OR

·运·筹·学·丛·书· 3

线性规划

张建中　许绍吉 著

科学出版社

运筹学丛书

线 性 规 划

张建中 许绍吉 著

科 学 出 版 社

内 容 简 介

本书论述了线性规划的基本理论与方法，介绍了大型线性规划问题的求解、网络规划问题和近年来线性规划理论的深入发展及其相关论题.

本书可作为高等院校运筹学、应用数学、管理科学、系统工程学、经济学以及计算机科学等专业的基础课教材，亦可供计算、研究工作者参考.

运筹学丛书

线 性 规 划

张建中 许绍吉 著

责任编辑 徐宇星 刘嘉善

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1990 年 12 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1990 年 12 月第一次印刷 印张：16 1/4

印数：0001—1 900 字数：427 000

ISBN 7-03-001833-8/O·353

定 价：18.00 元

《运筹学丛书》编委会

《运筹学丛书》已出版的图书目录:

前　言

线性规划作为运筹学的一个基本分支，其作用已为越来越多的各界人士所重视．这里不妨引用美国科学、工程和公共事务政策委员会数学组 1983 年在一份报告中所写的如下一段话："我们必须说明数学规划所发生的影响，线性规划是为解决二次大战中的后勤供应问题而产生的．单纯形方法的提出及其在初期成功的应用，使得能用线性规划解决的问题的类型先是缓慢地，但接着就是急速地增加．线性规划成为几乎所有的商业活动、工业生产和军事行动的一个组成部分．由于在设计和操作过程中应用了线性规划，已经节省了亿万美元．"正因为如此，线性规划目前已成为各高等学校的运筹学系、应用数学系、管理科学系、系统工程系、经济系及计算机科学系中普遍开设的一门基础课．

最近十多年来，线性规划无论是在深度还是在广度方面都又取得了重大进展，以至在国际运筹学界近来又出现了一股"线性规划热"．遗憾的是，线性规划的一些最新成果在国内还很少得到反映与介绍．作者写作此书的目的，正是试图填补这一空缺，向读者奉献一本反映 80 年代学科发展水平的《线性规划》．

本书兼顾大学生和专业工作者(包括研究生)两部分读者，使之既能用作大学应用数学专业和运筹学专业的教科书，又是对研究工作者有所裨益的科技参考书．为了达到这个目的，在章节安排上有所考虑，某些内容比较深入而专门的章节初学者可以略去．全书的内容尽量做到自成系统，每章后附有习题．

全书内容可分为五大部分．前四章是线性规划的基本理论与方法．大型线性规划的求解这个当前活跃的研究领域，是本书的第二部分，即第五、六两章讨论的主题．第七、八、九三章构成了本书的第三部分——网络规划．第十章是本书的第四部分，讨论了

线性规划问题的多项式时间算法. 被誉为线性规划两次重大突破的椭球法与投影方法将在这里加以介绍.第五部分包括最后三章，它涉及线性规划在其它数学规划领域的直接应用，如线性互补性问题、线性分式规划、多目标规划、可分离规划等等.

作者希望本书能在以下诸方面形成特色：叙述与论证力求严谨透彻;在引进与解释概念和方法时尽量利用几何直观;内容的选取着重反映国际上的最新成果及当前研究动向；在学科发展的观念上注意体现线性规划与邻近学科分支如非线性规划、组合最优化、数值线性代数等的互相渗透、彼此促进. 当然，作者的努力成功与否还有待实践的检验. 我们诚挚地希望读者对本书的错误与不足之处提出批评与建议.

本书的初稿曾在上海师范大学数学系给大学生及研究生试用过. 对大学生,每周四学时,可在一学期内讲授前四章(除去 §4.4)和第七、九、十三章.

线性规划的开创人之一 A. Charnes 教授与大规模最优化的国际知名专家 L. Lasdon 教授的精湛讲学及日常交谈给作者以很大的启发，谨在此表示衷心的感谢. 这套丛书的主编越民义教授对本书的写作始终给予关心和支持,桂湘云教授、田丰教授和魏权令教授热诚地提供了参考资料，宋天泰博士详细阅读了该书的全部内容,并提出宝贵的修改建议,也谨在此向他们一并致谢.

作者

1987 年 5 月

目　　录

第一章 线性规划基本理论

§ 1.1 线性规划问题

线性规划问题 (linear programming, 简记为 LP 问题)，就是在一组线性的等式或不等式的约束之下，求一个线性函数的最大值或最小值的问题。

考虑下面的线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
\text{约束条件}\ & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\
& \cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\
& x_1, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}
$$

这里，$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ 称为目标函数 (objective function)，记为 z，其中 $c_j(j = 1, \cdots, n)$ 称为价值系数(cost coefficient)，$\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$ 称为价值向量，$x_j(j = 1, \cdots, n)$ 为求解的变量，由系数 a_{ij} 组成的矩阵

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}
$$

称为约束矩阵 (constraint matrix)，列向量 $\mathbf{b} = (b_1, \cdots, b_m)^T$ 称为右端向量 (right-hand-side vector)，条件 $x_j \geqslant 0(1 \leqslant j \leqslant n)$ 称为非负约束。本书中约束条件记为 s.t.(subject to)。一个向量 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$ 满足约束条件，称为可行解或可行点 (feasible point)，所有可行点组成的集合称为可行区域 (feasible region)，记为 D。

对于一个 LP 问题，下面三种情况必占其一：一是 $D = \varnothing$

(本书中，$\varnothing$表示空集)，这时我们说该问题无解或者不可行；二是$D\neq\varnothing$，但目标函数值在D上无界，这时就说该问题无界；三是$D\neq\varnothing$ 且目标函数有有限的最优解，这时就说该问题有最优解。求解 LP 问题就是要判别该问题属于哪一种情况，当问题有最优解时，还需要在可行区域中找出使目标函数达到最小(或最大)的点，也就是最优解 (optimal solution)，以及目标函数的最优值。

如果采用矩阵和向量的形式，则上述线性规划也可表示成

$$
\begin{aligned}
&\min\ \mathbf{cx}\\
&\text{s.t.}\ A\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}\\
&\qquad\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

记 $A=(\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n)$，其中 $\mathbf{a}_j=(a_{1j},\cdots,a_{mj})^T(j=1,\cdots,n)$，则上述问题也可记为

$$
\begin{aligned}
&\min\ \sum_{j=1}^{n}c_jx_j\\
&\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}\mathbf{a}_jx_j\leqslant\mathbf{b}\\
&\qquad x_j\geqslant 0,\ j=1,\cdots,n
\end{aligned}
$$

如果用 $\mathbf{a}_i$ 表示A的第 i 个行向量，$\mathbf{a}_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})$，$i=1,\cdots,m$，则可得到上述问题的又一表示

$$
\begin{aligned}
&\min\ \mathbf{cx}\\
&\text{s.t.}\ \mathbf{a}_i\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b}_i,\ i=1,\cdots,m\\
&\qquad\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}
\end{aligned}
$$

线性规划的应用是很广泛的，在工农业生产及交通运输等各项活动中经常会遇到。只要我们善于合理地构作模型，那么往往可以利用线性规划的知识来提高经济效益。

例 1.1 (运输问题)

要把某种货物从 m 个工厂 $A_1,\cdots,A_m$ 运到n个商店 $B_1,\cdots,B_n$ 去，其中各工厂的库存量为 $a_1,\cdots,a_m$，各商店的需求量为 $b_1,\cdots,b_n$，这里 $\sum_{i=1}^{m}a_i\geqslant\sum_{j=1}^{n}b_j$。已知从工厂 A_i 到商店 B_j

的运费(每一单位货物)为 c_{ij}。现在要确定一个运输方案,即确定从 A_i 到 B_j 的运输量 $x_{ij}(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$,使在满足供求的条件下,总的运费最小。

容易知道,它的数学模型为

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j=1,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i=1,\cdots,m$$

$$x_{ij} \geqslant 0, i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n$$

例 1.2 (营养问题)

某饲养场所用的混合饲料由 n 种配料组成,要求这种混合饲料必须含有 m 种不同的营养成分,并且每一份混合饲料中第 i 种营养成分的含量不能低于 b_i。已知每单位的第 j 种配料中所含第 i 种营养成分的量为 a_{ij},每单位的第 j 种配料的价格为 c_j。现问在保证营养的条件下,应如何配方,使混合饲料的费用最小?

以 x_j 表示每一份混合饲料中第 j 种配料的含量,则该问题的数学模型为

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, i=1,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0, j=1,\cdots,n$$

例 1.3 (资源利用问题)

某厂有 m 种资源,记为 $A_1,\cdots,A_m$,其拥有量分别为 $b_1,\cdots,b_m$,现用来生产产品 $B_1,\cdots,B_n$。产品 B_j 的最低限额产量为 l_j 个单位,且它每个单位的利润为 c_j,又生产每单位的 B_j 需消耗资源 A_i 的量为 a_{ij}。问在工厂现有资源条件且保证定额要求

的前提下，应如何安排生产，使工厂的收益最大？

设安排产品 B_j 的生产量为 x_j，则该问题的数学模型为

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \ i=1,\cdots,m$$

$$l_j \leqslant x_j, \ j=1,\cdots,n$$

这些问题的具体内容各不相同，但它们的数学模型却属于同一类问题，都是线性规划问题． 当然实际问题中考虑的因素并非总是如此明显，往往需要作细致的分析和选择．在建立具体问题的数学模型时，考虑的因素越多，模型越接近真实，但求解也越复杂．因而，建立模型时要适当删去一些次要因素，以期建立一个既比较简单，又比较真实地反映本质规律的模型．

如同上面的例子所显示的，从实际问题中总结出来的线性规划模型形式不完全一样．譬如，目标函数可以是最大值或最小值，约束条件可以是等式约束或不等式约束，变量可以有上界或下界限制，或没有限制．因此必须考虑它们之间的转换，以便得出标准的形式，统一处理各种形式的线性规划问题．

1. 目标函数的转换． 如果原问题是求 $\max z$，则可等价地转换成求 $\min(-z)$． 反之亦然．

2. 约束条件的转换． 如果某一约束条件是线性不等式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i\right)$$

则可等价地化为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i\right) \\ x_{n+i} \geqslant 0 \end{cases}$$

其中新引进的变量 x_{n+i} 称为**松弛变量**．反之，若有必要，等式约束

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

也可化为不等式约束

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \end{cases}$$

3. 变量的非负约束． 我们可将任一 LP 问题化为变量有非负约束的 LP 问题．如果某个变量的约束条件为 $x_j \geqslant l_j$ ($\leqslant l_j$)，则可令 $y_j = x_j - l_j(l_j - x_j)$，$y_j$ 便成为非负变量；如果 x_j 为自由变量，即没有上、下界的约束，则可用

$$\begin{cases} x_j = u_j - v_j \\ u_j, v_j \geqslant 0 \end{cases}$$

来代替．

这样，在今后的讨论中，我们总是将如下形式的问题称为标准形式 (standard form) 的 LP 问题：

$$\begin{aligned} \min\ & z = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \text{s.t.}\ & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

例 1.4 将下面的 LP 问题化为标准形式．

$$\begin{aligned} \max\ & z = x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 + 5x_2 \geqslant 2 \\ & x_1 + 4x_2 \leqslant 6 \\ & x_1 \geqslant 0 \end{aligned}$$

解 对前面两个不等式约束分别添加松弛变量 x_3 和 x_4，自由变量 x_2 用 $x_5 - x_6$ 来代替，再用 $\bar{z} = -z$ 代替原来的目标函数，便得到了标准形式的 LP 问题：

$$\begin{aligned} \min\ & \bar{z} = -x_1 + x_5 - x_6 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 - x_3 + 5x_5 - 5x_6 = 2 \\ & x_1 + x_4 + 4x_5 - 4x_6 = 6 \\ & x_1, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{aligned}$$

§1.2 可行区域与基本可行解

考虑标准形式的 LP 问题:

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{cx} \\ &\text{s.t.}\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \end{aligned}$$

这里约束条件 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ 决定了可行区域 D. 显然在 LP 问题中，目标函数与可行区域是独立而又有联系的两个方面. 这一节讨论可行区域D的结构. 先讨论集合 $K = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ 的性质. 以下总设 $\operatorname{rank}(A) = m < n$, 且 $D \neq \varnothing$.

我们用 E^n 来表示 n 维欧氏空间,从而把 $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{x}$ 都看成是 E^n 中的向量或点. 关于欧氏空间的一般概念，可参阅有关著作，特别地,一个向量 $\mathbf{x} \in E^n$ 的模定义为 $\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$; 一个集合 $S \subseteq E^n$, 若存在一个实数 M, 使对一切 $\mathbf{x} \in S$, 均有 $\|\mathbf{x}\| \leqslant M$, 则称 S 为有界集，否则称为无界集;两个向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$ 的内积，记为 $\mathbf{xy}$, 相当于把 $\mathbf{x}$ 看作行向量，$\mathbf{y}$ 看作列向量作乘法的结果; 记向量 $\mathbf{x}$ 与向量 $\mathbf{y}$ 的夹角为 α, α 可由计算其余弦来定义: $\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{xy}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$; 若 $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, 即 $\mathbf{xy} = 0$, 则称 $\mathbf{x}$ 垂直于 $\mathbf{y}$, 记为 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. 一般地本书中 $\mathbf{e}_t \in E^n$ 表示第 t 个分量为 1,其余分量为 0 的单位列向量，$\mathbf{1} = (1, \cdots, 1)$ 表示所有分量都为 1,维数与上下文相应的行向量.

设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为 E^n 中相异的两个点,则点集

$$P = \{\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \mid \lambda \in E^1\}$$

称为通过 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的直线. 一个集合 $S \subseteq E^n$ 称为仿射集 (affine set), 如果对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, $\lambda \in E^1$, 都有 $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in S$. 譬如 E^3 中的直线和平面都是仿射集,空集也是仿射集.

在线性代数中,我们都学过子空间 (subspace) 的概念. 设集合 $S \subseteq E^n$, 若 S 中任意两点的所有线性组合仍在 S 中,即对一切

$\mathbf{x},\mathbf{y}\in S$，$\alpha,\beta\in E^1$，都有 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in S$，或者说$S$对数乘和加法封闭，则称$S$为 E^n 的一个子空间．关于仿射集和子空间的关系，有如下定理：

定理 1.1 S是 E^n 中的子空间当且仅当S是过原点的仿射集．

证 子空间对加法和数乘封闭，故为仿射集，并且它过原点．

反之，设S为过原点的仿射集，则对任意 $\mathbf{x}\in S$ 和 $\lambda\in E^1$，均有

$$\lambda\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{0}\in S$$

且对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in S$，均有

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\frac{1}{2}\mathbf{x}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathbf{y}\in S$$

故

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}\in S$$

从而S对加法和数乘封闭，故为子空间．证毕．

若 $S\subseteq E^n,\mathbf{p}\in E^n$，则下面的集合称为 $\mathbf{p}$ 作用于S得到的**平移**．

$$S+\mathbf{p}=\{\mathbf{x}+\mathbf{p}\,|\,\mathbf{x}\in S\}$$

容易证明，一个仿射集的平移仍然是仿射集．仿射集S称为与仿射集L**平行**，如果存在 $\mathbf{p}\in E^n$，使 $S=L+\mathbf{p}$．显然，平行是 E^n 中仿射集之间的一个等价关系．需要注意的是这里平行的概念与我们平时所用的平行概念略有不同，例如它不包括 E^3 中直线与平面平行的情况．

定理 1.2 每一非空的仿射集S都平行于唯一的子空间 L．

证 我们首先证明S不能同时与两个不同的子空间平行．设子空间 L_1 和 L_2 都与S平行，则 L_1 平行于 L_2，于是，存在$\mathbf{p}\in E^n$ 使 $L_2=L_1+\mathbf{p}$． 由于 $\mathbf{0}\in L_2$，故 $-\mathbf{p}\in L_1$，从而 $\mathbf{p}\in L_1$，于是 $L_1\supseteq L_1+\mathbf{p}=L_2$． 同理 $L_1\subseteq L_2$，故 $L_1=L_2$，这样就证明了唯一性．任取 $\mathbf{y}\in S$，则 $S-\mathbf{y}=S+(-\mathbf{y})$ 是S的一个平移，且过原点．由定理 1.1，这样得到的仿射集就是平行于S的唯