大学数学

上册

陈 仲

南京大学出版社

大 学 数 学

上 册

陈 仲

南京大学出版社

1998 · 南京

内 容 简 介

本书是综合大学本科物理、计算机、电子等系科“大学数学”课程的教材.它符合国家教委1989年审订的综合大学本科物理类专业“高等数学课程教学基本要求”和国家教委1997年制定的全国工学研究生入学考试大纲的要求.本书分上、下册.上册包含一元微积分、线性代数初步、空间解析几何、多元函数微分学和重积分;下册包含线面积分、级数与广义积分学、线性代数和微分方程.

本书将“微积分”、“微分方程”和“线性代数”三部分内容统筹布局,循序渐进.全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性,并适当地运用现代数学的观点和方法,将部分经典内容优化或深化,有些定理给出了编者自己的新证明.本书例题和习题丰富,有利于提高读者的分析能力.书末附有习题答案与提示.

本书可供综合性大学、理工科大学、师范院校作为教材.也可供工程技术人员阅读.

大学数学
上 册
陈 仲
*
南京大学出版社出版
(南京大学校内 邮政编码:210093)
江苏省新华书店发行 高邮印刷厂印刷
*
开本 787×1092 1/16 印张 21.125 字数 527 千
1998 年 2 月第 1 版 1998 年 2 月第 1 次印刷
印数 1—2000
ISBN 7-305-03035-X/O·214
定价:25.50 元

前　　言

本书是为综合大学本科物理、计算机、电子、天文、大气科学等系科“大学数学”课程编写的教材.它符合国家教委1989年审订的综合大学本科物理类专业“高等数学课程教学基本要求”和国家教委1997年制定的“全国工学硕士研究生入学考试(数学一)考试大纲”的要求.

本书分上、下册.上册包含一元微积分、线性代数初步、空间解析几何、多元函数微分学和重积分;下册包含线面积分、级数与广义积分学、线性代数和微分方程.书末有4个附录.本书可分三个学期讲授,总学时288.

本书是我们多年从事“大学数学”课程教学的产物.在编写过程中,我们力求做到:

1. 强化数学基础.我们的教学对象是理科中对大学数学要求较高的系科.其教学任务除使学生获得大学数学的基本概念、基本理论和基本方法外,还要使学生受到良好的科学训练,受到数学思想方法、逻辑推理能力的培养.因此,全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性,其中大部分定理给出简洁、严格的证明,旨在培养学生一定的数学素养,为学习专业课打下基础.

2. 改革课程体系.“微积分”、“微分方程”和“线性代数”在一些高等学校是作为三门课程独立开设的.这次我们将这三部分内容统筹布局,略有交叉,互有渗透,但保持各章的相对独立.例如:在“极限”之后介绍“级数的基本概念”,在“不定积分”之后增加一节“简单的微分方程”,在“定积分”之后讲授“广义积分”的基本概念,而对于这些概念的深入研究,留在后面的专列章节中讲授.又如:在“空间解析几何”之前增加一章“线性代数初步”,将矩阵、向量和行列式的知识提前讲授;在第三册中将“线性代数”安排在“微分方程”之前等.我们的思想是将“大学数学”作为一个整体,由浅入深,循序渐进,并把线性代数的方法引入微积分和微分方程,这对于简化分析运算、提高数学水平很有好处.我们感到,这样的课程体系具有科学性和适用性.

3. 更新教学内容.一是将部分经典内容优化或深化,对部分经典定理给出新证明.例如:在导数部分建立“取对数求导公式”;在广义积分部分建立“广义牛顿-莱布尼兹公式”,两类广义积分敛散性判别统一处理;对于空间曲线弧长计

算公式、曲线积分计算公式、正交曲线坐标下的散度与旋度公式等都给出了我们自己的新证明.二是增加了差分方程,动力系统和外微分等知识的介绍.

4. 渗透现代数学知识.我们在介绍经典数学内容的同时,注意渗透现代数学的观点和方法,适当地运用现代数学的术语和符号,为学生以后学习现代数学提供了"接口".

本书在编写中还十分注重对学生解题技巧和演算能力的培养,选编了大量具有启发性、典型性的例题和习题,并注重一题多解,前后呼应.习题分 A,B 两组,A 组为基本要求,B 组为较高要求.书末附有习题答案与提示.

书中用"*"标出的内容供教师选用,一般留给学生课外阅读.

本书在编写中,重点参考了由陈仲、姚天行合编的《微积分学引论》一书(南京大学出版社出版,1991 年版),选用了该书的部分习题.

本书在编写过程中,得到南京大学数学系佟文廷、陆文钊、姜东平、许绍溥、姚天行等老师的大力支持和帮助,由他们组成的专家组对本书的教学大纲进行评审,提出了许多有益的建议;特别得到我们的老师叶彦谦教授的指导,他担任我们"大学数学"课程建设的顾问,并仔细审阅本书初稿,提出许多宝贵的意见;在本书出版前的 4 年中,王现、丁南庆、丁德成、孙建华、曹荣美、周如海、林成森、何炳生、马传渔、尹会成、张玥生、王芳贵、朱乃谦、江惠坤、范克新、黄卫华、杨兴州、华茂芬、曹苏平、程健、邵荣、黄振友、李耀文、金其年等 24 位老师曾先后使用本书的讲义进行教学,并提出许多改进意见;本书的出版还得到南京大学教务处、南京大学出版社的大力支持.编者谨此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限,书中缺点和不足难免,诚恳期待专家和读者不吝赐教.

目　　录

第一章　极限与连续性

第二章　导数与微分

第三章 一元函数积分学

第四章 线性代数初步

第五章 空间解析几何

第六章 多元函数微分学

第七章 重积分

第一章　极限与连续性

§1.1　预备知识

首先介绍本书常用的数集和逻辑符号:

1) 数集:

$$\mathrm{N}=\{x \mid x \text{ 为自然数}\},$$
$$\mathrm{Z}=\{x \mid x \text{ 为整数}\},$$
$$\mathrm{R}=\{x \mid x \text{ 为实数}\},$$
$$\mathrm{C}=\{x \mid x \text{ 为复数}\}.$$

2) $\forall$:表示"对任意一个","对每一个"等. 例如 $\forall x \in \mathrm{R}$,表示"对任一实数 x".

3) $\exists$:表示"存在某个","至少有一个"等. 例如 $\exists n \in \mathrm{N}$,表示"存在某一正整数 n".

4) Ⅰ$\Rightarrow$Ⅱ:表示"由Ⅰ可推出Ⅱ","Ⅰ是Ⅱ成立的充分条件","Ⅱ是Ⅰ成立的必要条件".

5) Ⅰ$\Leftrightarrow$Ⅱ:表示"Ⅰ等价于Ⅱ","Ⅱ是Ⅰ成立的充分必要条件".

6) Ⅰ $\triangleq$ Ⅱ:表示"用Ⅱ定义Ⅰ".

7) □:表示一个定理或命题证明完毕.

正确运用逻辑符号,可简化文字叙述,且简捷明了.

1.1.1　集合与笛卡儿乘积

在中学里,我们已学过集合的基本概念. 大家知道,**集合**是具有某种性质的一组研究对象的全体;$a \in A$ 表示 a 是集合 A 的元素;给定一集合和一元素 a,则 $a \in A$ 与 $a \notin A$ 两者有一个且只有一个成立;给定两集合 A 与 B,若 A 与 B 的元素完全相同,则称 A 与 B **相等**,记为 $A=B$;不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$.

下面我们来研究集合的包含关系和运算性质.

定义 1.1.1 (子集 · 真子集)　设 A,B 是两个集合,若 $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$,则称 A 是 B 的**子集**,,记为 $A \subseteq B$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A;若 $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$,且 $\exists x_0 \in B$,使得 $x_0 \notin A$,则称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A \subset B$,读作 A 真包含于 B 或 B 真包含 A.

空集是任一集合的子集.

对于包含关系,显然有性质:

定理 1.1.1　若 A,B,C 是集合,则

1°　$A \subseteq A$;　　(自反性)

2°　$A \subseteq B, B \subseteq A \Leftrightarrow A=B$;　　(反对称性)

3°　$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.　　(传递性)

此定理的证明留给读者.

定义 1.1.2 (集合的并、交、差、补)　设 A,B 是集合,则 A 与 B 的并、交、差分别定义

为：

$$A \cup B \triangleq \{x \mid x \in A, \text{或 } x \in B\};$$
$$A \cap B \triangleq \{x \mid x \in A, \text{且 } x \in B\};$$
$$A \setminus B \triangleq \{x \mid x \in A, \text{但 } x \notin B\}.$$

分别读作 A 并 B，A 交 B，A 减 B. 特别，若 $B \subseteq A$，我们称 $C_A B \triangleq A \setminus B$ 为 B 在 A 中的补.

关于集合的并、交、差有下列基本性质：

定理 1.1.2 设 A,B,C 是集合，则

1° $A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$. （交换律）

2° $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. （结合律）

3° $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. （分配律）

4° $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$，
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. （德 - 摩根(De-Morgan)律）

证 我们只证第二个分配律和第一个德 - 摩根律. 其余各条的证明是类似的，留给读者.

因 $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$，且 $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in A$，且 $x \in B$ 或 $x \in C \Leftrightarrow x \in A$，且 $x \in B$；或 $x \in A$，且 $x \in C \Leftrightarrow x \in A \cap B$，或 $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. 故

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

因 $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$，但 $x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \in A$，但 $x \notin B$，$x \notin C \Leftrightarrow x \in A \setminus B$，且 $x \in A \setminus C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. 故.

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \qquad \square$$

下面介绍笛卡儿乘积概念①.

定义 1.1.3 （笛卡儿乘积） 设有集合 A,B，$\forall a \in A, b \in B$. 所有有序元素对 (a,b) 的集合称为 A 与 B 的**笛卡儿乘积**. 记为

$$A \times B \triangleq \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

特别，若 $A = B = \mathrm{R}$，则

$$\mathrm{R}^2 = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \triangleq \{(x,y) \mid x \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R}\},$$

称 R^2 为 **2 维空间或 2 维平面**. 类似地，我们可定义

$$\mathrm{R}^n = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R} \triangleq \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathrm{R}, \quad i = 1,2,\cdots,n\}$$

称 R^n 为 **n 维空间**，R^n 的元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 **n 维空间的向量(或点)**.

1.1.2 映射与函数

定义 1.1.4 （映射） 设 A,B 是两个非空集合，若 $\forall x \in A$，按某对应法则 f 有唯一的 $y \in B$ 与之对应，则称 f 为 A 到 B 的**映射**，记为

$$f: A \to B$$

---

① 笛卡儿(Descartes, 1596 - 1650)是法国数学家，解析几何学的创建人.

并称 y 为 x 关于映射 f 的**像**,记为 $f(x)$. 称 x 为 y 的**原像**,称 A 为映射 f 的**定义域**,记为 $D(f)$,称像 $f(x)$ 的集合为映射 f 的**值域**,记为 $f(A)$.

下面介绍几个特殊的映射:

1) 若 $B = f(A)$,称 $f:A \to B$ 为**满映射**,或称 f 将 **A 映到 B 上**.

2) 若 $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$ 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$①,称 $f:A \to B$ 为**单映射**.

3) 若 $f:A \to B$ 是满映射,又是单映射,则称 $f:A \to B$ 为 **1 - 1 映射**,或**双映射**.

定义 1.1.5 (函数) 设 $A \subseteq \mathrm{R}$(或 C),称映射 $f:A \to \mathrm{R}$(或 C)为**函数**,记为函数 $f:A \to \mathrm{R}$(或 C)或函数 $y = f(x), x \in A$. 称 x 为**自变量**,称 y 为**因变量**,称 $f(x)$ 为函数在 x 的**函数值**②. 称 $D(f) \triangleq A$ 为函数的**定义域**,称 $f(A) \triangleq \{f(x) \mid x \in A\}$ 为函数的**值域**. 特别

1) 当 x, y 皆为实数时,称 $y = f(x)$ 为**实变函数**,简称**实函数**;

2) 当 x 为实数,y 为复数时,称 $y = f(x)$ 为**复值函数**;

3) 当 x, y 皆为复数时,称 $y = f(x)$ 为**复变函数**,简称**复函数**.

要确定一个函数必须指明两点:第一,定义域;第二,对应法则. 函数的值域通常不必指明. 因为当定义域和对应法则确定之后,值域也就确定了.

例如 $S = \pi r^2, r > 0$,给出了圆面积 S 关于半径 r 的函数关系. 它的定义域为一切正实数,其值域显然也是一切正实数.

又如 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ 给出了函数 y 与自变量 x 的函数关系,对于用解析式给出的函数关系,如果没有标明定义域,我们通常把定义域理解为使这些解析式在实数(或复数)范围内有意义的一切自变量的值. 对上述函数,若规定 $x \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{R}$,则定义域为$(-1,1)$;若规定 $x \in \mathrm{R}, y \in \mathrm{C}$,则定义域为$(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$;若规定 $x \in \mathrm{C}, y \in \mathrm{C}$,则定义域为复平面$\{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathrm{R}, x_2 \in \mathrm{R}\}(x = x_1 + \mathrm{i}x_2)$上除去两点$(1,0),(-1,0)$的一切复数.

在本课程中,除几处用到复值函数外,若无特别声明,凡提到的函数都理解为实函数,并简称为**函数**. 对于复函数,本课程不予讨论.

定义 1.1.6 (逆映射与复合映射) 设 $f:A \to B$ 为 1 - 1 映射,则 $\forall y \in B$,存在唯一的 $x \in A$,使得 $f(x) = y$,这个由 B 到 A 的映射称为 f 的**逆映射**,记为

$$f^{-1}:B \to A.$$

设有映射 $f:A \to B,\ g:B \to C$,则由

$$g \circ f(x) \triangleq g(f(x))$$

定义的 A 到 C 的映射称为 f 与 g 的**复合映射**,记为

$$g \circ f:A \to C.$$

特别,在上述定义中若 $A \subseteq \mathrm{R}, B \subseteq \mathrm{R}, C \subseteq \mathrm{R}$,则称相应的逆映射 $f^{-1}:B \to A$ 为**反函数**,称复合映射 $g \circ f:A \to C$ 为**复合函数**.

例 设 $f(x) = x^2,\ g(x) = \log_a x$,试求函数 $f \circ g(x),\ g \circ f(x),\ g^{-1}(x)$,并确定其定

---

① 当 A 不是数集时,$x_1 \neq x_2$ 意指 x_1 与 x_2 是不同的元素.

② 人们习惯上把"函数 $f:A \to \mathrm{R}$"写作"$y = f(x), x \in A$",或"$f(x), x \in A$",或"$f(x)$"(如果定义域是不写自明的). 严格说来这样做是有缺陷的,因为它混淆了函数 f 与函数值 $f(x)$. 不过这种习惯已被广泛采用,本书也常采用这种简便的写法.

义域.

解 $f\circ g(x)=(\log_a x)^2,\quad x\in(0,+\infty)$;

$g\circ f(x)=\log_a(x^2)=2\log_a|x|,\quad x\in \mathrm{R}\setminus\{0\}$;

$g^{-1}(x)=a^x,\quad x\in\mathrm{R}$.

1.1.3 初等函数

在中学里,大家已学过幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数,并讨论了它们的初等性质,例如定义域、值域、单调性、奇偶性、有界性、周期性等,这些内容在以后的学习中都是重要的.

定义1.1.7 (初等函数) 幂函数,指数函数,对数函数,三角函数和反三角函数等5类函数称为**基本初等函数**. 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算与有限次复合而得到的函数称为**初等函数**.

初等函数是最常见,应用最广的一类函数,是大学数学课程研究的主要对象. 以后学习级数和广义积分时,我们将介绍由这些概念所产生的特殊函数.

现在介绍一个特殊的指数函数

$$y=\mathrm{e}^x,$$

这里 e 是一个重要常数,我们将在 1.2.6 中详细讨论它($\mathrm{e}\approx 2.718281828459045\cdots$ 为无理数). 此函数的反函数记为

$$y=\ln x\triangleq\log_{\mathrm{e}}x.$$

由于

$$x^\mu=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\quad(x>0);$$

$$a^x=\mathrm{e}^{x\ln a}\quad(a>0,a\neq1);$$

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}\quad(a>0,a\neq1);$$

$$\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right);$$

$$\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x;$$

$$\arctan x=\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

可见函数 e^x 与 $\sin x$ 具有特别重要的作用,我们称 e^x 与 $\sin x$ 为初等函数的**生成函数**. 如果我们研究了生成函数的性质,只要再讨论反函数、复合函数以及函数的加减乘除四则运算的性质,那么就可推知所有初等函数的性质.

下面介绍一类由 e^x 生成的初等函数 —— 双曲函数:

$$\operatorname{sh}x=\sinh x\triangleq\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}),$$

$$\operatorname{ch}x=\cosh x\triangleq\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}),$$

$$\operatorname{th}x=\tanh x\triangleq\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}},$$

$$\operatorname{cth}x=\coth x\triangleq\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}},$$

分别称为**双曲正弦**,**双曲余弦**,**双曲正切**,**双曲余切**. 它们的图形见图 1.1.

由双曲函数的定义,容易验证下列公式:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2\operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{cth} 2x = \frac{1 + \operatorname{cth}^2 x}{2\operatorname{cth} x}.$$

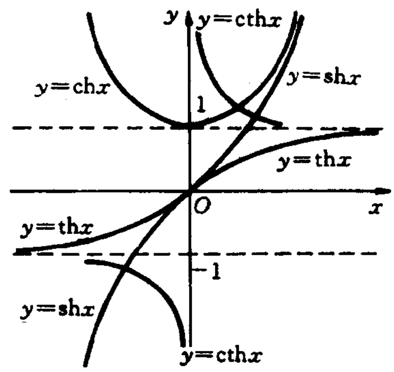

图 1.1

这些公式与三角公式有很多相似之处,读者要特别注意符号上的区别.

现在来求双曲正弦与双曲余弦的反函数. 设

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

两边乘以 $2e^x$ 移项得

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

解之得 $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ (因 $e^x > 0$,故括号前取正号). 因此 $y = \operatorname{sh} x$ 的反函数为

$$y = \operatorname{ar\,sh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

类似可求 $y = \operatorname{ch} x$ 的反函数(取单值分支)为

$$y = \operatorname{ar\,ch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geqslant 1.$$

最后举例介绍**分段函数**的概念,它是把函数的定义域分为若干区间及一些点,在不同区间上用不同的解析表达式表示函数关系. 分段函数不是初等函数.

例 1　取整函数

$$y = [x] \triangleq n \quad (n \leqslant x < n + 1,\ n \in \mathbb{Z}),$$

即$[x]$为不超过 x 的最大整数. 它的图形见图 1.2. 图中的小圈表示该点不在函数的图像上(下同).

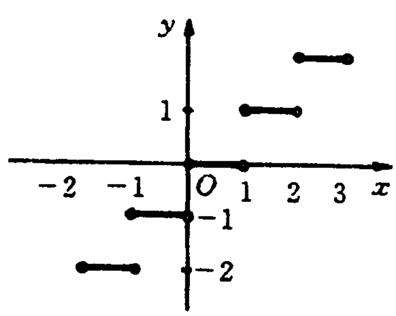

图 1.2

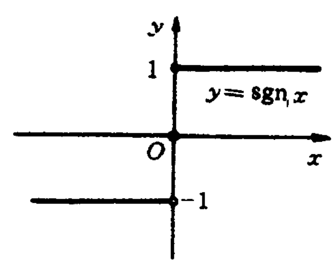

图 1.3

例 2　符号函数

$$y = \operatorname{sgn}x \triangleq \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

它的图形见图 1.3.

1.1.4　实数基本定理

实数集具有下列重要性质.

定理 1.1.3　(分划原理·实数基本定理 Ⅰ)　设 $A \subseteq \mathrm{R}, B \subseteq \mathrm{R}, A, B$ 非空,满足:

i) $\forall x \in \mathrm{R} \Rightarrow x \in A$ 或 $x \in B$;

ii) $\forall x \in A,\ y \in B \Rightarrow x < y$,

则存在唯一的 $\alpha \in \mathrm{R}$,使得 α 是 A 中的最大数或是 B 中的最小数.

此定理的证明超出本课程要求,故从略.此定理指出了实数的连续性,它是极限理论的重要理论基础.

下面介绍数域和确界的概念.

定义 1.1.8　(数域)　设 $F \subseteq \mathrm{C}$,满足条件:

i) $\exists a \in F, a \neq 0$;

ii) F 对加减乘除四则运算(除数不为零)封闭(即 $\forall a, b \in F$,则 $a \pm b \in F, ab \in F$, $\frac{a}{b} \in F(b \neq 0)$),则称 F 为一**数域**.

由定义可知,有理数集 Q,实数集 R,复数集 C 皆是数域.整数集 Z,自然数集 N,无理数集 R \ Q 都不是数域.

定义 1.1.9　(界与确界)　设 $G \subset \mathrm{R}$,

1) 若 $\exists K \in \mathrm{R}, \forall x \in G$ 有 $x \leqslant K$,则称 K 为数集 G 的**上界**,称 G 为**上有界数集**.

2) 若 $\exists K' \in \mathrm{R}, \forall x \in G$ 有 $x \geqslant K'$,则称 K' 为数集 G 的**下界**,称 G 为**下有界数集**.

3) 若 $M \in \mathrm{R}$,满足两个条件:1° $\forall x \in G$ 有 $x \leqslant M$; 2° $\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 \in G$ 使得 $x_1 > M - \varepsilon$.则称 M 为数集 G 的**上确界**,记为 $M = \sup G$.

4) 若 $m \in \mathrm{R}$,满足两个条件:1° $\forall x \in G$ 有 $x \geqslant m$; 2° $\forall \varepsilon > 0, \exists x_2 \in G$ 使得 $x_2 < m + \varepsilon$.则称 m 为数集 G 的**下确界**.记为 $m = \inf G$.

很显然,数集 G 的上确界 M 是数集 G 的最小上界;数集 G 的下确界 m 是数集 G 的最大下界.

上无界的数集显见没有上确界,下无界的数集显见没有下确界.那么,上有界的数集是否一定有上确界,下有界的数集是否一定有下确界呢?我们有

定理 1.1.4　(确界存在定理·实数基本定理 Ⅱ)　上(下)有界的非空数集必有上(下)确界.

* **证**　我们只就上确界证明,下确界情况的证明留给读者.

设 G 是上有界非空数集.令 B 是 G 的上界的集合,$A = \mathrm{R} \setminus B$.显然,$A, B$ 皆非空.$\forall x \in A, y \in B$,因 $x \notin B$,故 x 不是 G 的上界,于是 $\exists a \in G$,使得 $x < a$,又因 $y \in B$,必有 $a \leqslant y$,于是 $x < y$.应用分划原理,必存在唯一的实数 α,使得 α 为 A 中的最大数,或是 B 中的最小数.下面证明 α 必是 B 中的最小数.事实上,若 α 是 A 中的最大数,则 α 不是 G 的上

界，故 $\exists b \in G$，使得 $\alpha < b$. $\forall \beta \in \mathrm{R}$ 使得 $\alpha < \beta < b$，则 $\beta \in A$. 此与 α 为 A 中的最大数矛盾. 故 $\alpha \in B$. 因 α 是 B 中的最小数，即为 G 的上确界. □

此定理是实数理论中的一条重要定理. 在 1.2.5 中将有重要的应用.

习题 1.1

A 组

1. 设 $A = \{0\}$，$B = \{0,1\}$，下列陈述是否正确？

1) $A = \varnothing$；　　2) $A \subset B$；

3) $0 \in A$；　　4) $\{0\} \in A$；

5) $0 \subset A$；　　6) $A \cap B = 0$；

7) $A \cup B = B$.

2. 设 $A = \{1,2,3\}$，试列出 A 的一切子集.

3. 设 A, B, C 是任意集合，试证明：

1) 若 $A \subseteq C, B \subseteq C$，则 $A \cup B \subseteq C$；2) 若 $C \subseteq A, C \subseteq B$，则 $C \subseteq A \cap B$；

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；　4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

4. 对下列映射 $f: A \to B$，试判别哪些是满映射？哪些是单映射？哪些是双映射？哪些三者皆不是？

1) 设 A 是某班学生的集合，B 是正整数集合，$f(x)$ 表示学生的学号数；

2) A 是某平面上三角形集合，B 是该平面上圆的集合，$f(x)$ 表示三角形的内切圆；

3) A 是某平面上长方形集合，B 为该平面上菱形的集合，$f(x)$ 表示长方形四边中点相连所得到的菱形；

4) $A = B = \mathrm{R}$，$f(x) = \sin x$；

5) $A = \{x \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\}$，$B = \mathrm{R}$，$f(x) = \tan x$.

5. 求下列函数的定义域和值域：

1) $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$；　　2) $y = \sqrt{2 + x - x^2}$；

3) $y = \ln(1 - 2\cos x)$；　　4) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{1 - x}$.

6. 求函数 $f(x)$，已知

1) $f(x + 1) = x^2 + 2x - 3$；　　2) $f(\dfrac{1}{x}) = x + \sqrt{1 + x^2}$，$x > 0$；

3) $f(x - \dfrac{1}{x}) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

7. 设 $x \in \mathrm{R}$，$f(x) = x^2$，$g(x) = \sqrt{x} + x$，求 $f \circ g(x)$，$g \circ f(x)$，并指出定义域.

8. 用几个基本初等函数及其四则运算表示下列函数的复合关系：

1) $y = \log_a \sin x$；　　2) $y = \cos\sqrt{1 + x^2}$；

3) $y = \tan(1 + \log_3(1 + x^2))$.

9. 试用 $\mathrm{ch}\, x$ 表示 $\mathrm{sh}\,\dfrac{x}{2}$、$\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{2}$，用 $\mathrm{th}\, x$、$\mathrm{th}\, y$ 表示 $\mathrm{th}(x \pm y)$.