天元研究生数学丛书

群表示论

曹锡华 叶家琛 编著

北京大学出版社

天 元 研 究 生 数 学 丛 书

群 表 示 论

曹锡华　叶家琛　编著

北 京 大 学 出 版 社
北 京

图书在版编目(CIP)数据

群表示论/曹锡华,叶家琛编著. —北京:北京大学出版社,1998.5

(天元研究生数学丛书)

ISBN 7-301-03522-5

Ⅰ.群… Ⅱ.①曹… ②叶… Ⅲ.群表示-研究生-教材
Ⅳ.0152.6

书　　名:**群表示论(天元研究生数学丛书)**
著作责任者:曹锡华　叶家琛　编著
责 任 编 辑:刘　勇
标 准 书 号:ISBN 7-301-03522-5/O·402
出　版　者:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　　话:出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
850×1168　32开本　7.375印张　178千字
1998年5月第一版　1998年5月第一次印刷
印　　　数:0001—3,000册
定　　　价:12.50元

《天元研究生数学丛书》书目

（标△号者表示待出版）

1. 复变函数论选讲 张南岳等编著
2. 近代分析引论 苏维宜编著
3. 高等概率论 程士宏编著
4. 复半单李代数引论 孟道骥编著
5. 群表示论 曹锡华等编著
6. 模形式讲义 △ 陆洪文等编著

《天元研究生数学丛书》编委会

内 容 简 介

群表示理论是近代数学中发展迅速且相当活跃的数学分支，它在量子力学、量子化学、核结构、固体物理、场论等的研究中有十分广泛的应用. 本书旨在全面讲述群的表示理论. 全书共分四章，内容包括：有限群的常表示，包括线性表示的基本概念、特征标理论和诱导表示的一系列重要结果；有限群的模表示，包括 Brauer 特征标理论、Cartan-Brauer 三角形的基本性质和分块理论；拓扑群的表示理论，包括紧致拓扑群的表示与特征标理论，Peter-Weyl 定理和局部紧致交换群的对偶理论等. 为了方便读者，本书力求自成系统，在第一章较系统地介绍了群论、模与代数的基础知识；在附录中简要介绍了拓扑空间、射影极限和 Zorn 引理等内容. 本书每节后都附有适量的习题，以帮助读者理解和拓广正文的内容.

读者只要具备良好的线性代数基础，就可以阅读使用本书. 本书可作为高等院校数学系、物理系研究生与高年级本科生学习有限群表示论或拓扑群表示论的教科书，也可供相关专业的科学工作者与高校教师阅读.

前　言

我国实行学位制度以来，研究生教育有了很大的发展。人们逐渐认识到：拓宽研究生的知识面是时代发展的需要。许多数学硕士点和博士点都要求在研究生阶段设立专业基础课程，使得不同专业、不同专题方向的研究生能对本专题以外的重要的、带基础性的近代发展也有所了解。

开设这类研究生专业基础课程的教材，当然是要介绍该方面的基本概念和基本方法。但在涉及近代的发展上不应过于专门，要照顾到各个不同分支的需要；也不能过于拘泥在技术细节上的推导，而是要在总体上、思想方法上给读者对该学科的主要内容有一个清晰的了解。因此在编写这类教材时，在深与广、精与粗、全貌与专题等方面要掌握适度才能使大多数来自不同专题方向的学生受益。

国内过去出版的大量为本科生编写的教材，因其没有反映近代的内容，不能满足需要；就是许多为研究生编写的教材，因其过分专门而不适用。可喜的是最近几年，出现了一批经过一段教学实践检验后符合上述要求的研究生专业基础课讲义。出版《天元研究生数学丛书》就是为了推动这类教材的编写，促进我国数学研究生培养水平的提高，希望得到数学界同仁们共同的关心和支持。

张恭庆

1995 年 3 月于北京

序 言

群表示论是一个历史久远、联系广泛、前景灿烂的数学分支。

早在 1807 年，J. B. Fourier 为了研究从物理学中产生的偏微分方程的解，他在法国科学院创立了一种新的数学方法，后人称之为调和分析。他把周期为 1 的实变数复函数 $f(x)$分解为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{i2\pi nx}。$$

而实变数 x 的函数

$$\varphi_n(x)=e^{i2\pi nx},\quad n\in \boldsymbol{Z}$$

正是 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的全部不可约线性表示。因此，古典的调和分析本质上是群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的表示理论。至于群表示论中的特征标理论，其渊源可以追溯得更早。Gauss 早在 1801 年就在数论的研究中运用了特征标理论。后来，Dirichlet 运用特征标理论证明了数论中著名的 Dirichlet 定理——非退化的算术级数中总有无限多个素数。

尽管如此，人们还是认为群表示论的创立是从 Frobenius 开始的。在 1896 年及以后的几年里，他系统地建立了有限群的表示理论，并以此来研究有限群的结构。后来，他的学生 Schur 继承了 Frobenius 的工作，建立了非交换群的特征标理论，不但使有限群的表示理论日趋完整，而且还与 Weyl 一起在 1924～1927 年间把 Frobenius 的理论推广到紧致李群的表示，开创了连续群的表示理论。紧接着，Peter 与 Weyl 在 1927 年发现了紧致群表示中著名的 Peter-Weyl 定理，使紧致群上的调和分析有了坚实的基础。与此同时，Weyl 与物理学家 Wigner 分别运用 Frobenius 的理论到新兴的量子力学上去。从此以后，群表示论在三个方向上取得了蓬勃的发展和深刻的应用。

（一）有限群的模表示理论。Schur 在二十年代已经提出了有限群的模表示，他的学生 Brauer 继承和发展了 Schur 的工作，系统地创立了有限群的模表示理论。半个多世纪以来，许多数学家在这个方向做了不少工作，使群表示论在群的结构理论的研究中成为一个强有力的工具，尤其在单群分类问题的圆满解决中发挥了重要的作用。

（二）连续群的表示理论。有了紧致群上的表示理论，由于许多重要的李群并不是紧致的，而是局部紧致的，人们自然要考虑局部紧致群的表示理论。问题的关键是要在局部紧致群上建立不变积分。1933 年，Harr 建立了局部紧致群上的 Harr 测度，为局部紧致群上的调和分析提供了坚实的基础。接着，Понтрягин 在 1934 年建立了局部紧致交换群上的对偶理论，完成了局部紧致交换群上的表示理论，解决了交换李群的 Hilbert 第五问题。后来在 1946 年，Burgman 以及 Гельфанд 与 Наимарк 的工作创立了非紧致的局部紧致群上的无限维酉表示理论。因为它与理论物理、代数数论、自守函数、模形式、以至类域论等有着非常密切的关系，所以近半个世纪以来，一直长盛不衰。尤其是 Langlands 在 1967 年的工作，用群表示论的语言叙述和扩充了由 Hecke 建立起来的数论理论，使群表示论更加显得光辉灿烂。他在那一年还用一系列猜想的形式提出了所谓的“Langlands 计划”。正如 Klein 在 1872 年提出“Erlangen 计划”一样，“Langlands 计划”将长远地指引着数学的这个领域的发展。而“Langlands 计划”的核心之一是李群的无限维表示。

（三）群表示论在理论物理上的应用。自从 Wigner 与 Weyl 在 1927 年把 Frobenius 的理论应用到由 Heisenberg 与 Schrödinger 所发现的新的量子力学上以后，Weyl 在 1928 年完成了量子力学中的经典著作“群论和量子力学”，在 1939 年，他又完成了经典著作“典型群——它的表示与不变量”。就在这一年，Wigner 确定了 Poincaré 群的所有不可约线性表示。近年来，群表

示论在核结构、固体物理、场论中也有深刻的应用。因此，群表示论几乎成为理论物理学家的必需的基础。

为了与群表示论的这段光辉灿烂的历史和波澜壮阔的前景相适应，我们想到应该有一本比较全面又比较简明的介绍群表示论的教科书。作为一种尝试，我们编写了这本教材，作为学习研究群表示论的一个入门向导，供对于群表示论感兴趣的各专业研究生和高年级大学生作为教材使用。

本书的内容是这样安排的：第一章作为预备知识，比较全面地介绍了群论、模与代数的基础知识，以适应非数学专业研究生阅读使用本书的需要，使得他们在学习表示论时不致感到困难，而只要求读者具备良好的线性代数的基础知识即可。第二章介绍了有限群的常表示论的基本内容，为了避免使用更多的数学知识，我们只讨论有限群在复数域上的表示理论，包括线性表示的基本概念、特征标理论和诱导表示的一系列重要结果，例如 Frobenius 互反性、Mackey 子群定理、Clifford 定理、Artin 定理与 Brauer 定理等等。第三章讨论了有限群的模表示理论，包括 Brauer 特征标理论以及 Cartan-Brauer 三角形的定义和基本性质。此外，还简单地介绍了分块理论，包括 p-块的定义、块的亏数与亏群。第四章介绍了拓扑群的概念及其表示理论，特别是紧致拓扑群的表示与特征标理论，以及著名的 Peter-Weyl 定理。此外，还介绍了局部紧致交换群的对偶理论。第三章与第四章的内容是互相独立的，读者在学习时可以根据需要，或者只读第一、二、三章，或者只读第一、二、四章。

本书的每节末都附有少量习题，一方面是供读者巩固所学的内容使用的，另一方面是为了补充正文叙述上的不足而设的。

本书在内容的选择上尽量做到少而精，在内容的叙述上尽量做到深入浅出。但是，限于笔者的水平，谬误不足之处在所难免，希望数学界同行批评指正。

最后，我们要感谢数学天元基金对于本书出版工作的财政资

助，也要感谢华东师范大学数学系和同济大学应用数学系在作者写作此书期间所给予的支持。同时，我们也要对首都师范大学石生明教授表示衷心的感谢，他仔细地审阅了书稿，并提出了许多十分宝贵的修改意见。研究生陈愚仔细校读了手稿并协助编写了书末的索引和符号表，在此表示感谢。

作　者

1995 年 9 月

目　　录

第一章 预备知识

群表示论与许多数学分支都有十分紧密的联系.为了方便读者学习时参考,也为了让读者对群表示论的数学背景有更深入的了解,我们汇集了有关的基础知识作为本书的第一章.

§1 群论基础

群的概念是代数研究中最基本的概念之一.设 G 是一个非空集合,在 G 上定义了一个二元运算,即定义了一个映射 $G\times G\to G$,它把 G 中任意一对元素 (a,b) 映为 G 中一个确定的元素,记为 ab(乘法记号,称为 a 与 b 的**积**),或记为 $a+b$(加法记号,称为 a 与 b 的**和**),$a\circ b$,$a\times b$ 等等.

定义 1.1 一个非空集合关于一个二元运算(不妨叫做乘法)成为**群**,如果

(1) 结合律成立,即对于 G 中任意的三个元素 a,b,c,有

$$a(bc)=(ab)c;$$

(2) G 中包含一个**恒等元** 1,对于 G 中每个元素 a,有

$$1a=a1=a;$$

(3) 对于 G 中每个元素 a,在 G 中存在**逆元** a^{-1},使

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1.$$

特别,当群 G 的二元运算还满足交换律时,即对于 G 中任意两个元素 a,b,有

$$ab=ba$$

时,便称 G 为**交换群**或 **Abel 群**.

群 G 所包含元素的个数 $|G|$ 称为 G 的**阶**.如果 $|G|$ 是一个有

限整数，就称 G 为**有限群**；否则，就称 G 为**无限群**.

对于群 G 的任意元素 a，如果存在最小的正整数 m，使

$$a^m=1,$$

则称 a 的**阶**为 m. 如果不存在这样的 m，则称 a 为**无限阶元素**.

定义 1.2 群 G 的一个非空子集 H，如果关于 G 的乘法成为群，则称 H 为 G 的一个**子群**，记为 $H<G$.

显然，G 的一个非空子集 H 是 G 的子群当且仅当对于任意的 $a,b\in H$，有 $ab^{-1}\in H$.

若 S 是群 G 的一个子集，G 的所有包含 S 的子群的交还是一个子群，它是 G 的所有包含 S 的子群集合中最小的子群，称为**由 S 生成的子群**，记作 $\langle S\rangle$. 特别，当 $G=\langle S\rangle$ 时，称 S 中的元素为 G 的**生成元**，并称 G 为**由 S 生成的群**. 这时，G 的元素是形如 $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_t^{n_t}$ 的有限乘积，$a_i\in S$，$n_i\in \mathbf{Z}$，$i=1,\cdots,t$. 又若 S 是有限集时，称 G 为**有限生成的群**.

设 H 是 G 的一个子群，对任意的 $x\in G$，记

$$xH=\{xh\,|\,h\in H\}\text{（或 }Hx=\{hx\,|\,h\in H\}\text{）},$$

则称 xH（或 Hx）为以 x 为代表元的关于 H 的**左陪集**（或**右陪集**）.

群 G 关于它的一个子群 H 可以分解成左陪集（或右陪集）的并，即

$$G=\bigcup_{i\in I}a_iH \quad \text{（或 }G=\bigcup_{j\in J}Hb_j\text{）},$$

其中 I（或 J）为某指标集. 易知：

映射 $Ha\mapsto a^{-1}H$ 是 G 关于 H 的右陪集的集合与左陪集的集合之间的一一映射，从而 G 关于 H 的左陪集的个数等于右陪集的个数，它们或者是相等的有限整数，或者是无限的. 通常把这个数目称为 H 在 G 里的**指数**，记为 $[G:H]$. 此外，映射 $h\mapsto ha$ 是 H 与右陪集 Ha 之间的一一映射. 于是读者容易证明

定理 1.3 (1) G 中任意两个元素 a 与 b 在 G 关于 H 的同一

个左陪集（或右陪集）中的充分必要条件是 $a^{-1}b\in H$（或 $ab^{-1}\in H$）；

（2）（Lagrange） 有限群 G 的子群 H 的阶是 G 的阶的一个因子，特别

$$|G|=|H|[G:H];$$

（3）阶为 n 的有限群 G 的每个元素 a，有 $a^n=1$. ▎

定义 1.4 群 G 的子群 N 称为**正规子群**，记作 $N\lhd G$，如果对于 G 的每个元素 a，有

$$Na=aN.$$

这时，G 关于 N 的左陪集（或右陪集）就称为**陪集**. 容易验证，当 $N\lhd G$ 时，如果定义陪集的乘法

$$(Na)(Nb)=Nab,$$

那么 G 关于 N 的陪集的集合在上面定义的乘法下成群，通常称为 G 关于 N 的**商群**，记为 G/N.

例 1 n 阶**循环群** C_n. 它由某个元素 a 生成，即

$$C_n=\{a,a^2,\cdots,a^{n-1},a^n=1\},$$

它可以作为绕一个轴旋转 $2\pi/n$ 角的旋转所成的群来实现. 这是一个 Abel 群，记作 $C_n=\langle a\rangle$.

例 2 **二面体群** D_n. 它是由两个元素 a 与 b 生成的 $2n$ 阶群，其中生成元 a 与 b 满足关系式

$$a^n=1,\quad b^2=1,\quad aba=b,$$

即

$$D_n=\{a,a^2,\cdots,a^{n-1},a^n=1,b,ba,\cdots,ba^{n-1}\}.$$

二面体群可以作为平面上保持一个正 n 边形不变的旋转和反射所成的群，它包含 n 个旋转（它们成为一个与 C_n 同构的子群），还包含 n 个反射. 如果用 a 表示旋转 $2\pi/n$ 角的旋转，b 表示任意一个反射，那么 $a,a^2,\cdots,a^n$ 表示 n 个旋转，$b,ba,\cdots,ba^{n-1}$ 表示 n 个反射.

二面体群也可以作为空间的刚体运动的群来实现. 设 O-XYZ

是空间直角坐标系,e_x,e_y,e_z 是**正规正交基**.

(1) 令 a 表示绕 OZ-轴旋转 $2\pi/n$,b 表示关于 OXZ 平面的反射,那么 a 与 b 在所选取的基下的矩阵是

$$a=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} & 0\\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 令 a 表示绕 OZ-轴旋转 $2\pi/n$,b 表示关于 OX-轴的反射,那么 a 与 b 在所选取的基下的矩阵是

$$a=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} & 0\\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(3) 令 a 表示绕 OZ-轴旋转 $2\pi/n$,b 表示关于 OYZ 平面的反射,那么 a 与 b 在所选取的基下的矩阵是

$$a=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} & -\sin\frac{2\pi}{n} & 0\\ \sin\frac{2\pi}{n} & \cos\frac{2\pi}{n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由此可见,引起许多物理学家和化学家注意的**点群**中的绝大部份,本质上是循环群 C_n 或二面体群 D_n,只是对 n 的取值稍加限制罢了.

例 3　对称群 S_n. 它是 n 个文字的集合$\{1,2,\cdots,n\}$上所有一一对应(也叫**置换**)所成的群. 一个 n 元置换可以写成

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix},$$

如果它使 $1\mapsto k_1,2\mapsto k_2,\cdots,n\mapsto k_n$,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 取遍$\{1,2,$