机翼理论

王献孚　韩久瑞　编

人民交通出版社

机 翼 理 论

Jiyi Lilun

王献孚 韩久瑞 编

人 民 交 通 出 版 社

机 翼 理 论

王献孚 韩久瑞 编

人民交通出版社出版
新华书店北京发行所发行
各 地 新 华 书 店 经 售
人民交通出版社印刷厂印
开本：787×1092 $\frac{1}{16}$ 印张：15.625 字数：385千
1 9 8 7 年 7 月 第1版
1 9 8 7 年 7 月 第1版 第1次印刷
印数：0001—1,000 册 定价：3.75元

内 容 提 要

本书主要阐述机翼绕流的基本理论及其应用，全书共分六章，包括：流体力学基础；翼剖面理论；有限翼展机翼理论；短翼理论；叶栅理论及水翼空化绕流理论等。本书在取材方面特别注意了对问题的物理意义的论述、对数学模型建立的理解以及工程上行之有效的一些计算方法的介绍。通过本书的学习，可使读者初步具有分析和解决机翼绕流问题的能力，并对进一步深入研究机翼理论问题打下一个良好的基础。

本书是根据船舶流体力学专业“机翼理论”课程教学大纲编写的，可作为船舶力学专业和船舶类研究生的教材，对从事流体工程研究和有关专业的技术人员、教师、学生也是一本很好的参考书。

前　言

《机翼理论》是船舶流体力学专业的一门重要基础理论课程。机翼理论的应用极其广泛，它不仅是飞机空气动力学的基础理论课程，也是船体性能研究中船舶的运动、船舶推进器和船舶操纵性的重要理论基础，船舶的舵和螺旋桨，以及水翼、减摇鳍、稳定翼、冲翼式气垫船等都是机翼理论的研究对象。

本书是根据船舶流体力学专业“机翼理论”课程教学大纲编写的，可作为本科船舶力学专业的学生和船舶类研究生的教材，亦可供从事有关流体力学问题研究的教师，学生以及科学技术人员参考。

本书对机翼绕流的基本原理作了较详细的介绍和较系统的阐述。全书共分六章，第一章是流体力学基础，对常用的一些流体力学定理和公式作了概述，以便查用；第二章是翼剖面理论；第三章是有限翼展机翼理论；第四章是短翼理论；第五章是叶栅理论基础；第六章是水翼空化绕流理论基础。在取材方面，本书注意到使读者着重理解问题的物理意义，学习和了解数学模型以及工程上行之有效的一些计算方法，从而通过对这门课程的学习，初步具有分析和解决机翼绕流问题的能力，并对进一步深入研究机翼理论问题打下一个良好的基础。

本书的内容，仅限于不可压缩流体。自由表面效应是水翼理论的重要方面，亦因限于篇幅，未作更多的讨论。

本书是一本新撰写的教材，现在能以这样的面貌出现，我们感谢武汉水运工程学院吴秀恒教授的关心和支持。全书由中国人民解放军海军工程学院邱永寿副教授等审阅，提出过许多宝贵意见，亦特此致谢。

由于我们水平有限，书中缺点和错误恐所难免，热切希望以本书为教材的兄弟院校师生和广大读者对我们提出宝贵意见。

目　　录

第一章　流体力学基础

本章叙述在本书以后各章节中要用到的一些基础流体力学的结果。为便于了解其涵义，对引用的有关内容作了简要的介绍。而更完备的叙述，读者可参考流体力学教材。

§1　高 斯 定 理

首先引述一些矢量算符的定义。由速度场的散度$div\vec{V}$（相对体积膨胀率）的定义：

$$div\vec{V}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta s}\vec{n}\cdot\vec{V}ds \tag{1.1.1}$$

式中Δs为体积$\Delta\tau$的表面积，$\vec{n}$为Δs上的法向单位矢量。在直角坐标(x,y,z)中可求得速度矢$\vec{V}(u,v,w)$的散度表达式：

$$div\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.1.2}$$

引入算符∇（读nabla）的定义

$$\nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.1.3}$$

则有

$$\nabla\cdot\vec{V}=div\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1.1.4}$$

由标量函数$\varphi(x,y,z)$梯度的定义：

$$grad\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\vec{n}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_{\Delta s}\vec{n}\varphi ds \tag{1.1.5}$$

这里$\vec{n}$为标量函数等位面的外法线方向，则有

$$\nabla\varphi=grad\varphi=\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1.1.6}$$

旋度矢量$\vec{\Omega}$的定义：

$$\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{V}=rot\vec{V}=\vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1.1.7}$$

并有

$$\nabla\cdot\vec{\Omega}=div\vec{\Omega}=0 \tag{1.1.8}$$

现在来叙述高斯定理。如令X是体积τ内和包围体积τ的表面S上的某一标量函数或矢量函数，高斯定理得出：

$$\int_{\tau}(\nabla X)d\tau=\int_{s}\vec{n}Xds \tag{1.1.9}$$

式中$\vec{n}$为ds表面上外法线单位矢量。这个定理可简单证明如下：

取体积τ内任一单元体$\delta\tau$，由矢量场散度和标量场梯度的定义式(1.1.1)、(1.1.5)近似

地有：

$$(\nabla X)\delta\tau=\int_{(\delta s)}\vec{n}X ds$$

对体积单元求和，便得

$$\int_{\tau}(\nabla X)d\tau=\sum\int_{(\delta s)}\vec{n}X ds$$

因为体积τ内任何两个相邻接单元公共边界上外法线方向正好相反，其面积分之和将相互抵消，而留下的仅有体积τ的外边界S上的面积分，故有(1.1.9)成立。

如令 $X=p$（标量压力 p），则有梯度形式高斯定理：

$$\int_{\tau}\nabla p dz=\int_{s}\vec{n}p ds \tag{1.1.10}$$

如令 $X=\vec{V}$（矢量速度 $\vec{V}$），则有散度形式高斯定理：

$$\int_{\tau}\nabla\cdot\vec{V}d\tau=\int_{s}\vec{n}\cdot\vec{V}ds \tag{1.1.11}$$

如令 $X=\times\vec{V}$，则又有如下形式高斯定理：

$$\int_{\tau}\vec{\Omega}d\tau=\int_{s}\vec{n}\times\vec{V}ds \tag{1.1.12}$$

§2 连续性方程

流体作为连续介质，在其流动过程中，遵循质量守恒定律的数学表达式，称为连续性方程。

考虑在流体中任一固定的封闭表面S，由S所包围的流体体积τ，如基元面 ds 上单位外法线矢量为$\vec{n}$，流体通过ds的速度矢量为$\vec{V}$，则有流体穿过S面流出的质量流量为

$$\int_{s}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds \tag{1.2.1}$$

这里 $\rho=\rho(x,y,z,t)$是流体的密度，它可以随时间和空间位置而变化。在体积τ中流体质量为

$$\int_{\tau}\rho d\tau \tag{1.2.2}$$

若在所取体积τ内无流体源或汇（即没有流体产生和消失），则τ内流体质量变化只能通过其边界S流进或流出的流体质量所引起，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho dt+\int_{s}\rho\vec{V}\cdot\vec{n}ds=0 \tag{1.2.3}$$

由高斯定理(1,2,3)可写为

$$\int_{\tau}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})\right)d\tau=0 \tag{1.2.4}$$

因为这个等式对任意τ都成立，故对每一点都必须有：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=0 \tag{1.2.5}$$

这就是连续性方程。将它展开还可写成另一种形式：

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{V}=0 \tag{1.2.6}$$

对于不可压缩流体，$D\rho/Dt=0$，连续性方程为

$$\nabla\cdot\vec{V}=0 \tag{1.2.7}$$

或用直角坐标表示为

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{1.2.8}$$

研究轴对称流体采用柱坐标(r,θ,z)比较方便，则相应的不可压缩连续性方程：

$$\frac{\partial(rV_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial V_z}{\partial Z}=0 \tag{1.2.9}$$

§3 运 动 方 程

即动量方程。对体积为τ，表面积为S的流体，由于它在流动中质量守恒，$\frac{d}{dt}(\rho d\tau)=0$，故其动量$\int_\tau \vec{V}\rho d\tau$的变化率：

$$\frac{d}{dt}\int_\tau \vec{V}\rho d\tau=\int_\tau \frac{d\vec{V}}{dt}\rho d\tau \tag{1.3.1}$$

相当于τ内流体的质量乘加速度。

设作用于单位质量流体的体积力以$\vec{F}$表示，则作用于流体τ上总的体积力为：

$$\int_\tau \vec{F}\rho d\tau$$

对于无粘流体，作用于S上表面力为

$$-\int_S p\vec{n}ds$$

因静压p为内法线指向基元表面ds，$\vec{n}$为外法线方向，故上式前加负号。则动量方程便可写为：

$$\int_\tau \frac{d\vec{V}}{dt}\rho d\tau=\int_\tau \vec{F}\rho d\tau-\int_S p\vec{n}dS \tag{1.3.2}$$

应用高斯定理：

$$\int_S p\vec{n}ds=\int_\tau \nabla p d\tau$$

所以

$$\int_\tau\left(\rho\vec{F}-\nabla p-\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\right)d\tau=0 \tag{1.3.3}$$

其微分形式为

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1.3.4}$$

这就是欧拉运动微分方程式。其直角坐标形式为：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

柱坐标形式欧拉运动微分方程式为:

$$\frac{Du}{Dt}-\frac{v^2}{r}=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{Dv}{Dt}+\frac{uv}{r}=F_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}$$

$$\frac{Dw}{Dt}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.3.6}$$

其中

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+w\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3.7}$$

根据矢量恒等式，可将加速度$\frac{d\vec{V}}{dt}$写为:

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+(\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V}=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{1}{2}V^2\right)-\vec{V}\times(\nabla\times\vec{V})$$

$$=\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla V^2-\vec{V}\times\vec{\Omega} \tag{1.3.8}$$

则欧拉运动微分方程又可写为

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\frac{1}{2}\nabla\cdot V^2-\vec{V}\times\vec{\Omega}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{1.3.9}$$

此即兰姆-葛罗米柯运动微分方程式。其直角坐标形式为:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+2\Omega_y w-2\Omega_z v+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{V^2}{2}\right)=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2\Omega_z u-2\Omega_x w+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{2}\right)=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{1.3.10}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+2\Omega_x v-2\Omega_y u+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{V^2}{2}\right)=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

假定坐标系绕Z轴相对于惯性坐标系以等角速度ϖ旋转。令旋转坐标系(r',θ',z')，对旋转坐标系的速度分量记以u'，v'和w'，则有

$$u'=u,\quad v'=v-\omega r,\quad w'=w \tag{1.3.11}$$

如两组坐标系在时刻$t=0$时重合，则又有

$$t'=t,\ r'=r,\ \theta'=\theta-\omega t,\ z'=z \tag{1.3.12}$$

将式(1.3.11)和式(1.3.12)代入式(1.3.6)后，去掉撇标，u、v、w表示旋转坐标系(r,θ,z)中分量，得

$$\frac{Du}{Dt}-\frac{v^2}{r}-2\omega v-\omega^2 r=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$\frac{Dv}{Dt}+\frac{uv}{r}+2\omega u=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} \tag{1.3.13}$$

$$\frac{Dw}{Dt}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

这就是旋转坐标系中的欧拉运动微分方程式。其中 $-2\omega v$ 和 $2\omega u$ 正是哥氏加速度 $2\vec{\omega}\times\vec{V}$ 的两个分量，故与柱坐标形式绝对坐标系欧拉运动微分方程相比较，相当于附加了哥氏加速度 $2\vec{\omega}\times\vec{V}$ 和向心加速度 $-\omega^2\vec{r}$ 两项。写成直角坐标形式绕 z 轴以角速度 ω 旋转时动坐标的欧拉运动微分方程为：

$$\begin{aligned}
&\frac{Du}{Dt}-2\omega v-\omega^2x=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\frac{Dv}{Dt}+2\omega u-\omega^2y=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&\frac{Dw}{Dt}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\tag{1.3.14}$$

其中 u，v，w 是相对于旋转的直角坐标系速度分量。

§4 伯努利方程

对无旋流，$\vec{\Omega}=0$，存在速度势函数 $\phi(x,y,z,t)$，并有 $\vec{V}=\nabla\phi$，或 $u=\frac{\partial\phi}{\partial x}$，$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}$，

$w=\frac{\partial\phi}{\partial z}$。对于保守力场，存在力势函数 $U(x,y,z)$，$\vec{F}=\nabla U$，即

$$F_x=\frac{\partial U}{\partial x},\quad F_y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad F_z=\frac{\partial U}{\partial z}\tag{1.4.1}$$

对正压流体（ρ 是 p 的函数），$\frac{1}{\rho}\nabla p=\nabla\int\frac{dp}{\rho}$。故在无旋、正压和有势力场中，兰姆—葛罗米柯方程(1.3.9)可写为：

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2-U+\int\frac{dp}{\rho}\right)=0\tag{1.4.2}$$

这就是说，括号内的表达式对空间的导数应等于零，所以

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2-U+\int\frac{dp}{\rho}=C(t)\tag{1.4.3}$$

这就是无旋流伯努利方程，也称拉格朗日积分。其中积分常数 C 是时间的函数。对不可压缩重力场，$U=-gz$，伯努利方程为：

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}V^2+gz+\frac{p}{\rho}=C(t)\tag{1.4.4}$$

不可压缩定常流伯努利方程则为

$$\frac{1}{2}V^2+gz+\frac{p}{\rho}=\text{常数}\tag{1.4.5}$$

即使流动不是无旋的，也可以推出伯努利方程在流线上成立的形式。对定常流、不可压缩和重力场中，沿流线 s 方向欧拉运动微分方程为：

$$V\frac{\partial V}{\partial s}=-g_s-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{1.4.6}$$

式中g_s是g沿流动方向的分量。将(1.4.6)积分可得流线上伯努利方程：

$$\frac{1}{2}V^2+gz+\frac{p}{\rho}=常数 \tag{1.4.7}$$

这里的常数与所选的流线有关。

对于可以忽略重力效应时，伯努利方程有更简单形式：

$$p+\frac{\rho V^2}{2}=常数 \tag{1.4.8}$$

或

$$p+\frac{\rho V^2}{2}=p_0 \tag{1.4.9}$$

有时称p为静压，$\frac{1}{2}\rho V^2$为动压，把它们之和p_0称为总压。

在旋转坐标系中，对定常流动也有沿流线的伯努利方程。如考虑式(1.3.14)，其中哥氏加速度矢$2\bar{\omega}\times\vec{V}(-2\omega v,\ 2\omega u,\ 0)$与速度矢$\vec{V}\ (u,v,w)$相正交，因此沿流线必无哥氏加速度分量。不计重力效应，沿流线可将(1.3.14)写为：

$$V\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\int\frac{dp}{\rho}-\frac{\omega^2r^2}{2}\right)=0 \tag{1.4.10}$$

积分得

$$\int\frac{dp}{\rho}+\frac{V^2}{2}-\frac{\omega^2r^2}{2}=常数 \tag{1.4.11}$$

这就是旋转坐标系中定常流沿流线的伯努利方程。

§5 斯托克斯定理

令C是一给定封闭曲线，S是以该曲线为边界的表面，如图1.5.1所示。$\bar{n}$是微元面积dS上单位法向矢量，其指向与围绕C的走向有关，由右螺旋法则确定。若X是任一矢量函数或标量函数，斯托克斯定理建立了线积分和面积分的如下关系：

$$\int_s(\bar{n}\times\nabla)Xds=\int_c Xd\bar{r} \tag{1.5.1}$$

其中$\bar{r}$是沿曲线C的位置矢量。这个定理可简单证明如下。

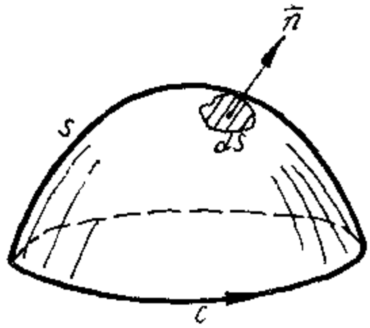

图 1.5.1

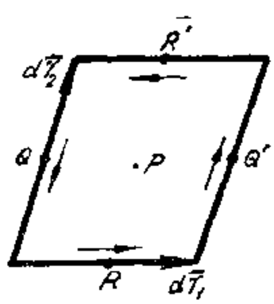

图 1.5.2

若将表面S剖分为许多小的网格，对每个网格边界的线积分$\int X d\vec{r}$累加，因相邻网格公共边界上积分路线相等并相反，故相加的结果只留有沿S外边界C的积分$\int_c X d\vec{r}$。这样，斯托克斯定理的证明只要对一个单独网格成立就可以了。取平行四边形网格（图1.5.2）来求证仍不失其一般性。设微元平行四边形边长为无穷小矢量$d\vec{r}_1$和$d\vec{r}_2$，令平行四边形中心点P处X值为X_p，考虑绕该网格边界的线积分：

$$\int X d\vec{r} = (X_R - X_{R'})d\vec{r}_1 + (X_{Q'} - X_Q)d\vec{r}_2 \tag{1.5.2}$$

其中Q、Q'、R、R'是诸边线的中点。因

$$X_{R'} = X_p + dX_p = X_p + \frac{1}{2}(d\vec{r}_2\nabla)X_p$$

$$X_R = X_p - dX_p = X_p - \frac{1}{2}(d\vec{r}_2\nabla)X_p$$

类似地有：

$$X_{Q'} = X_p + \frac{1}{2}(d\vec{r}_1\nabla)X_p, \quad X_Q = X_p - \frac{1}{2}(d\vec{r}_1\nabla)X_p,$$

则

$$\int X d\vec{r} = [-d\vec{r}_1(d\vec{r}_2\nabla) + d\vec{r}_2(d\vec{r}_1\cdot\nabla)]X_p \tag{1.5.3}$$

利用二重矢量积的恒等式（$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c}) + \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})$），便可将上式写为

$$\int X d\vec{r} = [(d\vec{r}_1\times d\vec{r}_2)\times\nabla]X_p \tag{1.5.4}$$

因$d\vec{r}_1\times d\vec{r}_2 = \vec{n}dS_p$，所以

$$\int X d\vec{r} = (\vec{n}\times\nabla)X ds \tag{1.5.5}$$

这样，对所有基元网格求和，便有

$$\int_c X d\vec{r} = \int_s (\vec{n}\times\nabla)X ds \tag{1.5.6}$$

此即斯托克斯定理。若令$X = \vec{V}$（速度矢量），则斯托克斯定理为：

$$\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_S (\vec{n}\times\nabla)\vec{V}ds = \int_S \vec{n}\cdot(\nabla\times\vec{V})ds = \int_S \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds \tag{1.5.7}$$

写成直角坐标形式为：

$$\int_C (udx + vdy + wdZ) = \iint_S \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz\cdot dx + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy \tag{1.5.8}$$

§6 涡线、涡管、速度环量

在涡线上任一点处的切线，平行于该点处的涡旋矢量，通过一封闭曲线由涡线所包围的表面是涡管，通常涡管的横截面积并不要是无穷小。

现考虑某一段涡管，其两端横截面积分别以A_1和A_2表示，它所包含的体积为τ。令A_3为

该涡管段A_1和A_2之间的表面积，则该涡管段体积τ的总表面积$A = A_1 + A_2 + A_3$。设涡管表面A上涡矢量为$\vec{\Omega}$（即旋度矢量），应用高斯定理可知

$$\int_A \vec{n}\cdot\vec{\Omega}\cdot ds = \int_\tau \nabla\cdot\vec{\Omega}\cdot d\tau \tag{1.6.1}$$

因$\vec{\Omega} = \nabla\times\vec{V}$，$\nabla\cdot\vec{\Omega} = 0$ 故有

$$\int_A \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds = \int_{A1} \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds + \int_{A2} \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds + \int_{A3} \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds = 0 \tag{1.6.2}$$

式中$\vec{n}$为涡管表面外法向矢量。因为涡管表面A_3由涡线组成，即涡矢$\vec{\Omega}$与涡管表面相切，故式(1.6.2)中第三个积分$\int_{A3}\vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds = 0$，所以

$$\int_{A1} \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds + \int_{A2} \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds = 0 \tag{1.6.3}$$

如在每一涡管截面上$\vec{n}$均取同一指向（如$\vec{\Omega}$的指向），则式(1.6.3)表明积分$\int\vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds$沿涡管横截面相等。通常我们称这个积分为涡管强度，这样就有涡管强度沿涡管守恒的特性。根据这个特性，涡管在流体中不能终止，即流体中涡管只能是呈现封闭状，或涡管两端在边界面上，及引向无穷远处。

在流体中沿任何曲线AB的速度环量定义为

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (udx + vdy + wdz) \tag{1.6.4}$$

式中$d\vec{r}$是沿曲线AB的基元长度矢量。对于封闭曲线C的速度环量，根据斯托克斯定理，则有如下关系式成立

$$\Gamma_C = \int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_S \vec{n}\cdot\vec{\Omega}ds \tag{1.6.5}$$

表明在流体中沿封闭曲线C的速度环量等于通过该曲线所包面积S上涡管总强度。

通常，从A到B的曲线取不同路线，其速度环量值各不相同。但在无旋流场中，由于存在速度势函数ϕ，如函数ϕ为单值或在曲线AB上无奇性，则

$$\Gamma_C = \int_A^B\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right) = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A \tag{1.6.6}$$

表示速度环量与所取路径无关。

对于一条随流体运动的封闭周线C，考虑其速度环量随时间变化率：

$$\frac{d\Gamma_C}{dt} = \frac{d}{dt}\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_C\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r} + \vec{V}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$= \int_C\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r} + \vec{V}\cdot d\vec{V}\right) \tag{1.6.7}$$

在无粘流动中，应用有势力场中的欧拉运动方程(1.3.4)：

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

将它点乘$d\vec{r}$，则有

$$\frac{d\vec{V}}{dt}\cdot d\vec{r} = dU - \frac{dp}{\rho} \tag{1.6.8}$$

代入式(1.6.7)得

$$\frac{d\Gamma_C}{dt}=\int_C d\left(-\int\frac{dp}{\rho}+U+\frac{1}{2}v^2\right) \tag{1.6.9}$$

由此可见，对无粘、有力势和正压流体中，对任一流体中沿周线的速度环量将不随时间而变化，即 $\frac{d\Gamma_C}{dt}=0$，此即汤姆逊环量守恒定理。

§7 无旋流动的源场和偶极子场

在无旋流场中，

$$\mathrm{rot}\vec{V}=\nabla\times\vec{V}=0 \tag{1.7.1}$$

必存在一速度势函数 ϕ，

$$\vec{V}=\mathrm{grad}\phi=\nabla\phi \tag{1.7.2}$$

对不可压缩流体，由无源的连续性方程

$$\mathrm{div}\vec{V}=\nabla\cdot\vec{V}=0 \tag{1.7.3}$$

故在不可压缩流体中无旋无源流动的速度势函数满足拉普拉斯方程：

$$\mathrm{div\ grad}\phi=\nabla^2\phi=0 \tag{1.7.4}$$

满足拉普拉斯方程的函数称为调和函数。

考虑强度为Q的空间源（汇）流动，其速度场满足流量守恒条件

$$V\cdot 4\pi r^2=Q \tag{1.7.5}$$

式中r是相对于点源的某一点径矢量，故有

$$V=\frac{Q}{4\pi r^2} \tag{1.7.6}$$

注意到在球坐标系中

$$V_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=V=\frac{Q}{4\pi r^2} \tag{1.7.7}$$

源（汇）流动仅有径向速度分量，所以便可求得其相应的速度势函数：

$$\phi=-\frac{Q}{4\pi r} \tag{1.7.8}$$

式中$Q>0$为源流，$Q<0$则为汇流。

假如源(汇)连续地分布在某体积τ内（图1.7.1），设单位体积的源（汇）强度为q，q是体积τ内点坐标的函数。在τ中强度为$qd\tau$的源，对流体空间任一点P处（不论在体积τ内部或外部），这个微源的速度势为：

$$d\phi=-\frac{qd\tau}{4\pi r} \tag{1.7.9}$$

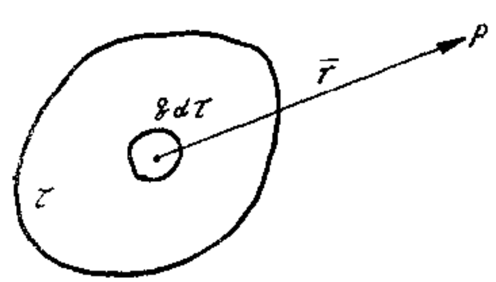

图 1.7.1

根据流动叠加原理，故由体积τ内连续分布的源对P点处作用的总速度势为：

$$\phi=-\frac{1}{4\pi}\int_\tau\frac{qd\tau}{r} \tag{1.7.10}$$

我们知道在不可压缩流体无源流动中，其连续性方程表示为速度矢量的散度为零。而对体积 τ 中有源流动，根据质量守恒原理，其速度矢量的散度应等于该处单位体积流出的流量，即

$$\mathrm{div}\vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = q \tag{1.7.11}$$

引入速度势，$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi$，故在无旋源场体积 τ 内，速度势函数满足如下泊松方程：

$$\nabla^2\phi = q \tag{1.7.12}$$

并由此可见，公式(1.7.10)所表示的函数 ϕ 就是体积 τ 内泊松方程(1.7.12)的解。而在体积 τ 之外，为无旋无源流，则该函数 ϕ 是拉普拉斯方程 $\nabla^2\phi = 0$ 的解。

除了源的体积分布外，在流体力学中常使用源的面分布与线分布。如对源强度的面分布密度和线分布密度都用同一符号 q 表示，这样，其对应的速度势便可用如下面积分和线积分表示为：

$$\phi = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{q\,dS}{r} \tag{1.7.13}$$

$$\phi = -\frac{1}{4\pi}\int_L \frac{q\,dl}{r} \tag{1.7.14}$$

考虑空间偶极子流。如研究由强度为 Q 相等的源和汇组合所产生的速度势，设在直线 AL 上把汇放在 A 点，把源放在邻近点 A' 处，$\overline{AA'} = \triangle l$（图1.7.2）。现在来确定它们对空间任一点 P 处的速度势函数 ϕ，令 $\overrightarrow{AP} = \vec{r}$，$\overrightarrow{A'P} = r'$，则有

$$\phi = -\frac{Q}{4\pi r'} + \frac{Q}{4\pi r} \tag{1.7.15}$$

如将源点逐渐靠近汇点，并假定其强度可无限增大，令

$$\lim_{\substack{A'\to A\\ Q\to\infty}} Q \cdot \overline{AA'} = m \quad （有限值） \tag{1.7.16}$$

因此

$$\phi = \lim_{\substack{A'\to A\\ Q\to\infty}} (Q \cdot \overline{AA'})\ \frac{1/r' - 1/r}{\overline{AA'}} = -\frac{m}{4\pi}\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.7.17}$$

这样求得的极限流动，即称为偶极子流。偶极子位于 A 点，其偶轴为 AL，其中 m 称为偶极子矩或偶极子密度。若将偶极子矩看作一个矢量 $\vec{m}$，其大小为 m，其方向沿偶极子轴 AL（从汇到源的方向），则偶极子的速度势(1.7.17)可表示为：

$$\phi = -\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \tag{1.7.18}$$

类似于源的连续分布，对于最有意义的连续分布的面偶极子（图1.7.3），使其偶轴方向与表面 S 的外法线方向 $\vec{n}$ 相一致，如 m 表示偶极子的分布密度，则由偶极子连续分布的表面 S 产生的总速度势为：

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int_S m\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)dS \tag{1.7.19}$$