值面**；在兩維場合中称为**等位綫**或**等值綫**。有些等位面具有特別名称，例如等勢面、等温面和等压面。圖 1.6 表示利用等值綫構成一个兩維点函数的圖解法，其中实綫是 $u = \log \rho_1/\rho_2$ 的等值綫，ρ_1 与 ρ_2 为到兩个定点的距



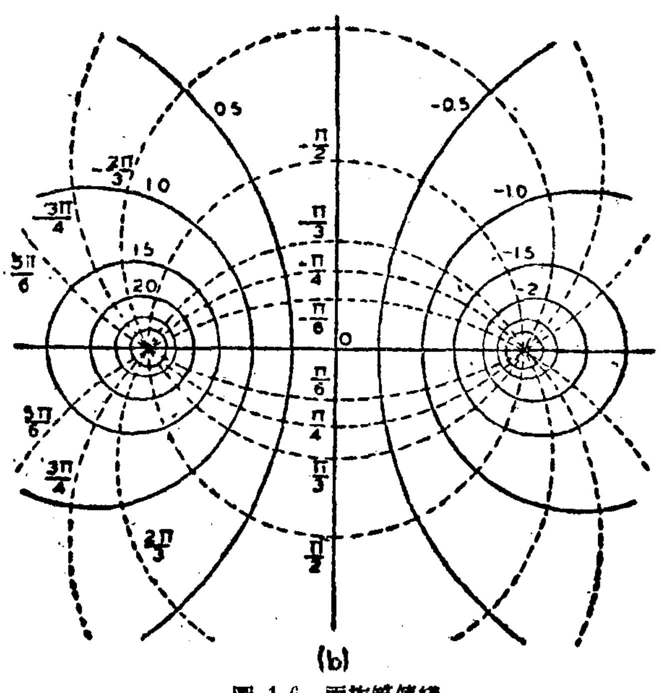


圖 1.6　兩族等值綫

离，而虛綫是圖 1.6 (a) 所示 BP 和 PA 間夾角 ϑ 的等值綫。

点函数的变动率不但有賴于点的位置，还依賴于該点变动路徑的方向。如以 ΔV 表示点函数 $V(x,y)$ 从点 $A(x,y)$ 到点 $B(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 的变动值，並以 ΔS 表示距离 AB (圖 1.7)，則比值 $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ 便是 **$V(x,y)$ 沿 AB 方向的平均变动率。** 当点不离开 AB 綫而趋近于 A 时这个比值的極限值称为 $V(x,y)$ 沿 AB 方向的**定向导数**。这个导数記为 $\frac{\partial V}{\partial s}$。偏导数 $\frac{\partial V}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial V}{\partial y}$ 就是沿坐标軸的定向导数。

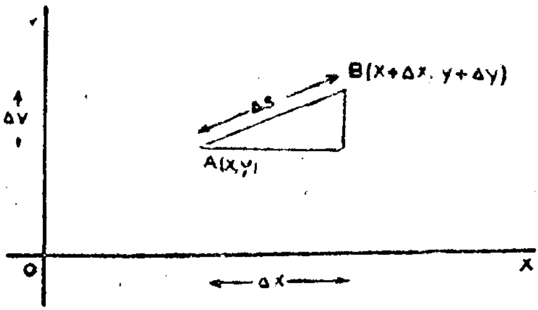


圖 1.7 表示定向增量

最大变动率出現在通过 A 点的等位綫的法綫方向上 (圖 1.8)。V 的梯度的定义为沿这个法綫方向的下列向量:

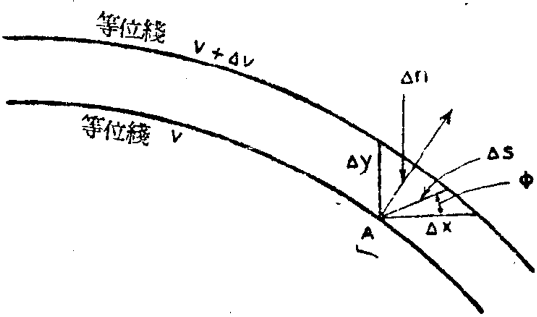


圖 1.8 表示梯度

$$\operatorname{grad} V = \frac{\partial V}{\partial n}\bar{n},$$

其中 $\bar{n}$ 是与等位綫正交的單位向量。就無限小的曲綫三角形說，有

$$\Delta n=(\Delta s)\cos\psi,$$

于是
$$\frac{\partial V}{\partial n}\cos\psi=\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{2-1}$$

所以点函数的定向导数等于它的梯度在这方向上的分量。

上述方程式自然适用于三維空間的点函数。設 α,β,γ 是过点 A 的等位面的法綫与三个坐标軸的交角，于是按（1）有

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial n}\cos\alpha,\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial n}\cos\beta,\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial n}\cos\gamma, \tag{2-2}$$

其中偏导数是梯度的指向分量，因而

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}.$$

法向导数的另一表达式可从方程組（2）分别乘以 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 然后相加得到，即

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial V}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial V}{\partial z}\cos\gamma.$$

这个方程式可以直接写出，只要我們想到梯度等于它的各个分量在它本身上的投影之和。

复数点函数是这样一个函数，它的实部和虚部都是点函数，即

$$V(x,y,z)=V_1(x,y,z)+iV_2(x,y,z).$$

我們不能說复数点函数的等位面，因为它的实部有一族等位面，它的虚部又有一族等位面，它的絕对値也有一族等位面，还有其他等等。复数点函数有相同相角的点的軌跡

$$\psi=\tan^{-1}\frac{V_2(x,y,z)}{V_1(x,y,z)}$$

称为**等相（位角）面**，在划分平面波、柱面波、和球面波时要用到等相面。复数点函数的梯度的定义是一个复数向量，其各个分量是这函数的各个偏函数。

有向点函数是一个向量，它的指向分量是普通的点函数。

1.3 散度

一向量 $F(x,y,z)$ 通过面 S 的通量的定义为面积分

$$\Phi=\iint F_n\,dS,$$

其中 F_n 是正交于积分面的分量。向量通过單連通封閉曲面 S 的外出通量除以 S 面所包的体积 v 所得的值称为 F 的**平均散度**。当封閉面 S 收縮成一个点时，平均散度的極限值称为 **F 在該点上的散度**，写成

$$\operatorname{div} F=\lim\frac{\iint F_n\,dS}{v},\ \text{当}\ S\to 0.$$

把封閉面 S 所包的体积 v 划分为許多小細胞体积元，我們可以观察到：越过 S 面的 F 的总通量等于越过各个小細胞体积分界面的通量之和，相鄰兩細胞公共分界部分上的通量对于总通量沒有影响。由于通过每一个細胞体积分界面的通量是 $\operatorname{div} F\,dv$，我們得到

$$\iint F_n\,dS=\iiint \operatorname{div} F\,dv. \tag{3-1}$$

面散度可以比照体积散度来下定义，即

$$\operatorname{div}'F=\lim\frac{\int F_n\,ds}{S},\ \text{当}\ s\to 0,$$

其中 s 是面 S 的分界綫。至于綫散度，就是寻常的导数。

1.4 綫积分、循环量和旋度

向量 F 沿路徑 AB（圖 1.9）的**綫积分**的定义为这向量的切綫分量 F_s 的积分 $\int_{(AB)}F_s\,ds$。假如 F 代表力，这个綫积分就表示力 F 在沿着 AB 运动的質点上所做的功。假如路徑曲綫是閉合的，这个积分便称为**循环量**。調整無限小閉合环的方位使沿着它的循环量为最大，此时环上單位面积的循环量称为 F 的**旋度** $\operatorname{curl} F$，它是一个向量，垂直于环所在的平面。旋度与循环量的正指向的关系如圖 1.10 所示。

設由簡單閉合曲綫圈定一曲面 S。將此曲面分为許多小面积元，

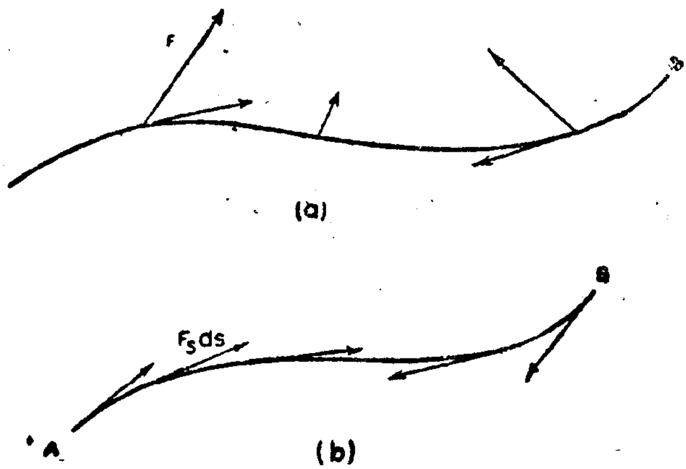


圖 1.9 說明綫积分

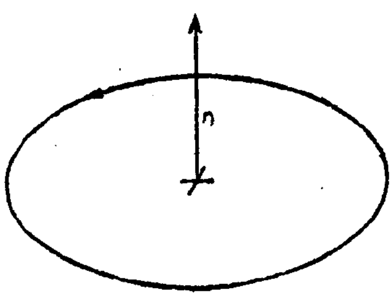


圖 1.10 F 的旋度和 F 的循环量正指向間的关系

我們可以观察到：沿着面 S 的边界綫所取 F 的循环量等于沿着各小面积元边界所取循环量之和，因为相鄰兩面积元公共边界部分对于总循环量的貢献互相抵消。由于沿着每一面积元分界綫的循环量是 $\mathrm{curl}_n F dS$，我們得到

$$\int F_s\, ds = \iint \mathrm{curl}_n F\, dS. \tag{4-1}$$

1.5 坐标系統

实用中常用的坐标系統有**直角坐标、柱面坐标和球面坐标**；空間中一点 P 在这些坐标系中分别用 (x,y,z)、(ρ,φ,z) 和 (r,θ,φ) 表示。这些坐标的意义可从圖 1.11 上看出；x, y, z 是到三个互成垂直的平面的距离；ρ 是到 z 軸的距离；r 是到原点的距离；“極角” θ 是半徑 r 与 z 軸間的夾角；“經度” φ 是 xz 平面与由 z 軸和 P 点所定平面間的夾角。

在一般坐标系中，点 $P(u,v,w)$ 是由三个面

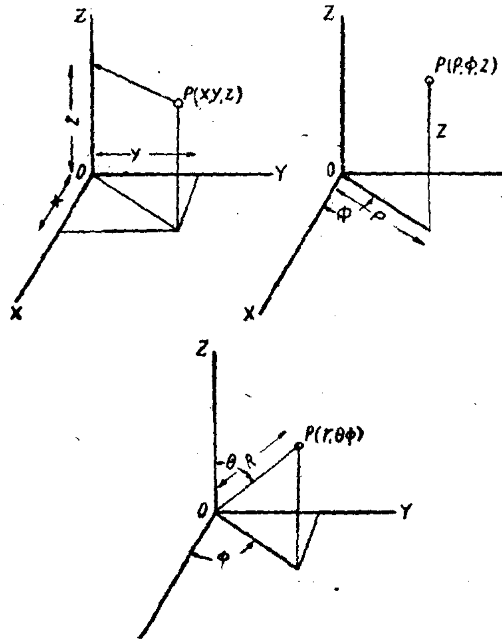


圖 1.11 直角、柱面和球面坐标系

$$f_1(x,y,z)=u,\quad f_2(x,y,z)=v,\quad f_3(x,y,z)=w$$

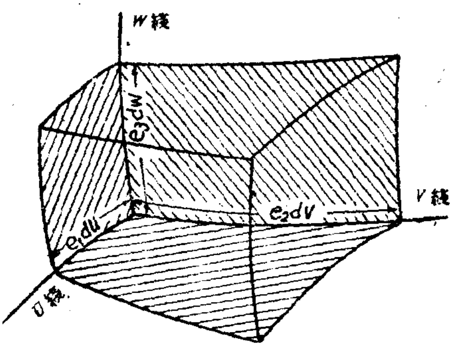


圖 1.12 一个元量坐标細胞体

的交点确定的。这[illegible]曲面的交綫称为**坐标綫**；例如 u 綫是 v 面与 w 面的交綫。

假如坐标系是正交的，則沿坐标綫的微分量就正比于坐标的微分量(看圖 1.12)，即

$$ds_u=e_1\,du,$$
$$ds_v=e_2\,dv,$$
$$ds_w=e_3\,dw.$$

对于一般的元量長度 ds 我們有关系式

$$ds^2=(ds_u)^2+(ds_v)^2+(ds_w)^2=e_1^2du^2+e_2^2dv^2+e_3^2dw^2.$$

就直角、柱面与球面坐标說，我們有

$$ds_x = dx,\quad ds_y = dy,\quad ds_z = dz;\quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

$$ds_\rho = d\rho,\quad ds_\varphi = \rho\, d\varphi,\quad ds_z = dz;\quad ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2;$$

$$ds_r = dr,\ ds_\theta = r\, d\theta,\ ds_\varphi = r\sin\theta\, d\varphi;\ ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2.$$

对于坐标面內的元量面說，我們有

$$dS_u = ds_v ds_w,\quad dS_v = ds_w ds_u,\quad dS_w = ds_v ds_u;$$

$$dS_x = dy\, dz,\quad dS_y = dz\, dx,\quad dS_z = dx\, dy;$$

$$dS_\rho = \rho\, d\varphi\, dz,\quad dS_\varphi = d\rho\, dz,\quad dS_z = \rho\, d\rho\, d\varphi;$$

$$dS_r = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,\quad dS_\theta = r\sin\theta\, dr\, d\varphi,\quad dS_\varphi = r\, dr\, d\theta.$$

最后，元量坐标細胞体的体积是

$$d\tau = ds_u ds_v ds_w = dx\, dy\, dz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

1.6 梯度、散度和旋度的微分表达式

点函数 V 的梯度沿各坐标綫方向的分量是沿 u, v, w 方向的定向导数，即 dV/ds_u、dV/ds_v、dV/ds_w。將上述三种坐标系中距离微分量的值代入，即得

$$\operatorname{grad}_x V = \frac{\partial V}{\partial x},\quad \operatorname{grad}_y V = \frac{\partial V}{\partial y},\quad \operatorname{grad}_z V = \frac{dV}{\partial z};$$

$$\operatorname{grad}_\rho V = \frac{\partial V}{\partial \rho},\quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{\partial V}{\rho\, \partial \varphi},\quad \operatorname{grad}_z V = \frac{\partial V}{\partial z};$$

$$\operatorname{grad}_r V = \frac{\partial V}{\partial r},\quad \operatorname{grad}_\theta V = \frac{\partial V}{r\, \partial \theta},\quad \operatorname{grad}_\varphi V = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi};$$

$$\operatorname{grad}_u V = \frac{1}{e_1}\frac{\partial V}{\partial u},\quad \operatorname{grad}_v V = \frac{1}{e_2}\frac{\partial V}{\partial v},\quad \operatorname{grad}_w V = \frac{1}{e_3}\frac{\partial V}{\partial w}.$$

为了計算向量 F 在点 P 上的散度，我們在 P 点周圍取元量体积細胞，計算越过这体积元分界面的外出通量，再用这体积元的体积去除。这个体积元所截 u 坐标面的面积为 dS_u，而通过此面的通量为 $F_u dS_u$。因为沿 u 方向此通量的变动率是 $D_u(F_u dS_u)$，所以越这体积元

的 u 面的剩余通量是 $D_u(F_u dS_u)du$。同样，算出越过这体积元的 v 面和 w 面的剩余通量。然后得到越过这体积元的表面的全部外出通量为 $D_u(F_u dS_u)du + D_v(F_v dS_v)d_v + D_w(F_w dS_w)d_w$.將各种坐标系統里面积元量的値代入，並除以相应的元量体积的値即得

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{dy} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + r\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta F_\theta) + r\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right],$$

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{e_1 e_2 e_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}(e_2 e_3 F_u) + \frac{\partial}{\partial v}(e_1 e_3 F_v) + \frac{\partial}{\partial w}(e_1 e_2 F_w)\right].$$

按照定义，$\operatorname{curl} F$ 的 u 方向的分量 $\operatorname{curl}_u F$ 是通过 P 点的單位 u 面面积的循环量（見圖1.13）。假如我們以 F 表示机械力，则 $\operatorname{curl}_u F$ 就是 F 在 u 面上單位面积內所做的功。設在 P 点周圍取以 v 綫及 w 綫圍成的面积元，F 沿过 P 点的 w 綫所作的功是 $F_w ds_w$，此功沿 v 綫方向的变动率是 $D_v(F_w ds_w)$，所以 F 在此面积元周界上 w 綫部分沿反

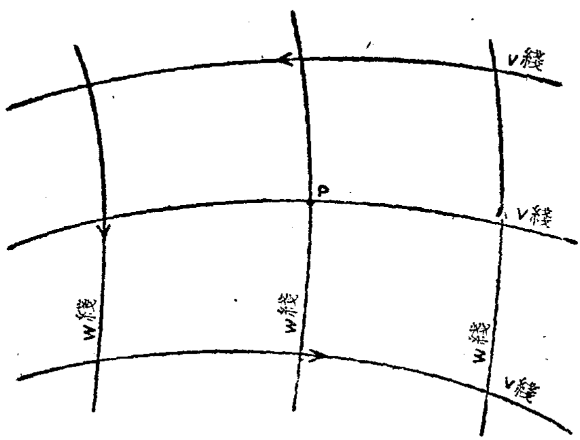


圖 1.13 說明向量的旋度的推导