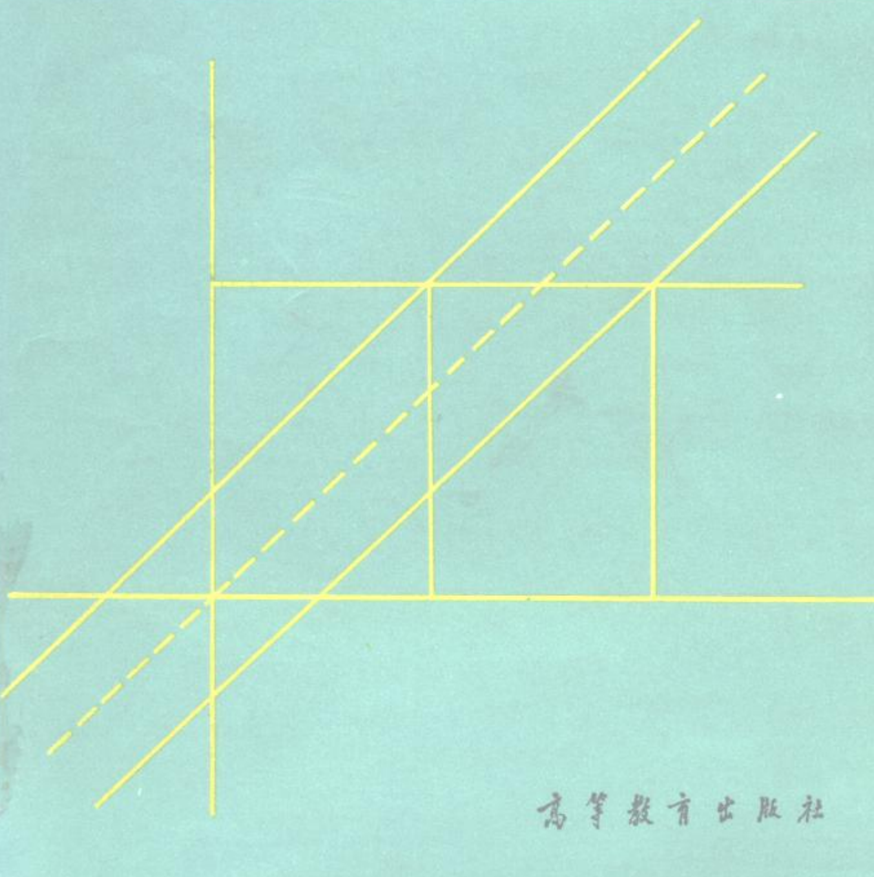
应用概率/下

[美] G. P. WADSWORTH　J. G. BRVAN 著

林少宫　马继芳　李则杲　译



高等教育出版社

应用概率

下 册

沃兹沃思
[美] G. P. WADSWORTH
J. G. BRYAN 著

林少宫 马继芳 李则杲 译

高等教育出版社

本书根据美国McGRAW-HILL出版公司1974年出版的G. P. WADSWORTH和J. G. BRYAN编写的《Applications of Probability and Random Variables》(第二版)译出。中译本分上、下两册出版。

本书可供理工科有关专业师生用作教学参考书，也可供有关专业人员参考。

应用概率
下 册
[美] G. P. WADSWORTH J. G. BRYAN 著
林少宫 马继芳 李则杲 译
*
高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 850×1168 1/32 印张 9 字数 210,000
1986年 7月第1版 1986年 7月第1次印刷
印数 00,001—7,450
书号 13010·01096 定价 2.00元

目　　录

第六章　导出分布

6.1　引言

任何数学理论都不外是从已经确认的前提通过演绎而扩充知识．利用这种方法，科学就能充分应用已经确立的原理，而不致变为简单的经验主义．在随机变量的领域中，一个重要的演绎问题是当某些初始变量的联合分布为已知时，推求这些变量的某个函数的分布(或者是几个函数的联合分布)．

本章将从单变量函数的研究开始，逐步过渡到多变量函数．在单变量的情况下，假设 y 为另一变量 x 的已知函数．给定 x 的分布后，要确定 y 的分布．如果 y 为 x 的单调函数，并且 y 对 x 的导数存在的话，可以得出以密度函数来表示的 y 分布的一般解答．

6.2　单调函数

当 x 增加时如果 y 增加，则称 y 是单调增函数；当 x 增加时如果 y 减少，则称 y 是单调减函数．例如，e^x是单调增函数，而 e^{-x} 是单调减函数．如果 x 既能取正值也能取负值，则函数 x^2 非单调．然而，如果 $x\geqslant 0$，则 x^2 单调增加；如果 $x\leqslant 0$，则 x^2 单调减少．

单调函数的性质要求在因变量与自变量之间单值对应．因此，为了数学处理上的方便，也可将自变量反过来看作因变量的函数．而且，如果原来的函数可对 x 求导，则其反函数可对 y 求导．分布函数 $F(x)$，即使不是在上述意义下严格单调的，仍然在广义上是

单调的，也就是说永不减少.

6.3 单调增函数的密度函数

假定 x 有密度函数 $f(x)$，且令 $F(x)$ 和 $G(y)$ 分别表示 x 和 y 的分布函数. 假定 y 是可微的，是 x 的单调增函数，且当 $x=a$ 时 $y=b$. 由于当且仅当 $x\leqslant a$ 时 $y\leqslant b$，故立即有 $P(y\leqslant b)=P(x\leqslant a)$，因此 $G(b)=F(a)$. 如上节所述，x 可视为 y 的函数，比如说 $\phi(y)$，于是 $a=\phi(b)$. 将方程 $G(b)=F(a)$ 两边对 b 微分，得到：

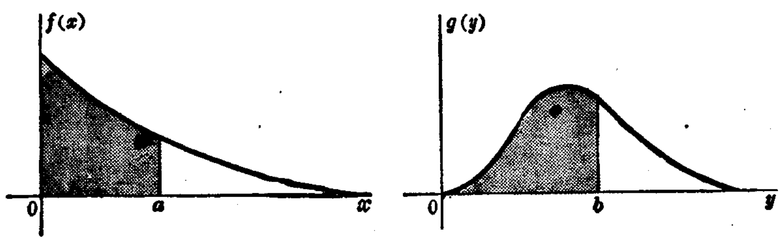
$$\frac{dG(b)}{db}=\frac{dF(a)}{db}=\frac{dF(a)}{da}\cdot\frac{da}{db}=\frac{dF(a)}{da}\frac{d\phi(b)}{db} \tag{6.1}$$

然而根据定义，分布函数的导数是密度函数，因此

$$g(b)=f(a)\frac{d\phi(b)}{db}=f[\phi(b)]\frac{d\phi(b)}{db} \tag{6.2}$$

以 y 代替 b，得

$$g(y)=f[\phi(y)]\frac{d\phi(y)}{dy} \tag{6.3}$$



左　　　　右

图 6.1

例 6.1 假设 x 有概率密度函数 $f(x)=e^{-x}$，$(0,\infty)$，导出 y 的概率密度函数，其中 $y=\sqrt[3]{x}$. 这里 $x=y^3$ 且 $\dfrac{dx}{dy}=3y^2$. 于是 y 的分布由

$$g(y)=3y^2e^{-y^3},\qquad (0,\infty)$$

给出．两个密度函数如图 6.1 所示．把此例推进一步，考虑 x 在 0 与 ln2 之间的概率．它的值是

$$P(x \leqslant \ln 2) \equiv F(\ln 2) = \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx = \frac{1}{2}$$

当 $x \leqslant \ln 2$ 时 $y \leqslant \sqrt[3]{\ln 2}$，故

$$P(y \leqslant \sqrt[3]{\ln 2}) \equiv G(\sqrt[3]{\ln 2}) = \int_0^{\sqrt[3]{\ln 2}} 3y^2 e^{-y^3} dy = \frac{1}{2}$$

于是，两个概率相等，一般说来，图 6.1 的两块阴影面积相等．

例 6.2 一个计算量的舍入误差经常是在末位小数的 -0.5 到 0.5 的区间上均匀分布的．于是，如果 x 表示某计算量的误差，则 $f(x)=1$，$(-0.5, 0.5)$．不言而喻，x 的尺度是如此选择的：即 x 的一个单位表示末位小数的一个单位．假设所考虑的量是运动质点的速度 S，并且相应的计算值是 C．那么，除了计算过程产生的误差外其他误差来源一律予以忽略时，就可写

$$x = S - C \quad 和 \quad f(x) = 1, \; (-0.5, 0.5)$$

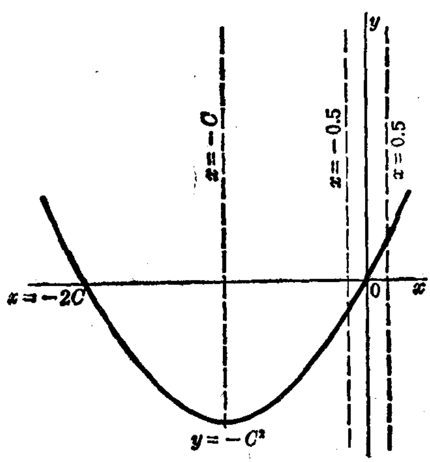


图 6.2

假定用 x 的尺度来衡量的真值 S 和计算值 C 都比 1 大得多．现在

我们来决定在动能的计算值中误差的特性. 真值是$\left(\frac{m}{2}\right)S^2$, 计算值是$\left(\frac{m}{2}\right)C^2$, 因此误差是

$$\frac{m}{2}(S^2-C^2)$$

暂且令 $y=S^2-C^2$,并导出 y 的分布; 以后就容易求出误差$\left(\frac{m}{2}\right)y$ 的分布. 改写 S 为 $C+x$ 得到

$$y=(C+x)^2-C^2=2Cx+x^2$$

这个方程(图 6.2)表示顶点(转向点)在 $x=-C$, $y=-C^2$ 的一个抛物线,由于 $C>1$,故在允许变域 $-0.5\leqslant x\leqslant 0.5$ 上 y 是 x 的单调增函数. y 的相应界限是 $-C+0.25\leqslant y\leqslant C+0.25$. 从抛物线方程式立即得

$$(C+x)^2=C^2+y$$

并且在顶点的右侧,

$$x=-C+\sqrt{C^2+y}$$

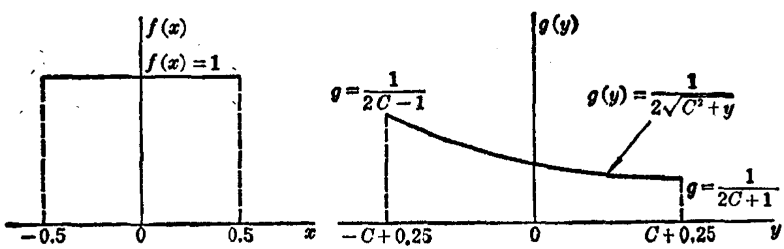


图 6.3

因 $f(x)$ 等于 1, 表明它与 x 无关, 故得到 $f[\phi(y)]=1$. y 的密度函数的唯一变化部分将由导数

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{2\sqrt{C^2+y}}$$

给出. 由此得(图 6.3)

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{C^2+y}},\qquad (-C+0.25, C+0.25)$$

有时,读者由于在 $f(x)$ 中没有可变项可供运算而感到迷惑不解. 因此, 我们再根据分布函数 $G(y)$ 给出 $g(y)$ 的另一推导. 设 $x=a$ 时 $y=b$. 于是,当且仅当 $x\leqslant a$ 时 $y\leqslant b$;并且

$$G(b)=F(a)=\int_{-0.5}^{a} dx=a+0.5$$

但是由 x 和 y 之间的关系得 $a=-C+\sqrt{C^2+b}$. 因此,

$$G(b)=-C+\sqrt{C^2+b}+0.5$$

相应地,

$$g(b)=\frac{dG(b)}{db}=\frac{1}{2\sqrt{C^2+b}}$$

一般则有

$$g(y)=\frac{1}{2\sqrt{C^2+y}},\quad (-C+0.25,\ C+0.25)$$

最后, 用 z 表示实际误差$\left(\frac{m}{2}\right)y$, 得到$y=\left(\frac{2}{m}\right)z$. 于是 z 的密度函数 $h(z)$ 是

$$h(z)=\frac{1}{\sqrt{2m}}\frac{1}{\sqrt{k+z}},\qquad \left(-\frac{mC}{2}+\frac{m}{8},\ \frac{mC}{2}+\frac{m}{8}\right)$$

其中$k=\frac{mC^2}{2}$.

6.4 单调减函数的密度函数

如 y 是一个单调减函数,且当 $x=a$ 时 $y=b$,则

$$P(y \leqslant b) = P(x \geqslant a)$$

因此，根据上述的假设和记号，

$$G(b) = 1 - F(a)$$

$$g(b) = -f[\phi(b)]\frac{d\phi(b)}{db} \tag{6.4}$$

但如 y 是 x 的单调减函数，则 $\phi(y)$ 同样是 y 的单调减函数. 从而 $\frac{d\phi(b)}{db}$ 总为负，又因 $-\frac{d\phi(b)}{db}$ 总为正，可以把它当作导数的绝对值. 因此，$g(b)$ 的方程可改写为 $g(b) = f[\phi(b)]\left|\frac{d\phi(b)}{db}\right|$，一般则有

$$g(y) = f[\phi(y)]\left|\frac{d\phi(y)}{dy}\right| \tag{6.5}$$

注意方程(6.5)对单调增和单调减的情况都同样适用.

例 6.3 考虑函数 $y = \frac{1}{x}$，其中 x 分布如下：

$$f(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}, \qquad (0, \infty)$$

此处 $x = \frac{1}{y}$，$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{y^2}$，且

$$g(y) = \frac{\frac{6}{y}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^4}\frac{1}{y^2} = \frac{6y}{(1+y)^4}$$

因为 $x \to \infty$ 时 $y \to 0$；$x \to 0$ 时 $y \to \infty$，y 的变域是 $(0, \infty)$；我们不说 $(\infty, 0)$，这是因为我们感兴趣的是 y 的分布，而任何变量的变域常表示为它的最低值到最高值的区间. 在这个例子中，我们得到颇不寻常的结果，即一个变量的倒数和它自己具有同样形式的分布(图 6.4)：

$$g(y) = \frac{6y}{(1+y)^4}, \qquad (0, \infty)$$

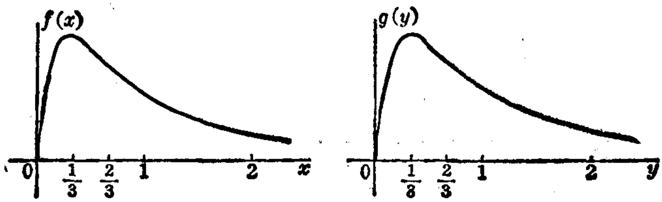


图 6.4

例 6.4 x 是具有参数 μ_1, σ_1 的正态分布，y 是 x 的线性函数，如 $y=a+bx$. 如果系数 b 为 0，则线性函数退化为常量，我们排除这个平凡的情况. 对 b 的非零值，如果 b 是正值，则函数单调增加；如果 b 是负值，则函数单调减少. 在任何一种情形中都有

$$x=\frac{y-a}{b},\ \left|\frac{dx}{dy}\right|=\frac{1}{|b|}$$

在 x 的密度函数

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\qquad (-\infty,\infty)$$

中，须用 y 表示 x 再乘以 $\frac{1}{|b|}$. 于是

$$x-\mu_1=\frac{y-a-b\mu_1}{b},\ \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}=\frac{(y-a-b\mu_1)^2}{2b^2\sigma_1^2}=\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

其中 $\mu=a+b\mu_1, \sigma=|b|\sigma_1$. 相应地,

$$g(y)=\frac{1}{|b|}\ \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ (-\infty,\infty)$$

因为常数乘无穷大仍是无穷大，故 y 的变域是 $(-\infty,\infty)$，因此就证明了：一个正态变量的任何非平凡线性函数是正态分布的.

这个结果十分重要，值得正式表述为定理

定理 6.1 如果 x 服从正态分布，具有参数 μ_1, σ_1，且 y 是任

一线性函数 $y=a+bx(b\neq 0)$，则 y 服从正态分布，具有相应参数 $\mu=a+b\mu_1, \sigma=|b|\sigma_1$.

6.5 概率变换

分布理论中十分重要的一个变量代换是所谓概率变换，它由方程 $y=F(x)$ 定义，其中 $F(x)$ 是 x 的分布函数. 这个变换对所有分布都存在，而且当概率密度函数存在时，它具有矩形分布的有趣性质. 从定义看，显然 y 的变域是从 0 到 1，在 $f(x)$ 存在的情况下有

$$\frac{dy}{dx}=f(x), \qquad \frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x)}$$

从而

$$g(y)=\frac{f(x)}{f(x)}=1, \qquad 0\leqslant y\leqslant 1 \tag{6.6}$$

概率变换在任何一对具有概率密度的分布之间建立了一个理论上的联系. 理论上，任何存在概率密度的分布都能变成任一其他的分布，方法是对每一个施行概率变换，从而使两随机变量成为一一对应. 这个变换的价值在于如下事实：原始变量的分布不适合于某些类型的标准统计分析，可以通过一定的变换，代之以从它导出的另一变量，使新的变量具有满足一定条件的分布，在这些条件下可以使用所拟的分析方法. 即使分布函数不能表示为随机变量的值的紧凑的显函数，仍能用数值积分法得出它的表格形式，于是变换就以表格的形式对相等的分布函数的选定值给出两个变量的对应值.

例 6.5 给定 $f(x)=6x(1-x)$，$(0,1)$，求 x 的函数 y，使之具有密度 $g(y)=3(1-\sqrt{y})$，$(0,1)$. x 和 y 的分布函数分别是

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx=3x^2-2x^3$$

$$G(y)=\int_0^y g(y)\,dy=3y-2y^{\frac{3}{2}}$$

令 $G(y)=F(x)$ 得到

$$3y-2y^{\frac{3}{2}}=3x^2-2x^3$$

因为要使之恒等,解是唯一的,凭观察可得 $y=x^2$.

(建议做习题 6.1 至 6.4)

6.6 平方与绝对值的密度函数

如果 y 不是 x 的单调函数，上述公式就不能成立．我们将要考虑两种重要情况，同时说明在变量不是单调变化的所有情况中的一般方法．首先令 $y=x^2$．于是 $x=\pm\sqrt{y}$，和

$$G(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x)\,dx$$

将定积分微分,即得 $y=x^2$ 的密度函数:

$$g(y)=\frac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} \tag{6.7a}$$

其次，令 $y=|x|$ 于是,

$$G(y)=\int_{-|x|}^{|x|} f(x)\,dx=\int_{-y}^{y} f(x)\,dx$$

$y=|x|$ 的密度函数:

$$g(y)=f(y)+f(-y) \tag{6.7b}$$

例 6.6 令 $y=x^2$ 以及

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (-\infty,\infty)$$

则 $f(\sqrt{y})=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})e^{-\frac{y}{2}}=f(-\sqrt{y})$,于是

$$g(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, \qquad (0,\infty)$$

x 如前，再令 $z=|x|$，则 $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}=f(-z)$ 以及

$$g(z)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}, \qquad (0,\infty)$$

例6.7 在变域 $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ 上，x 是矩形分布的，即

$$f(x)=\frac{1}{2}, \qquad \left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

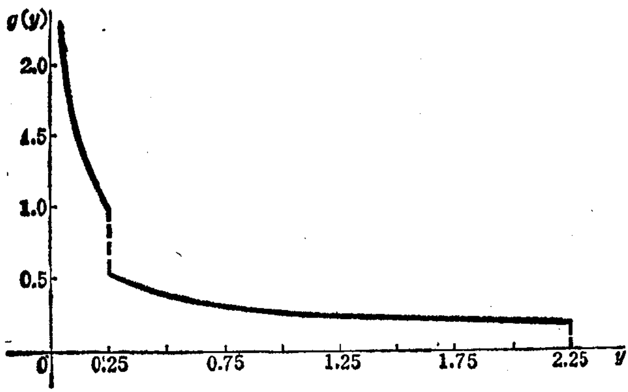


图 6.5

且 $y=x^2$．y 的总变域是从 0 到 $\frac{9}{4}$，但是 x 的负值截止于 $-\frac{1}{2}$，这个事实意味着 y 一旦超过 $\frac{1}{4}$，$f(-\sqrt{y})$ 就恒等于0，所以必须区别两个变域：变域 1 $\left(0\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}\right)$

$$g(y)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$$

变域 2 $\left(\frac{1}{4}<y\leqslant\frac{9}{4}\right)$

$$g(y)=\frac{0+\frac{1}{2}}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}}$$

因此 y 的分布(图 6.5)在 $y=\frac{1}{4}$ 处间断. y 的完整分布可将两方程串起来表示.

$$g(y)=\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}},\qquad 0\leqslant y\leqslant\frac{1}{4}$$

$$g(y)=\frac{1}{4}y^{-\frac{1}{2}},\qquad \frac{1}{4}<y\leqslant\frac{9}{4}$$

(建议做习题6.5 至 6.7)

6.7 多元函数的分布

大部分的导出分布不只涉及一个简单的变量代换. 说得更典型一些,我们感兴趣的是这样的变量,它不能直接度量,但能用数学方法将它构造成可直接度量的变量的函数(如和、积、商). 这样就要考虑一个多维空间. 我们暂时限于二维分析. 然而,其一般原理可应用于任何维数.

考虑分别具有边缘密度函数 $f_1(x)$ 和$f_2(y)$的两个独立变量x, y. 假设它们的联合密度函数$f(x, y)$等于它们的边缘密度函数的乘积,即 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$. 令 u 是 x 和 y 的单调函数,意即当y固定时 u 表现为 x 的单调函数,而当 x 固定时则 u 是 y 的单调函数,如 $u=x+y$, $u=xy$, $u=\frac{x}{y}$, $u=ye^{-x}$. 为了得到 u 的分布,我们想象初始变量 x, y 中的一个固定于某任意值,而另一个按它自己的边缘分布在其可能变域内变化. 为了明确起见,假定 x 固定, y 自由变动. 由此得出的 u 的概率分布按定义是 u 对 x 的条件分布.