磨 齿 工 作 原 理

秦川机床厂“七·二一”工人大学
西安交通大学机制教研室 《磨齿工作原理》编写组

内容提要 随着各种机械的精度和功率的不断提高，对齿轮加工精度的要求也越来越高。

磨齿是齿轮精加工的一种方法，它与剃齿、珩磨等精加工比较起来，有很多优点。本书主要讲解磨齿的工作原理，内容包括：圆柱齿轮的啮合原理，齿轮的精度要求和测量方法，典型磨齿机的传动原理和调整计算，以及提高磨齿精度与生产率的途径等等。

本书可供从事齿轮加工的工人和技术人员参考，也可作为大专院校师生教学参考之用。

磨齿工作原理

秦川机床厂"七·二一"工人大学
西安交通大学机制教研室《磨齿工作原理》编写组

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）
（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）
北京印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 · 印张25.5 · 字数 622 千字
1977 年 3 月北京第一版 · 1977 年 3 月北京第一次印刷
印数 00,001—62,300 · 定价 1.75 元

*

统一书号：15033·4366

前　言

在伟大领袖毛主席的《五七指示》和“七·二一”指示指引下，秦川机床厂于一九七〇年创办了“七·二一”工人大学，结合本厂生产实际，设置齿轮磨床设计制造专业。西安交通大学派出教师下厂“落户”，在接受工人阶级再教育的同时，参加了厂办大学的教育革命实践。工人大学遵照毛主席关于“**教材要彻底改革**”的教导，批判旧教材中资产阶级唯心论和形而上学，采取有实践经验的工人、革命教师和革命技术人员三结合的形式编写了自己的新教材。《磨齿工作原理》就是在专业课教材和教学实践的基础上编写而成的。为了力求在理论和实践的结合上说明问题，尽量适应从事于齿轮加工的工人、技术人员和有关工科院校机械制造专业师生的需要，我们把齿轮啮合原理、齿轮精度、典型齿轮磨床、磨齿精度及生产效率等问题综合在一起，进行了比较系统的叙述。

“**在某种意义上来说，最聪明、最有才能的，是最有实践经验的战士。**”在本书编写过程中，广大的工人和革命技术人员给予了热情支持。许多工人同志把长期积累的丰富实践经验毫无保留地贡献出来。初稿写出后，他们又进行了认真的讨论，提出了许多宝贵的修改意见。因此，这本书可以说是广大磨齿工人的经验汇集。西安交通大学参加厂办大学教育革命实践的教师，在本书编写中做了大量的工作，并在理论上作了一些分析。

由于我们平时认真看书学习不够，马列主义、毛泽东思想水平较低，实践经验不足，调查也很不全面，书中难免有不少缺点和错误，希望读者批评指正。

《磨齿工作原理》编写组

一九七五年一月

本书主要符号

A	标准（公称）中心距
$A_{\text{啮}}$	啮合中心距
C	径向间隙
$D_{\text{顶}}$	顶圆直径
$D_{\text{根}}$	根圆直径
K	变位直齿轮的基圆齿厚(或齿槽)半角的附加量系数
K_t	变位齿轮公法线长度附加量系数
K_1, K_2	斜齿轮公法线计算系数
L	公法线长度
M	跨棒（或跨球）距
N	跨齿数
$R_{\text{顶}}$	顶圆半径
$R_{\text{根}}$	根圆半径
T	导程
b	齿面宽度
c'	径向间隙系数
d	直径
$d_{\text{分}}$	分圆直径
$d_{\text{节}}$	节圆直径
d_j	基圆直径
e	偏心距
f	齿顶高系数
h'	齿顶高
h''	齿根高
i	转速比（传动比）
l	实际啮合长度(在标准中心距时)
$l_{\text{啮}}$	实际啮合长度（在非标准中心距时）
m	模数
m_n	法向模数
m_s	端面模数
n	转速（转/分）
r	向量半径
$r_{\text{分}}$	分圆半径
$r_{\text{节}}$	节圆半径
r_j	基圆半径
$s_{\text{分}}$	分圆齿厚
$s_{\text{节}}$	节圆齿厚
s_j	基圆齿厚
$t_{\text{分}}$	分圆周节
$t_{\text{节}}$	节圆周节
t_j	基圆周节
v	线速度
$w_{\text{分}}$	分圆槽宽（齿间）
w_j	基圆槽宽
z	齿数
α	压力角
α_n	法向压力角
α_s	端面压力角
$\alpha_{\text{分}}$	分圆压力角（齿形角）
$\alpha_{\text{节}}$	节圆压力角
$\alpha_{\text{啮}}$	啮合角（$\alpha_{\text{啮}}=\alpha_{\text{节}}$）
β	螺旋角
$\beta_{\text{分}}$	分圆柱螺旋角
$\beta_{\text{节}}$	节圆柱螺旋角
β_j	基圆柱螺旋角
λ	螺旋线升角（又作分离系数用）
ξ	移距系数
σ	齿顶降低系数
σ_j	基圆齿槽半角
τ_j	基圆齿厚半角
ε	重合系数（又作角度用）
θ	渐开角
φ	展开角
ρ	曲率半径
ω	角速度（弧度/秒）
ψ	轴间角（又作其它角度用）
ΔT_{Σ} 与 δT_{Σ}	运动误差与公差
Δt_{Σ} 与 δt_{Σ}	周节累积误差与公差
ΔL_g 与 δL_g	公法线长度的变动与公差
Δe_j 与 δe_j	齿圈径向跳动与公差
$\Delta_z a$ 与 $\delta_z a$	齿轮转一转度量中心距的变动与公差
ΔT 与 δT	周期误差与公差
$\Delta_c a$ 与 $\delta_c a$	齿轮转一齿度量中心距的变动与公差
$\Delta_c t$ 与 $\delta_c t$	相邻周节差与公差
Δt_j	基节偏差
$\Delta_s t$	基节允差（上偏差）
$\Delta_x t_j$	基节允差（下偏差）
ΔJ 与 δJ	齿形误差与公差
ΔB_x 与 δB_x	齿向误差与公差
ΔB_{Σ}	轴向齿距偏差
$\Delta_s B_{\Sigma}$	轴向齿距允差（上偏差）
$\Delta_x B_{\Sigma}$	轴向齿距允差（下偏差）
ΔL 与 δL	公法线长度偏差与公差
$\Delta_m L$	公法线长度的最小偏差
ΔM 与 δM	跨棒距偏差与公差
$\Delta_m M$	跨棒距最小偏差

目　　录

前　言

本书主要符号 …… Ⅵ

第一章　齿轮啮合原理 …… 1

§ 1-1　齿轮的基本概念 …… 1

一　齿轮分类及用途 …… 1

二　齿轮齿形的基本要求 …… 1

三　渐开线的画法和基本性质 …… 3

四　渐开线上任意点的两个半径和三个角的关系 …… 4

五　直齿圆柱渐开线齿轮的基本参数和主要尺寸 …… 6

六　基圆半径的误差(Δr_j)对分圆压力角误差($\Delta \alpha_{分}$)的影响 …… 8

七　直齿圆柱渐开线齿轮基圆和根圆的大小比较 …… 10

八　渐开线齿形的座标计算法 …… 10

§ 1-2　两个齿轮的啮合 …… 11

一　两个渐开线齿形啮合的啮合线、转速比、节圆和啮合角 …… 11

二　两个直齿圆柱渐开线齿轮的啮合 …… 14

三　齿形啮合定律 …… 18

四　两个直齿圆柱渐开线齿轮啮合的基本条件 …… 22

§ 1-3　齿条与齿轮的啮合 …… 24

一　齿条相当于无穷多齿数的齿轮 …… 24

二　齿条与齿轮的啮合 …… 26

三　零度齿条和负压力角齿条 …… 29

四　基本齿条和工艺齿条 …… 30

五　齿轮与齿条啮合时的齿形工作部分 …… 31

六　齿形工作部分的渐开线长度 …… 33

七　变态渐开线 …… 35

八　干涉和根切 …… 36

九　变态渐开线的曲率半径 …… 38

十　过渡曲线干涉验算 …… 40

十一　节圆和节线的相对纯滚动 …… 41

十二　展成法加工齿轮齿形 …… 42

§ 1-4　摆线和变态摆线 …… 43

一　普通摆线和变态摆线 …… 43

二　外摆线和变态外摆线 …… 43

三　内摆线和变态内摆线 …… 44

四　变态外摆线的方程式 …… 44

五　延长外摆线的曲率半径 …… 45

六　齿形干涉的检验举例 …… 46

§ 1-5　斜齿圆柱渐开线齿轮 …… 47

一　斜齿轮的基本特点 …… 48

二　螺旋线和螺旋面 ……………………………………………………………………49
三　渐开螺旋面的几何构成法 ……………………………………………………51
四　斜齿轮的基本要素 …………………………………………………………53
五　斜齿轮角度的几个重要关系 ………………………………………………60
六　斜齿轮啮合的基本条件 ……………………………………………………63
七　斜齿条和斜齿轮啮合 ………………………………………………………64
八　斜齿轮的齿形工作部分 ……………………………………………………66
九　渐开线蜗杆 …………………………………………………………………67
§ 1-6　圆柱渐开线齿轮的齿厚计算……………………………………………69
一　分圆弦齿厚的计算 …………………………………………………………69
二　固定弦齿厚 …………………………………………………………………70
三　齿厚换算公式 ………………………………………………………………71
四　直齿轮的基圆齿厚半角(τ_j)和基圆齿槽半角(σ_j)……………………72
五　斜齿轮的基圆齿厚半角(τ_j)和基圆齿槽半角(σ_j)……………………73
六　直齿圆柱渐开线齿轮的公法线长度 ………………………………………74
七　用钢球或圆棒测直齿轮齿厚 ………………………………………………76
八　斜齿圆柱渐开线齿轮的公法线长度 ………………………………………78
九　用钢球或圆棒测斜齿轮齿厚 ………………………………………………83
十　用钢球或圆棒测量内齿轮齿厚 ……………………………………………85
§ 1-7　变位齿轮……………………………………………………………………86
一　什么叫变位齿轮 ……………………………………………………………86
二　变位齿轮的齿厚和齿根高 …………………………………………………87
三　一对变位齿轮啮合的特点 …………………………………………………88
四　用变位齿轮配凑中心距举例 ………………………………………………90
五　变位齿轮的顶圆半径和齿顶降低系数 ……………………………………91
六　高度变位与角度变位 ………………………………………………………93
七　变位齿轮的系数 λ_0、ξ_0、σ_0 表格编制原理与应用……………………93
八　用变位齿轮避免根切 ………………………………………………………94
九　变位斜齿轮的齿厚 …………………………………………………………95
§ 1-8　轮系……………………………………………………………………………95
一　齿轮传动链的转速比 ………………………………………………………95
二　差动轮系和行星轮系 ………………………………………………………98
第二章　齿轮的精度与测量 ……………………………………………………103
§ 2-1　圆柱齿轮的精度规范与精度等级和公差…………………………………103
§ 2-2　齿轮的运动精度……………………………………………………………104
一　运动精度的检验项目 ………………………………………………………104
二　用单面啮合综合检查仪测量运动误差 ……………………………………107
三　周节累积误差的测量与计算 ………………………………………………112
四　两个单项检验项目合成一个检验组的意义 ………………………………117
五　运动精度检验项目的选择 …………………………………………………119
§ 2-3　齿轮的工作平稳性…………………………………………………………118
一　工作平稳性的检验项目 ……………………………………………………119
二　齿形误差的测量方法 ………………………………………………………122

第一章 齿轮啮合原理

§ 1-1 齿轮的基本概念

一 齿轮分类及用途

我国自解放以来，在毛主席的英明领导下，齿轮加工和其它各项工业一样，从无到有突飞猛进地发展。特别是从 1958 年工农业大跃进以及无产阶级文化大革命以来，我国工人阶级发挥了无穷的智慧，克服重重困难，使齿轮制造在数量上和质量上迅速提高，以满足我国社会主义革命和建设各方面飞速发展的需要。

齿轮是机器中常用的一种零件，它的用途是传递动力或传递运动。一般地讲，齿轮是同时起着这两种作用的，但却有主次之分。有些齿轮是以传递动力为主，如汽轮机中的减速器齿轮；有些齿轮是以传递运动为主，如机床中的分度齿轮。

机器中的齿轮，按它们的轮廓外形不同，可分成三类：

1) 圆柱齿轮　其轮廓外形是圆柱形。按牙齿的直斜情况不同，这类齿轮又分为：

(一) 直齿圆柱齿轮（简称直齿轮）；

(二) 斜齿圆柱齿轮（简称斜齿轮）；

(三) 人字齿轮。

在这类齿轮中，有两种特殊变态齿轮，它们是：

(一) 齿条——齿数为无穷多的齿轮，其外形由圆柱形演变成长条形，其运动由转动演变成直线移动。

(二) 蜗轮和蜗杆——斜齿轮的特殊变态。

2) 圆锥齿轮(又名伞齿轮)　其轮廓外形是圆锥形。按牙齿的直斜情况不同，这类齿轮又分为：

(一) 直齿圆锥齿轮；

(二) 斜齿圆锥齿轮（又名切线齿锥齿轮）；

(三) 曲线齿圆锥齿轮（如弧齿锥齿轮和准双曲线齿轮等）。

以上两类齿轮，常用于平行轴或交叉轴之间作等速传动。所谓等速传动，是指：当主动轮匀速转动时，被动轮也是匀速转动（若不计齿轮的运动误差）。

3) 非圆形齿轮　这类齿轮的外形不是圆形的，如椭圆齿轮等，它们是用于不等速传动，即当主动轮匀速转动时，被动轮的转速是显著不均匀的。

二 齿轮齿形的基本要求

一对齿轮的传动，是依靠主动轮的牙齿依次推动被动轮的牙齿来实现的。牙齿两侧面的形状（即齿面形状或齿形）对于齿轮的传动和制造都有重要影响。那么，齿轮的齿形应该满足哪些基本要求呢？

毛主席教导我们："世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的。看问题要从各方面去看，不能只从单方面看。"对于一般的齿轮传动来说，我们对齿形有下述三方面的基本要求：

1）保证一对齿轮传动时，在任何瞬时的转速比都不改变[㊀]。

在一对齿轮啮合传动过程中，主动轮转过一牙时，被动轮也转过一牙。如果这一对齿轮的齿数相同，则当主动轮转过一转的时候，被动轮也转过一转，所以它们的转速比是 1:1。如果这一对齿轮的齿数不相同，各为 z_1 和 z_2，则它们的转速比是

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{z_2}{z_1} \tag{1-1}$$

但是，如果不选用适当的齿形，这两个齿轮在任意瞬时的转速比是否能保持为$\frac{z_2}{z_1}$呢？经验告诉我们，这样是不能的。也就是说，若主动轮是匀速转动，则被动轮在转动一个齿的过程中，其转速是不匀的，而是有时快，有时慢。

为了保持瞬时转速比不变，一对齿轮的齿形必须合乎一定的规律。也就是说，当其中一个齿轮的齿形是某种给定的形状时，另一个齿轮的齿形就不能再随便给定，而必须根据前一种给定的齿形和瞬时转速比的要求，用图解方法或分析计算方法把它确定出来（详见§1-2，三）。例如，若主动轮的齿形选为直线形，就不能认为被动轮的齿形也应是直线形[㊁]，根据图解或计算结果可知，它应是一条比较复杂的曲线。

这样说来，为了保证瞬时转速比不变，一对齿轮的齿形可能有无数多的组合形式。只要给定其中一个齿轮的齿形，就可确定另一个齿轮应有的齿形。这样"成对"的齿形又叫做"共轭"齿形。通常用的齿轮齿形是渐开线，由以后的分析可知（详见§1-2，一），与一个渐开线齿形共轭的另一个齿形，还是渐开线。也就是说，一对渐开线齿形（即主动轮和被动轮的齿形都是渐开线）啮合传动时，它们的瞬时转速比是恒定不变的。

2）当一对齿轮的中心距变动后，也不影响瞬时转速比。

我们知道，在机器上，一对齿轮的轴承孔之间的中心距，在加工中是不可能没有误差和公差的。尤其是机床中的交换齿轮，它们的中心距是经常改变的。在这些情况下，就要求齿轮的瞬时转速比不因中心距的改变而改变。我们刚才说过，有无数多的组合齿形可以满足第一个基本要求。但是，如果它们的安装中心距偏离了设计时的理论中心距，则瞬时转速比就不能保持不变了。由以后的分析可知（参阅§1-2，一），唯有渐开线共轭齿形能满足这第二个要求。

3）齿轮的齿形应便于加工制造。

再好的齿形，如果不便于加工，那也是不现实的。我们刚才说过的直线齿形和另一个比较复杂的曲线齿形共轭，可以满足第一个要求。但是，这两种齿形在加工制造方面就不方便。首先，加工这一对齿形的刀具就不相同；若齿轮的齿数改变，刀具又要跟着改变。直线齿形看起来似乎最简单，但用展成法加工时，相应的刀具齿形就相当复杂，不便于制造。由以后的分析可知。渐开线齿形的加工工艺性较好。看起来，渐开线是一条比较复杂的曲线，但可以用直线形刀刃（如滚刀、齿条形插齿刀和平面或锥面砂轮）来加工。而且，相同

㊀ 对于非圆形齿轮来说，它们的瞬时转速比本来就应该是不断改变的。因此，这些齿轮的齿形应使瞬时转速比按规定的要求正确地变动。

㊁ 参考《齿轮原理与制造》，科学出版社 1970 年第一版，第 6 页。

模数的齿轮，不论其齿数多少，都可用同一把刀具来加工，这就可使刀具的数量大为减少。

对于齿轮的齿形，除了上述的三个基本要求之外，当然还有一些其它要求。例如，怎样的齿形在啮合传动时可使相对滑动速度和磨损较小等等。

由于渐开线齿形能同时满足上述的三个基本要求，所以在现代机器设备中广泛地采用渐开线齿轮传动。但是，所有的齿轮是不是都非采用渐开线齿形不可呢？是不是在任何场合下，都算渐开线齿轮为最好呢？并不是这样。对于具体情况必须作具体的分析。毛主席指出：**“首先是各种物质运动形式中的矛盾，都带特殊性。”**在某些齿轮传动中，由于矛盾的特殊性不同，渐开线齿形就不如其它齿形了。例如钟表齿轮，考虑到它在润滑不足的情况下工作，齿面磨损要较小，就应采用摆线齿形。又例如，对于传递大动力的内齿轮减速器来说，以采用针轮和变态摆线齿轮啮合为宜，这是因为它们同时参与工作的牙齿对数较多(从理论上说，占全部齿数的一半)，而且采用这种齿形，可以有效地避免内齿轮啮合中的齿根干涉。

三　渐开线的画法和基本性质

对于任何图形，都可以画出它的渐开线。渐开线的最简单画法，就是将卷复在图形边缘上的细绳拉紧而逐渐旋开时，把细绳上一点的运动轨迹描绘出来。图 1-1 a 和 b 分别地表示了以正方形和八边形为基础描绘渐开线的方法，由图可知：

1）这些渐开线是由一些半径不同的圆弧圆滑地连接起来的；

2）已经由图形边缘上旋开的细绳，被拉紧成一条直线。这条直线的长度就等于它在旋开之前卷复在图形边缘上的一些折线长度的总和；

3）渐开线上任意点的法线就是由这一点到相应“旋开点”（即图形的棱角 1、2、3……）之间的一条直线。例如，图 1-1 a 中渐开线在 a 点的法线，就是由 a 点到旋开点 2 之间的直线$\overline{a2}$。渐开线上任意点的切线就是在这一点与法线垂直的一条直线，例如同一图中的切线$\overline{tt}$垂直于法线$\overline{a2}$；

4）渐开线上任意点的曲率半径就等于由这一点到相应旋开点之间的直线长度。例如，同一图中的$\overline{a2}$的长度，就是渐开线在 a 点的曲率半径。

图 1-2 a 表示了以圆为基础描绘渐开线的方法。渐开线齿轮的齿形就是这种渐开线，而我们以后所要讨论的渐开线，也就是这种渐开线。作为描绘渐开线基础的一个圆，就叫做基圆。其半径用 r_j 表示，直径用 d_j 表示。用直径不同的许多圆做基圆，画出来的渐开线也是各不相同的。基圆愈小，其渐开线弯曲愈厉害；基圆愈大，其渐开线愈较平坦。我们可以用一句简单的话来表达这种性质，就是“不同圆，不同线”；所谓不同圆就是指不同的基圆，而不同线就是指画出来的不同的渐开线。

我们知道，一个圆可以看成是一个边数为无穷多的多边形，以它为基础来画渐开线，则此基圆上的每一点都可认为是“旋开点”，因而它的渐开线就可以认为是由无穷多的、半径各不相等的、极短的圆弧连接起来的。由基圆上旋开的线段拉紧成直线，其长度等于它旋开之前卷复在基圆上的弧长。例如，在图 1-2 a 中，$\overline{a_1b}=\overset{\frown}{ab}$，$\overline{a_2c}=\overset{\frown}{ac}$，……，这里也可以用一句简单的话来表达这种性质，就是“圆弧长，同直线”。

由于拉紧而旋开的直线就是渐开线的法线，而这直线又必然在旋开点与基圆相切。所以，渐开线在某一点的法线，就是由这一点到基圆的切线。例如，图 1-2 a 中的直线$\overline{a_1b}$是渐开

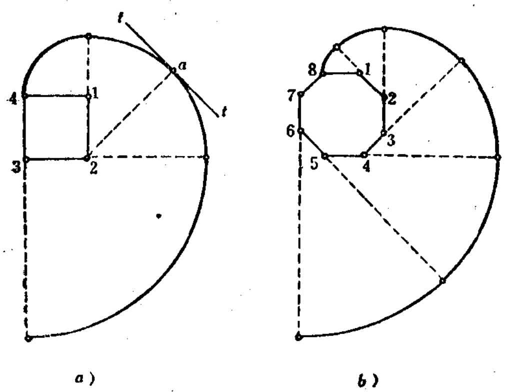


图 1-1 正方形和八边形的渐开线

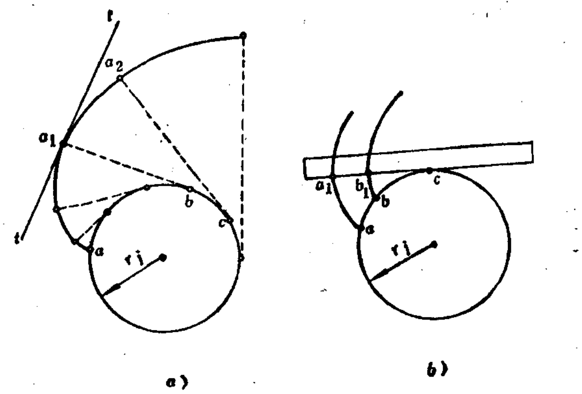


图 1-2 圆的渐开线

线在 a_1 点的法线，而同时它又是由 a_1 点向基圆所作的一条切线。我们也可以用一句简单的话来表达这种性质，就是“渐之法，基之切”。而渐开线上任意点的切线就是在这一点与其法线垂直的一条直线。例如在同一图中，渐开线在 a_1 点的切线 $\overline{tt}$ 垂直于法线 $\overline{a_1b}$。

渐开线上任意点的曲率半径就等于由这一点沿法线到基圆切点之间的直线长度。例如在同一图中，渐开线在 a_1 点的曲率半径就等于直线 $\overline{a_1b}$ 的长度。

图 1-2 b 表示渐开线的另一种类似的画法。即用一根直尺在基圆上纯滚动（即没有滑动地转滚运动）时，描出直尺滚动边缘上任意一点的运动轨迹。例如，图中的 aa_1 和 bb_1，就是直尺的滚动边缘上 a_1 和 b_1 两点所描画出来的渐开线。显然，因为是同一个基圆，所以这两条渐开线是完全一样的，仅仅它们的起点（a 点和 b 点）不同罢了。

根据前述“渐之法，基之切”的道理，我们可以知道，基圆的一条切线可以同时是两条（或更多）渐开线的法线，即它们的公法线。例如图 1-2 b 中的基圆切线 $\overline{a_1b_1c}$，就是上述两条渐开线的公法线。

根据前述“圆弧长，同直线”的道理，我们又可知道，两条渐开线沿公法线的距离（如 $\overline{a_1b_1}$）就等于这两条渐开线的起点沿基圆的弧长（如 $\overset{\frown}{ab}$，即 $\overline{a_1b_1}=\overset{\frown}{ab}$）。

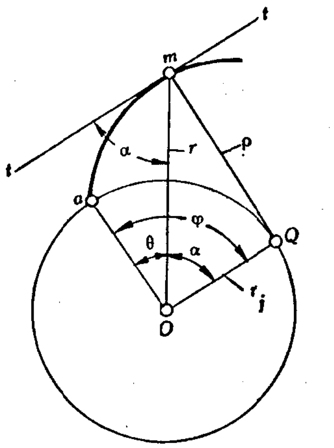


图 1-3 渐开线上任意点的两个半径和三个角

四 渐开线上任意点的两个半径和三个角的关系

渐开线上任意点（例如 m 点，见图 1-3）的向量半径，是由这一点到基圆中心 O 之间的距离，以 r 表示（例如 $r=\overline{Om}$）；而前面又说过，这一点的曲率半径，是由这一点沿渐开线的法线（即基圆的切线）到基圆切点之间的距离，以 ρ 表示（例如 $\rho=\overline{mQ}$）。

由图可知，这两个半径（即 r 和 ρ）与基圆半径（r_j）一起，它们的关系是

$$r^2=r_j^2+\rho^2 \tag{1-2}$$

或

$$\rho=\sqrt{r^2-r_j^2} \tag{1-3}$$

渐开线在任意点有三个角：一个叫压力角（α），从几何意义来说，它是渐开线在这一点

的切线（$\overline{tt}$）与这一点的向量半径($\overline{Om}$)之间的夹角。由几何原理可知，渐开线在这一点的曲率半径两端点（m 和 Q）的向量半径（$\overline{Om}$ 和 $\overline{OQ}$）间的夹角（$\angle mOQ$）也等于压力角 α，所以

$$\cos\alpha=\frac{r_j}{r} \tag{1-4}$$

因为对一定的渐开线来说，其基圆半径 r_j 是固定值，而渐开线上各点的向量半径 r 则是各不相同的，所以渐开线在各点的压力角也是各不相同的。我们再用一句简单的话表达渐开线的这一个重要性质，就是"压力角，处处变"。在向量半径愈大（即离基圆愈远）的地方，压力角也愈大；在渐开线的起点处，由于 $r=r_j$、$\cos\alpha=1$，所以在这一点的压力角就等于零。

若已知渐开线上某点的向量半径 r 和在这一点的压力角 α，由 (1-4) 式我们就可知道这个渐开线的基圆半径是

$$r_j=r\cos\alpha \tag{1-5}$$

若渐开线上有 a、b、c……等点，它们的向量半径各为 r_a、r_b、r_c……，而在这些点的压力角各为 α_a、α_b、α_c……，则由上式可知：

$$r_j=r_a\cos\alpha_a=r_b\cos\alpha_b=r_c\cos\alpha_c=\cdots \tag{1-6}$$

渐开线在任意点的第二个角叫展开角(φ)，它是渐开线在这一点的曲率半径卷复到基圆上去的弧长所对的基圆中心角(图中的$\angle aOQ$)，由三角形 mOQ 可得：

$$\rho=r_j\text{tg}\alpha \tag{1-7}$$

根据"圆弧长，同直线"的道理，又可得：

$$\rho=r_j\varphi \tag{1-8}$$

所以展开角 φ 与压力角 α 的关系是

$$\varphi=\text{tg}\alpha \tag{1-9}$$

渐开线在任意点的第三个角叫渐开角(θ)，它是这一点的向量半径与渐开线起点的向量半径之间的夹角(图中的$\angle aOm$)，由图直接可知：

$$\theta=\varphi-\alpha \tag{1-10}$$

将(1-9)式代入，就得到渐开角 θ 与压力角 α 的关系是

$$\theta=\text{tg}\alpha-\alpha \tag{1-11}$$

渐开角 θ 在齿形计算中是经常要用到的。从上式可知，它是压力角 α 的函数，常用 $\text{inv}\alpha$ 表示。这个 inv 符号叫做渐开线函数，读音是"英弗"，而 $\text{inv}\alpha$ 读成"英弗 α"。所以上式经常写成：

$$\theta=\text{inv}\alpha=\text{tg}\alpha-\alpha \tag{1-12}$$

式中的 $\text{tg}\alpha$ 和 α 都是以弧度表示，因而得到的渐开角 θ 也是弧度值。当我们知道渐开线上某点的压力角 α，就可由三角函数表查出它的正切值 $\text{tg}\alpha$，同时再将 α 角化成弧度值，两者相减，就得到 $\text{inv}\alpha$（也就是渐开线在该点的渐开角 θ）的弧度值了。例如，当 $\alpha=0°$ 时，$\text{tg}\alpha=0$，所以$\theta=\text{inv}\alpha=\text{inv}\,0°=0-0=0$；若 $\alpha=20°$，则 $\text{tg}\alpha=0.3639702$，而 $\alpha=20°=0.3490658$(弧度)，所以 $\theta=\text{inv}\alpha=\text{inv}\,20°=0.3639702-0.3490658=0.0149044$(弧度)。

为了便于计算，渐开线函数已制成表格，见附录表 1。用这个表可以直接由 α（度）查出 $\text{inv}\alpha$(即 θ 角)的弧度值；或者由 θ 查出 α，这就同我们平常用三角函数表由角度 α 查 $\sin\alpha$ 或由 $\sin\alpha$ 查角度 α 是一样的。

五　直齿圆柱渐开线齿轮的基本参数和主要尺寸

在上面我们已经对渐开线齿轮的齿形，作了最初步的分析。一个齿轮的全部形状和尺寸大小是怎样的呢？毛主席教导我们要做到胸中有"数"。为了对齿轮进行深入的研究，我们不可对它没有数量的概念。

所谓齿轮的基本参数，就是指决定这个齿轮的端面和轴向形状尺寸所依据的根本数据。

直齿圆柱渐开线齿轮的基本参数有四：

1）齿数(z)　即牙齿的数目，它是由齿轮传动的转速比要求来选定的；

2）模数(m)　即表示牙齿尺寸大小的一个数据，它的单位是毫米，模数愈大，表示牙齿愈大。齿轮的模数是按照牙齿受力的大小来选定的，我国机械工业通用标准（JB 111-60）中规定了标准模数的系列，见表 1-1。

表 1-1　齿轮标准模数系列（JB111-60）

0.1	1	3.5	9	22
0.15	1.25	(3.75)	10	25
0.20	1.5	4	(11)	28
0.25	1.75	4.5	12	30
0.3	2	5	(13)	33
0.4	2.25	(5.5)	14	36
0.5	2.5	6	(15)	40
0.6	(2.75)	(6.5)	16	45
0.7	3	7	18	50
0.8	(3.25)	8	20	

注：在选用模数时，括号内的模数尽可能不用。

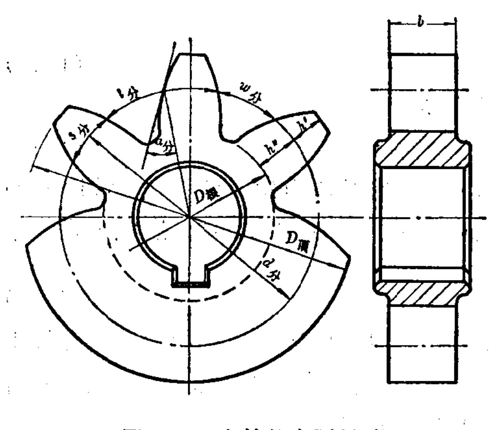


图 1-4　齿轮的主要尺寸

3）分圆压力角($\alpha_{分}$)　又名齿形角，它是齿轮渐开线在分圆上（即向量半径等于分圆半径处）的压力角。至于分圆是什么圆，下面就要谈到。分圆压力角愈大，则齿顶愈尖而齿根愈肥。反之，分圆压力角愈小，则齿顶愈宽而齿根愈瘦。为了避免齿顶尖和齿根瘦，必须适当选取分圆压力角。我国的齿轮标准中采用的分圆压力角是20°。

4）齿面宽度(b)　简称齿宽，即牙齿沿齿轮轴线方向的长度，它是按齿轮传动的扭矩和功率而定的。

有了上面这四个基本参数，齿轮的各部分尺寸就基本上定了。下面我们将它的主要尺寸说明一下：

一、当我们知道了齿数和模数之后，就可以确定齿轮的分圆直径：

$$d_{分}=mz\ \text{（毫米）} \tag{1-13}$$

或分圆半径

$$r_{分}=\frac{d_{分}}{2}=\frac{mz}{2}\ \text{（毫米）} \tag{1-14}$$

所谓分圆，是这样的一个圆，它包含下列几种意义：

(1) 用这个圆表达齿轮的公称直径大小。而它的直径大小是取决于齿数的多少和模数的大小：当齿数一定时，模数愈大，此圆愈大；模数愈小，此圆愈小。同理，当模数一定时，齿数愈多，此圆愈大；齿数愈少，此圆愈小；

(2) 在这个圆上，确定齿形的倾斜程度。也就是说，在此圆上，齿形的压力角是规定的标准数值($\alpha_{分}$)；

(3) 在这个圆上，齿厚和齿槽(以弧长表示)的公称数值相等；

(4) 以这个圆为基准，向外确定齿顶高度，向里确定齿根高度。

二、当我们知道齿数和分圆直径之后，就可以知道分圆周节：

$$t_{分}=\frac{\pi d_{分}}{z}=\frac{\pi mz}{z}=\pi m \text{（毫米）} \tag{1-15}$$

所谓分圆周节，就是相邻两齿的同侧齿形沿分圆圆周的弧长距离。在一个分圆周节内，齿厚($s_{分}$)和槽宽($w_{分}$)平均分配，各取一半为其公称数值，即

$$s_{分}=w_{分}=\frac{t_{分}}{2}=\frac{\pi m}{2} \text{（毫米）} \tag{1-16}$$

三、在牙齿的高度方向：齿顶高(h')是指分圆到顶圆之间的径向距离，齿根高(h'')是指分圆到根圆之间的径向距离，而齿全高(h)则为齿顶高与齿根高之和。

$$\left.\begin{aligned} h'&=fm &&\text{（毫米）}\\ h''&=(f+c')m &&\text{（毫米）}\\ h&=h'+h'' &&\text{（毫米）}\end{aligned}\right\} \tag{1-17}$$

式中 f——齿顶高系数；对于正常牙齿，$f=1$；对于特殊矮齿，$f=0.8$；

c'——径向间隙系数。

我国机械工业通用标准(JB 110-60)对于模数 $m>1$ 的圆柱齿轮，规定 $c'=0.25$；当采用插齿、剃齿加工时，容许增大到 0.35。而 JB 304-62 对于模数 $m\leqslant1$ 的圆柱齿轮，规定 $c'=0.35$；当采用插齿、剃齿加工时，容许增大到 0.45。

由(1-17)式可见，齿根高 h'' 比齿顶高 h' 大 $c'm$，这是为了保证一对齿轮啮合时，一齿轮的齿顶与另一齿轮的齿根之间在半径方向有一定的间隙 C，这个间隙叫做径向间隙(或简称径隙)，它的作用，一方面是为了避免齿顶与齿根相碰，另一方面是为了储运润滑油液和排除污物。

知道了齿顶高和齿根高之后，就可确定齿轮毛坯的顶圆(即外圆)直径和切出牙齿以后的根圆直径：

$$\left.\begin{aligned} &\text{顶圆直径}\quad D_{顶}=d_{分}+2h'=m(z+2f) \text{（毫米）}\\ &\text{根圆直径}\quad D_{根}=d_{分}-2h''=m[z-2(f+c')] \text{（毫米）}\end{aligned}\right\} \tag{1-18}$$

当齿顶高系数 $f=1$，径向间隙系数 $c'=0.25$ 时，上式成为

$$\left.\begin{aligned} D_{顶}&=m(z+2) &&\text{（毫米）}\\ D_{根}&=m(z-2.5) &&\text{（毫米）}\end{aligned}\right\} \tag{1-19}$$

以上这些主要尺寸，不但适用于渐开线齿轮，同时也适用于其它齿形的齿轮。对于渐开线齿轮，还有两个重要尺寸：

第一，如果这个齿轮是渐开线齿轮，那么它的齿形(渐开线)应以什么基圆作出来呢？

这个问题，不难解决。因为我们已经知道了这个齿轮的分圆半径($r_{分}$)，同时又规定了齿

形在这个分圆上的压力角是标准值($\alpha_{分}$)。那么，根据公式(1-5)，就可知道这个渐开线齿形的基圆半径应该是

$$r_j=r_{分}\cos\alpha_{分}=\frac{mz}{2}\cos\alpha_{分}\ (毫米) \tag{1-20}$$

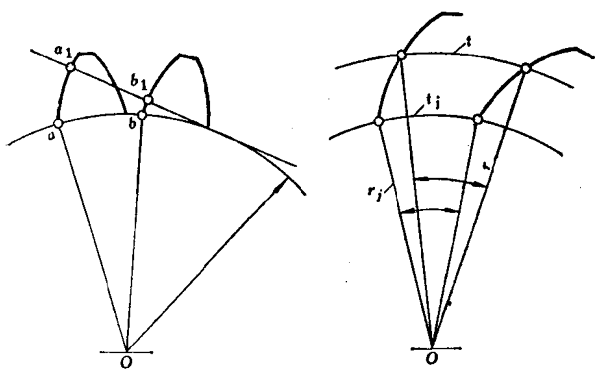
或基圆直径

$$d_j=d_{分}\cos\alpha_{分}=mz\cos\alpha_{分}\ (毫米) \tag{1-21}$$

第二，当知道基圆直径后，就可以知道基圆周节（简称基节）了。所谓基节就是相邻两齿的同侧齿形沿基圆圆周的弧长距离$\overset{\frown}{ab}$(图 1-5 a)，显然，基节是

$$t_j=\frac{\pi d_j}{z}=\frac{\pi mz\cos\alpha_{分}}{z}=\pi m\cos\alpha_{分}=t_{分}\cos\alpha_{分} \tag{1-22}$$

我们在§1-1，三中说过，两条渐开线的起点沿基圆的弧长距离就等于它们沿公法线的距离，所以基节 t_j 也就等于相邻两齿同侧齿形沿公法线的距离$\overline{a_1b_1}$。



a)　　b)

图 1-5　齿轮的基节

其实，上面的公式(1-22)亦可用比例方法得到(图1-5,b)：因为在相邻两齿的同侧齿形上，任意两个有相等半径的点所夹的中心角都是相等的，即$\frac{360^\circ}{z}$，所以在不同圆周上的周节就与这些圆的半径成正比。因此，基节与任意半径 r 圆上的周节 t 的比例关系就是

$$\frac{t_j}{t}=\frac{r_j}{r}=\cos\alpha$$

即

$$t_j=t\cos\alpha \tag{1-23}$$

式中　α——任意半径 r 圆周上的压力角。

由于分圆上的周节和压力角各为 $t_{分}$和 $\alpha_{分}$，所以

$$t_j=t_{分}\cos\alpha_{分}$$

同理，若齿形上有 a、b、c……等点，在通过这些点的各圆周上，周节各为 t_a、t_b、t_c……，而压力角各为 α_a、α_b、α_c……，则由(1-23)式得

$$t_j=t_a\cos\alpha_a=t_b\cos\alpha_b=t_c\cos\alpha_c=\cdots\cdots \tag{1-24}$$

综上所述，齿轮上的每个尺寸，都与它的模数有关；模数增大一倍，各尺寸也就增大一倍。所以我们常以模数 $m=1$ 计算各个尺寸，然后按实际模数乘以 $m=1$ 的各个尺寸，即得相应的各实际尺寸。

六　基圆半径的误差(Δr_j)对分圆压力角误差($\Delta\alpha_{分}$)的影响

我们知道，要使渐开线齿形正确，合乎我们的要求，实质上也可以说，就是要控制它的基圆尺寸。我们在前面说过，渐开线有这样一个性质，即“不同圆，不同线”。这就是说，如果基圆尺寸有误差，渐开线就变了样，而反映出来的分圆压力角也就不符合标准数值了。设齿轮的分圆半径是 $r_{分}$，而我们希望渐开线齿形在这分圆上的压力角是 $\alpha_{分}$，那么形成这个渐开线的基圆半径理论上应该是(见 1-20 式)：

$$r_j = r_{分} \cos \alpha_{分} \tag{a}$$

但是，如果形成这个渐开线的基圆发生了误差，其半径不是 r_j，而是另一数值 r'_j（图 1-6），而

$$r'_j = r_j + \Delta r_j$$

式中的 Δr_j 为基圆半径的误差。那么，以这个基圆形成的渐开线，也就不是我们原来所要求的渐开线了，它在分圆上的压力角也就不等于我们所希望的 $\alpha_{分}$ 了。这时候，分圆压力角将发生多大的误差呢？用微分法来回答这个问题，比较简单，即对(a)式的两边进行微分，其中 $r_{分}$ 是常数，r_j 和 $\alpha_{分}$ 是变数，故

$$\Delta r_j = -r_{分} \sin \alpha_{分} \Delta \alpha_{分}$$

因而

$$\Delta \alpha_{分} = -\frac{\Delta r_j}{r_{分} \sin \alpha_{分}} \tag{1-25}$$

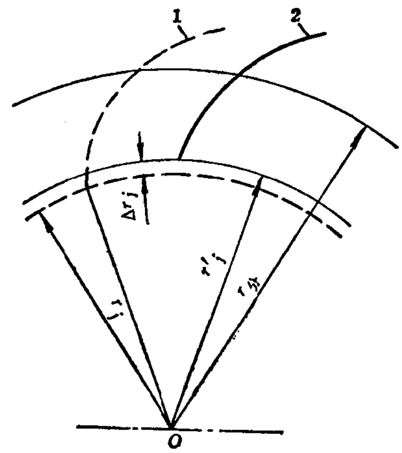


图 1-6 基圆误差对压力角的影响

式中的 $\Delta \alpha_{分}$ 就是分圆压力角的误差。由上式可知，如果基圆半径偏大了(即 Δr_j 为正值时)，则分圆压力角的误差 $\Delta \alpha_{分}$ 为负值，即分圆压力角偏小了；反过来说，如果基圆半径偏小了(即 Δr_j 为负值时)，则分圆压力角的误差 $\Delta \alpha_{分}$ 为正值，即分圆压力角偏大了。

总起来说，我们可以用一句话来表达这种误差关系，就是"基大压小"或"基小压大"。

上面说过，用微分法来分析误差关系比较简单，其实，用另一种方法("比较"法)也可以得到同样的结果，因为

$$r_j = r_{分} \cos \alpha_{分}$$

当 r_j 有误差 Δr_j 时，$\alpha_{分}$ 就产生相应的误差 $\Delta \alpha_{分}$。这就是说，以 $(r_j + \Delta r_j)$ 为半径的基圆所形成的渐开线，它在固定分圆上的压力角就成为 $(\alpha_{分} + \Delta \alpha_{分})$ 了，所以

$$r_j + \Delta r_j = r_{分} \cos(\alpha_{分} + \Delta \alpha_{分}) \tag{b}$$

将(a)和(b)两式相比较，即以(b)式两边各减去(a)式两边，就得到

$$\Delta r_j = r_{分}[\cos(\alpha_{分} + \Delta \alpha_{分}) - \cos \alpha_{分}]$$

$$= -2r_{分} \sin \frac{2\alpha_{分} + \Delta \alpha_{分}}{2} \sin \frac{\Delta \alpha_{分}}{2}$$

但因 $\Delta \alpha_{分}$ 是误差，其数值很小，它与 $\alpha_{分}$ 相比，可忽略不计，所以

$$\sin \frac{2\alpha_{分} + \Delta \alpha_{分}}{2} \approx \sin \alpha_{分}$$

同时，

$$\sin \frac{\Delta \alpha_{分}}{2} \approx \frac{\Delta \alpha_{分}}{2}$$

所以

$$\Delta r_j = -r_{分} \sin \alpha_{分} \Delta \alpha_{分} \quad \text{（与微分法结果全同）}$$

此外，"基大压小"或"基小压大"这个概念，也可由图 1-6 直接观察出来。因为 $r'_j > r_j$，故渐开线 2 的弯曲程度小于渐开线 1 的弯曲程度（参阅前面的 § 1-1，三），又因为渐开线在基圆上起点处的压力角等于零，而渐开线 2 的起点又在渐开线 1 的起点外边。由于这些原因，渐开线 2 在分圆上的压力角显然小于渐开线 1 在分圆上的压力角，即所谓"基大压小"。但用观察法，只能知其性，而不能定其量。

七 直齿圆柱渐开线齿轮基圆和根圆的大小比较

在前面§1-1，五中，我们已经知道了齿轮上有不少的圆。这些圆的大小关系，大部分是肯定的。例如，分圆大于基圆，顶圆大于根圆。但是，基圆与根圆相比较，谁大谁小呢？这就不一定，要依某些条件来定。为了便于以后分析问题，有必要把基圆和根圆的大小关系先搞清楚。

由(1-18)式我们知道根圆直径为

$$D_{根}=m[z-2(f+c')]$$

由(1-21)式又知道基圆直径为

$$d_j=mz\cos\alpha_{分}$$

由此来看，当根圆小于基圆(即 $D_{根}<d_j$)时，要有什么条件？

令

$$m[z-2(f+c')]<mz\cos\alpha_{分}$$

将上式化简，就得到

$$z<\frac{2(f+c')}{1-\cos\alpha_{分}} \tag{1-26}$$

这就是根圆小于基圆的条件。对于标准直齿轮，因 $f=1$，$c'=0.25$，$\alpha_{分}=20°$，所以上式成为

$$z<41.45$$

这就是说，对于标准直齿轮，当 $z\leqslant41$ 时，根圆<基圆；当 $z\geqslant42$ 时，根圆>基圆。也就是说，当其它条件一定时，若齿数较少，则根圆在基圆的里面；若齿数较多，则根圆在基圆的外面。对于标准直齿轮，这个齿数以41牙和42牙为分界线。为了便于记忆这个关系，我们用一句简单的话来表达，就是"齿多根圆大，齿少根圆小，四十一、二见分晓"。

八 渐开线齿形的座标计算法

在设计加工齿形用的成形刀具（包括成形砂轮）时，往往要计算渐开线齿形的座标。计算的方法很多，这里介绍一种比较简单的方法，即利用基圆齿槽半角 (σ_j) 的方法。由图1-7得知，通过齿槽对称线作 $\overline{Oy}$ 座标轴线，通过 $\overline{Oy}$ 轴线与根圆的交点 O_1 作 $\overline{O_1x}$ 座标轴线。我们所要求的齿形座标，就是齿形上某些点（例如 m 点，其向量半径 r 为给定值）在座标系 xO_1y 中的座标 x 和 y。

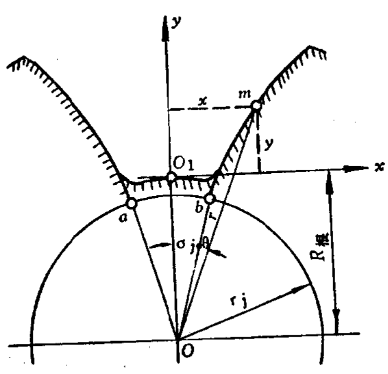


图 1-7 渐开线齿形座标

设齿槽两侧渐开线在基圆上的起点各为 a 和 b 点，则基圆齿槽半角为

$$\sigma_j=\frac{\widehat{ab}}{2r_j}\quad(弧度)$$

标准齿轮和变位齿轮的 σ_j，在§1-6，四中有详细的计算公式；而对于各种齿数的标准齿轮，σ_j 的数值可直接查阅本书附录表2，因此可不必再计算。

设齿形上任意点 m 的向量半径为给定值 r，则渐开线在该点的压力角 α 为

$$\cos\alpha=\frac{r_j}{r}$$

式中
$$r_j=\frac{mz}{2}\cos\alpha_{分}$$

因此 m 点的渐开角 θ 为

$$\theta=\mathrm{inv}\alpha$$

最后得 m 点的座标为

$$\left.\begin{aligned}x&=r\sin(\sigma_j+\theta)\\y&=r\cos(\sigma_j+\theta)-R_{根}\end{aligned}\right\}\tag{1-27}$$

这样，我们就可以将任意点 m 的座标求出来了。但在实际工作中，求一点的座标显然是不够的，往往要求 3～5（或更多一些）点的座标，但方法是完全相同的。在开始计算时，先从附录表 2 中把基圆齿槽半角 σ_j 查出来，再把基圆半径 r_j 和根圆半径 $R_{根}$计算出来。然后，在齿形上选择 3～5 点（例如，顶圆上一点、分圆上一点、接近根圆处一点……），并给定它们的向量半径 r，然后按次序进行计算。计算时，最好列出一个计算表格，如表 1-2 所示：

表 1-2 计算直齿轮齿形座标的表格

查附录表 2 $\sigma_j=$ ， 计算$r_j=$ ， $R_{根}=$ 。

点序	给定值 r	计算公式			
		$\cos\alpha=\frac{r_j}{r}$	$\theta=\mathrm{inv}\alpha$	$x=r\sin(\sigma_j+\theta)$	$y=r\cos(\sigma_j+\theta)-R_{根}$
1					
2					
3					
4					
5					

§ 1-2 两个齿轮的啮合

一 两个渐开线齿形啮合的啮合线、转速比、节圆和啮合角

我们知道，一个齿轮是不可能单独进行传动的，最少要有两个齿轮才能进行传动。为了讨论两个齿轮传动中的问题，我们首先来分析两个渐开线齿形啮合过程中的一些基本问题。

图 1-8 表示了两个渐开线齿形 1 和 2。设以齿形 1 推动齿形 2 转动，那么它们在每一瞬时都互相接触，即齿形 1 上的某点和齿形 2 上的某点相接触。

例如，现在有两点在固定平面（纸平面）上的 m 位置接触。过一瞬时之后，另外两点在固定平面上的 n 位置接触。那么，在固定平面上，这些接触位置的轨迹（m、n、……）就叫做啮合线。

对于两个渐开线齿形来说，它们的啮合线是什么呢？由下面的分析可知，它们的啮合线