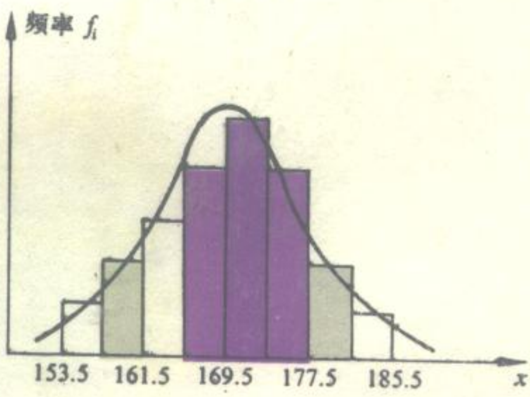
概率论与数理统计

廖玉麟 主编



复旦大学出版社

概率论与数理统计

主　编　廖玉麟
副主编　易昆南
编写人员（按姓氏笔画为序）
易昆南　赵新泽　郭　郁
徐　敏　廖玉麟

复旦大学出版社

内 容 提 要

本书是按照1992年高等工业学校工科数学课程教学基本要求编写的．内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多元随机向量及其分布、随机变量的函数的分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、正交试验设计等十一章．

本书可作为高等工科院校、职工大学、业余大学的教材，也可供工程技术人员参考．

责任编辑 范仁梅
责任校对 马金宝

概率论与数理统计
夏玉[illegible] 主编
复旦大学出版社出版
（上海国权路 579 号）
新华书店上海发行所发行 上海医大印刷厂印刷
开本 850×1168 1/32 印张 12.5 字数 370,000
1995 年 7 月第 1 版 1995 年 7 月第 1 次印刷
印数1—8,500
ISBN7-309-01538-X/O·157
定价：12.00元

序

众所周知，在科学技术高度发展的当今世界，无论是作为一门基础理论学科，还是作为用于自然科学、社会科学以及工程技术的一个工具，数学正在发挥日益重要的影响和作用。可以说，现代科技的几乎每个重大成果都离不开数学的参与和渗透。因此，在我国高等工科院校中加强数学教育，已成为十分迫切的需要。应此需要，铁路高校数学协作组组织编写了这套系列数学教材。

一本数学教材，既不是原材料的堆砌，也不是某些定理和公式的随机选取，它应当对所考察的领域提供一个可供游览的园地和一条入门途径。作为工科数学教材，既要考虑到数学的严谨性，又要注意各种应用实例。一本成功的教材，应该瞄准培养适应现代化建设要求的专门人才这个大目标，面向世界，面向未来，根据数学在全局中的地位与作用，精心组织教材内容，注重基本理论、基本知识、基本技能的训练。本系列教材的作者们大都从教多年，具有丰富教学经验。因此，我认为本套系列教材是能够而且已经瞄准了上述目标，为我国工科院校数学教材建设做出重要贡献的。

侯振挺

1994年仲夏之夜写于长沙铁道学院荷花村

前　言

为贯彻国家教委关于"加强教材研究，继续提高质量，努力扩大品种，逐步形成特色"的指示精神，我们在铁道部部属院校数学协作组的组织下，按照"1992年高等学校工科数学课程教学基本要求"编写了这本教材。

"考虑到二〇〇〇年教材建设的大体设想"，将基本理论课内容向近代文献靠拢。我们在编写过程中尽力实现这个想法。考虑到这一课程在高等工业学校教学计划中是一门重要的基础理论课，因此，我们致力于讲清其最基本的概念和方法，注重培养基本运算能力、分析问题和解决问题的能力，并用大量例题来说明其应用的广泛性。

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学学科。概率论是对随机现象统计规律演绎的研究，数理统计则是对随机现象统计规律归纳的研究。虽然两者在方法上很不相同，但作为一门学科，它们却是互相渗透、互相联系的。本书分两部分：概率论部分（第一章至第六章）作为基础知识是全书的重点，它提供了必要的理论基础；统计部分（第七章至第十一章）介绍了常用的统计推断方法。本书还扼要地介绍了如何利用电子计算机进行随机模拟，培养学生运用统计方法和现代计算工具解决实际问题的能力。本书每章末都附有基本题（A）和选作题（B）两套，以供不同水平、不同专业的学生参考选用。书末附有习题参考答案或提示。

本教材的教学时数为52学时左右，可作为高等学校工科工程数学——概率论与数理统计课程的教材，也可供职工大学、业余大学选作教材及工程技术人员参考。

本教材由铁道部部属两院校共同编写。由长沙铁道学院廖玉麟任主编，易昆南任副主编。参加编写人员及分工如下：

长沙铁道学院：廖玉麟(第1—2章)，

赵新泽(第3—4章)，

徐　敏(第5—6章)，

易昆南(第7章，§9.4，§10.6)；

苏州铁道师范学院：郭郁(第8—11章，不包括§9.4，§10.6)。

全书由主编和副主编修改定稿。

本教材在编写和出版过程中得到铁道部部属西南、北方、华东交大、大连、上海、兰州、石家庄、长沙铁道学院及苏州铁道师范学院等各级领导的关心和支持。大连铁道学院于连璋教授对本书的编写提出了宝贵的意见。长沙铁道学院副院长侯振挺教授在百忙中给本书作序。上海铁道学院毛汉清同志、复旦大学出版社，特别是范仁梅编辑对本书的出版给予了大力支持和帮助，对此我们一并表示衷心的感谢！

限于我们的水平，书中难免存在一些缺点和错误，敬请广大师生、读者批评和指正。

编　者

1994年12月

目　录

第一章　随机事件与概率

§ 1.1　随机事件和样本空间

（一）必然现象与随机现象

在自然界里和科学实验中出现的现象，大体上可以分为两类：一类为必然现象，另一类为随机现象。

必然现象是指在某些条件下必然发生的现象。例如在标准大气压下，水加热到100℃时会沸腾；上抛的重物必然下落等。

随机现象，即常说的偶然现象。例如，从一批同类产品中任意抽取一个产品，在取出之前，谁也不能确知这个产品是合格品，还是不合格品；又如某城市的天气，在某年、月、日尚未到时，不能准确预知该日天气情况。再如掷一枚硬币，在掷之前，不能预料究竟是字面出现，还是花面出现等。也就是说，由试验条件不能完全决定其试验结果的现象，称为随机现象。

人们在多次重复观察和生产实践中发现：在个别观察试验中，虽然随机现象的结果呈现不确定性，但在大量重复试验中，其结果的出现却呈现出一定的规律性，这种规律性称为**统计规律性**。综上所述，随机现象就是在个别试验中呈现偶然性而在大量重复试验中又具有概率统计规律性的现象。概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。这门学科既有它自己独特的概念与方法，又与其他数学分支有着紧密的联系。在理论联系实际方面，是最活跃的数学分支之一。

（二）随机试验与随机事件

1．随机试验

为了研究随机现象的统计规律性，常要作一些与这类现象有联系的“观察”或“试验”．如果这个试验具有以下特点：

1）试验可在相同条件下重复进行；

2）每次试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

3）每次试验的结果事前不可预言，我们就称它为一个随机试验。今后所说的试验都是指随机试验，同字母 E 表示。例如，

E_1：掷一粒骰子并观察向上那面的点数。

E_2：在一条生产线上制造产品，检查在24小时内生产次品的数目。

E_3：以10件为一批的产品中有3件是次品，从中一件接着一件地选取（已选取的不放回）直到取出第三件次品为止。检点从这批产品中新取出的产品的总数。

E_4：测量一根钢梁的抗拉强度。

E_5：掷一枚硬币四次，并观察出现正面的总数。

E_6：掷一枚硬币四次，并观察得到的正面及反面的序列。

E_7：记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数。

应该注意，在描述各种不同的试验时，我们不仅规定正要实行的程序，而且还规定什么是我们所要观察的（例如，上面提到的试验E_5和 E_6 的差别）．这点很重要，在后面讨论随机变数时将还会谈到它．

2．随机事件

进行一个试验总有其观察的目的，试验中会观察到有多种不同的可能结果。例如，在试验 E_1 中，我们的目的是要观察向上那面的点数。它有下列不同的结果：“出现1点”，“，出现2点”，…，“出现6点”，“出现奇数点”，“出现偶数点”，“出现大于2的点”等等。

试验的每一个可能结果一般称为**随机事件**，简称为**事件**，用字母 $A, B, C, \cdots$ 表示。

我们把不可能再分的事件称为**基本事件**，例如E_1中“出现1点”，“出现2点”……“出现6点”都是基本事件．由若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**。例如“出现奇数点”是一个复合事件，它由“出

现 1 点"，"出现 3 点"，"出现 5 点"三个基本事件组成。

一个事件是否称为基本事件，是相对于试验的目的来说的。例如，对一批灯泡进行检测，若检测的目的是测试使用寿命 t，区间 $[0,+\infty)$ 中的任一实数，都可以是一个基本事件。这时，基本事件有无穷多个。如果检测的目的是判定产品是否为合格，则这时就只有两个基本事件：合格品与不合格品。

下面是某些事件的例子，我们仍参考前面所列的试验来说明。A_i 是指与试验 E_i 相联系的一个事件。

A_1：出现一个偶数，即 $A_1=\{2,4,6\}$。

A_2：$\{0\}$，即所有产品都非次品。

A_5：$\{2\}$，即出现两次正面。

A_6：$\{HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH\}$，即出现正面多于反面。

今后我们常说在一个试验 E 中一个事件发生，意思是指在组成这个事件的基本事件中，至少有一个在试验 E 中发生。

（三）事件的关系与运算

进行一个试验，有这样或那样的事件发生。这些事件既各有不同的特性，又彼此之间有一定的联系。了解各自的特性与彼此之间的联系，不仅使我们能更深刻地认识事件的本质，而且将有利于今后对事件和它的概率的叙述和计算。下面引进事件之间的一些重要关系和运算。

先介绍两个特殊的事件。

在一定条件组下必然发生的事件称为**必然事件**。必然事件用符号 Ω 表示。

在一定条件组下必然不发生的事件称为**不可能事件**。不可能事件用符号 $\varnothing$ 表示。

例如，世界上"人的身高小于 4 米"是必然事件，而"人的身高大于4 米"则是不可能事件。

把必然事件与不可能事件也算作随机事件对我们讨论问题是方

便的。

1. 事件的关系

1）互不相容

如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生，则称事件 A 与事件 B 为互不相容或互斥。例如，E_1 中事件"出现 1 点"和事件"出现 2 点"是互不相容的，必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 是互不相容的。

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容。

2）包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 含于事件 B，或称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subset B$。例如 E_1 中，令 A 表示"点数小于 2"，B 表示"出现奇数点"，则 $A\subset B$。又如对任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

3）相等(或等价)

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等(或等价)，记为 $A=B$。

2. 事件的运算

1）事件的和(或并)

若 C 表示"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"这一事件，则称它为事件 A 与 B 的和(或并)，记为 $C=A\cup B$。例如在 E_1 中，令 A 表示"出现偶数点"，B 表示"出现的点数小于 5"，则 $C=A\cup B$ 表示"出现的点数或者是偶数，或者小于 5"，它等价于"出现的点数为 1,2,3,4,6 中之一"。

当事件 A 与 B 互不相容时，我们将和事件记为 $C=A+B$.

设 A 为任一事件，显然有

$$A\cup A=A,\ A\cup\Omega=\Omega,\ A\cup\varnothing=A.$$

2）事件的积(或交)

若 D 表示"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件，则称它为 A 与 B 的积(或交)，记为 $D=A\cap B$，或 $D=AB$。沿用上例，则 D 表示"出现 2 点或 4 点"这一事件。

设 A 为任一事件，容易得到

$$A\cap\Omega=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing.$$

若 A_1,A_2 互不相容，则 $A_1\cap A_2=\varnothing$.

事件的和与事件的积都可以推广到有限多个事件的情形。设 A 表示任意有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生这一事件，则 A 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记为 $A_1\cup A_2\cdots\cup A_n$，简记为 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。

当 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容时，和事件记为 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

任意有限个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生这一事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积或交，记为

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i.$$

我们还需将事件的和与积进一步推广至可列无限多个的情形。即 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示可列无限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生这一事件.

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示可列无限多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生这一事件。

3）事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生，这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$。沿用前例，$A-B$ 表示"出现 6 点"。

由两事件的差的定义可得：对任意事件 A，有

$$A-A=\varnothing;\ A-\varnothing=A;$$

$$A-\Omega=\varnothing.$$

4）逆事件(对立事件)

差事件 $\Omega-A$，称为事件 A 的逆事件，记为 $\bar{A}$，它表示"A 不发生"这一事件。用前例，$\bar{A}$ 表示"出现奇数点"。

事件的运算满足下列法则：

交换律：　$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A;$

结合律：　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$

分配律： $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

$$A-B=A\cap\overline{B}.$$

德-莫根(De-Morgan)律：对有限个或可列无限个 A_i，恒有

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A}_i.$$

（四）样本空间、事件的点集解释与图示

对于随机试验的每一基本事件，用仅含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示。对于由若干基本事件组成的复合事件，用包含若干个元素的集合表示。由所有基本事件对应的全部元素组成的集合，我们称它为**样本空间**，仍用 Ω 表示。样本空间中的每一个元素，称之为**样本点**。由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件之一，所以，样本空间作为一个事件是必然事件。

我们将集合与事件的术语对照列成表1.1。

表 1.1

符 号	集 合 论	概 率 论
Ω	空间	样本空间；必然事件
ϕ	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 中的点(或称为元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A\subset B$	集合 A 包含在集合 B 中	事件 A 含于事件 B
$A=B$	集合 A 与集合 B 相等（或等价）	事件 A 与事件 B 相等(或等价)
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 之和(或并)	事件 A 与事件 B 至少发生一个(事件 A 与事件 B 之和或并)
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 之交	事件 A 与事件 B 同时发生(事件 A 与事件 B 之积或交)
$\overline{A}$	集合 A 之余集	事件 A 的逆事件
$A-B$	集合 A 与集合 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生(事件 A 与事件 B 之差)
$A\cap B=\phi$	集合 A 与集合 B 没有公共元素	事件 A 与事件 B 互不相容

若以平面上某正方形表示样本空间，正方形内的点表示样本点，则事件的运算可通过平面图形表示，这种表示法称为文(Venn)图。如果用两个小圆表示事件A和B，则图1.1中的阴影部分表示事件A与B的

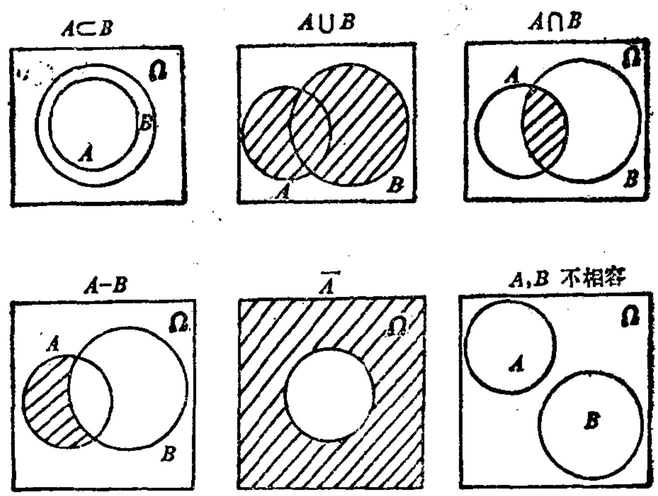


图 1.1

各种关系及运算，$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$\bar{A}$分别为图中的阴影部分。

下面举一些例子说明随机试验的样本点、基本事件和样本空间。

在E_1中，样本点是$\omega_1=\{$出现1点$\}$，$\omega_2=\{$出现2点$\}$，$\omega_3=\{$出现3点$\}$，$\omega_4=\{$出现4点$\}$，$\omega_5=\{$出现5点$\}$，$\omega_6=\{$出现6点$\}$；则

基本事件为：$\{\omega_i\}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$；

样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}$.

如果试验是抛两枚硬币，则其样本点为：

$$\omega_1=(H,H),\ \omega_2=(H,\ T),$$
$$\omega_3=(T,\ H),\ \omega_4=(T,T).$$

基本事件是：$\{\omega_1\}$，$\{\omega_2\}$，$\{\omega_3\}$，$\{\omega_4\}$，样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}.$$

如果试验是记录电话交换台在$(0,T]$内的呼叫次数，则样本点为$\omega_k=\{k$次呼叫$\}(k=0,1,2,\cdots)$，基本事件为

$$\{\omega_0\},\{\omega_1\},\cdots,\{\omega_n\},\cdots$$

样本空间是 $\Omega=\{\omega_k|\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$。

如果试验是测量某晶体管的寿命，一般说，它可用一非负实数 x 表示，则基本事件为 $\{x\}$，$x\geqslant 0$，样本空间由全体非负实数组成，即

$$\Omega=\{x|\ 0\leqslant x<\infty\}.$$

在具体问题中，给定样本空间是描述随机现象的第一步。但在概率论的研究中，一般都认为样本空间是给定的。这种必要的抽象使我们能更好地把握住随机现象的本质，并使得到的结果有广泛的应用。事实上，一个样本空间可以概括各种实际内容大不相同的问题。例如，只包含两个样本点的样本空间既能作为掷硬币出现正、反面的模型，也能用于产品检验中出现"合格品"及"不合格品"，还能用于气象中"下雨"与"不下雨"，以及公用事业排队现象中"有人排队"与"无人排队"，后面我们常以摸球等作为例子正是由于这个原因，它使问题的本质更为突出。

§ 1.2 随机事件的频率和概率

研究随机现象不仅要知道它可能出现哪些事件，更重要的是要研究各种事件出现的可能性大小，揭示出现这些事件的内在统计规律。在长期的实践中人们发现：观察一个随机试验的各种事件，有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些，有些事件出现的可能性彼此大致相同。

但是，只能大概地比较事件发生的可能性大小，是不能进行确切的推断，得出精确结论的，我们要求有一个刻画事件发生可能性大小的数量指标，并把这个数量指标叫做事件的概率。事件 A 的概率以 $P(A)$ 表示，并规定 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

在概率论的发展历史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法。