工程和科学的

矩 阵 算 法

英 Alan Jennings 著

胡冠章 戴一奇 译

清华大学出版社

内 容 简 介

本书对矩阵的计算方法作了系统的介绍，包括近代的一些方法，如用图论方法处理稀疏矩阵等。叙述浅近易懂，注重实际应用，适合工程技术和科学工作者以及数学工作者学习和参考，也可作为“计算方法”课程的教学参考书。

Matrix Computation for Engineers and Scientists
John Wiley and Son 1977

工程与科学的

矩 阵 算 法

[英] Alan Jennings 著

胡冠章 戴一奇 译

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 • 各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/16 印张：15 3/4 字数：403 千字

1985 年 12 月第一版 1985 年 12 月第一次印刷

印数：00001~10,000

统一书号：15235·191 定价：3.20 元

目　　录

第一章　基本的代数与数值概念

1.1 什么是矩阵

我们把元素排成矩形的阵列来表示一个矩阵。例如

$$A=\begin{pmatrix}2&0&5&1&0\\1&3&1&3&1\\3&2&4&6&0\end{pmatrix}\tag{1.1}$$

就是一个 3×5 阶的矩阵，因为它有三行和五列。矩阵的元素可以用多种形式来表示。在矩阵（1.1）中，它们都是非负整数。它们也可以是实数或复数，或代数表达式，或者象 1.15 节所限定的那样，它们可以是矩阵本身或矩阵表达式。矩阵中诸元素的物理意义并不要求相同，如果一个元素是距离量，并不意味着其它元素也必须是距离量。因此，矩阵的来源十分广泛，有各种不同的形式。矩阵的计算只涉及具有数值形式元素的矩阵。但是具有代数形式元素的矩阵在对其性质和计算过程的理论研究中是有意义的。

矩阵（1.1）可以表示三个小孩所拿不同硬币的数目。列表示 5 种不同的硬币（1,2,5, 10 和 50 便士），行表示小孩，这样可以按照表 1.1

表 1.1　矩阵（1.1）的一种解释

	硬	币	(便士)		
	1	2	5	10	50
Tom	2	0	5	1	0
Dick	1	3	1	3	1
Harry	3	2	4	6	0

来解释矩阵 A。任何一个信息表都可以看作是用方括号括住这些数据的一个矩阵。另外还需要有一种矩阵代数规则，它能够使矩阵之间进行运算，否则这种表示就没有什么意义。在叙述矩阵代数的基本规则之前，先介绍确定矩阵中任意元素的方法。一般对 $m\times n$ 阶的矩阵 A，我们用 1，2，…，m 依次表示它的行，用 1，2，…，n 表示列，于是称 A 的第 i 行第 j 列的元素为 a_{ij}。

如果 $m=n$，称该矩阵为方阵。

1.2 矩阵方程

矩阵代数最基本的关系就是矩阵相等。仅当两个矩阵有同样的阶数；而且对应元素都相等时，称该两矩阵相等。等式（1.1）就是一个矩阵方程。它隐含了确定每个元素 a_{ij} 的

$m\times n$ 个通常的方程，例如 $a_{34}=6$。由单个矩阵方程来表示多个一般方程就是矩阵方法的主要功能。这与行列式的相等是完全不同的，比如在

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

方程中，并没有确定元素 a_{11}，a_{12}，a_{21} 和 a_{22}，而只是给定了它们之间的关系。

若两个矩阵具有相同的阶数，则可以将对应元素相加来进行矩阵的加法。如果表 1.1表示 Tom，Dick 和 Harry 在某天的初始经济情况，而表 1.2 表示在这一天他们的收入和支出，它可以用矩阵 $\mathbf{H}$ 来表示，则该天最后的经济情况为矩阵

$$\mathbf{G}=\mathbf{A}+\mathbf{H}$$

即

$$\mathbf{G}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 5 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

表 1.2　收入及支出（负数表示支出）

	硬币（便士）				
	1	2	5	10	50
Tom	−2	1	2	−1	0
Dick	0	0	2	3	−1
Harry	−1	2	3	−1	0

类似地可以定义矩阵的减法。矩阵的数量乘积是该矩阵的所有元素都乘以该数。例如，由上述定义，一个矩阵方程

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mu\mathbf{C}-\mathbf{D} \tag{1.4}$$

其中 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{C}$ 和 $\mathbf{D}$ 都是 3×2 阶矩阵，μ 是某个数量。该方程等价于 6 个简单的线性方程：

$$a_{ij}=b_{ij}+\mu c_{ij}-d_{ij} \tag{1.5}$$

1.3　矩　阵　乘　法

如果第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数，则这两个矩阵便可以相乘。在这种情况下称它们是可相乘的。如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的阶是 $m\times p$，它被阶数为 $p\times n$ 的矩阵 $\mathbf{B}$ 相乘，则积为

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB} \tag{1.6}$$

$\mathbf{C}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，其典型元素是

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj} \tag{1.7}$$

设 A 是（1.1）式，且

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&5\\1&10\\1&50\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

则乘积矩阵 C 为

$$\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\\c_{31}&c_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&5&1&0\\1&3&1&3&1\\ \boxed{3\quad 2\quad 4\quad 6\quad 0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}&\begin{matrix}1\\2\\5\\10\\50\end{matrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&37\\9&92\\ \boxed{15}&87\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

元素 c_{ij} 是由 A 的第 i 行和 B 的第 j 列的对应元素相乘后求和而得。（1.9）式中的方框说明了计算 c_{31} 时的有关元素。B 的选择是使 C 的第一列为每个小孩所拿硬币的总数，第二列是这些硬币的总值（按便士计）。

一般说来，矩阵乘积 AB 不等于 BA，因此相乘时它们的次序不能颠倒（甚至 BA 不能相乘）。因此“A 乘以 B”这种说法是不恰当的，而应该说 A 右乘以 B 或 B 左乘以 A。除非 A 或 B 包括了零元素，否则由方程(1.6)来计算矩阵 C 需要的乘法次数是 $m\times p\times n$，并需要几乎同样多次的加法。所以当 m，p 和 n 都很大时，矩阵乘法要包含大量的计算。

如果用手算完成两个大矩阵的相乘，为了避免出错增加一个检查过程是可取的。它可以由 A 中增加一行本列的和，在 B 中增加一列本行的和来实现。结果矩阵 C 中将包含行和以及列和检查，它能查出计算中的错误。采用该检查过程，方程（1.9）就成为

$$\begin{array}{c}\\ \\ \\ \\ \Sigma\end{array}\begin{pmatrix}2&0&5&1&0\\1&3&1&3&1\\3&2&4&6&0\\ \hdashline 6&5&10&10&1\end{pmatrix}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&&\Sigma\end{array}\\ \begin{pmatrix}1&1&\vdots&2\\1&2&\vdots&3\\1&5&\vdots&6\\1&10&\vdots&11\\1&50&\vdots&51\end{pmatrix}\end{array}=\begin{array}{c}\\ \\ \\ \Sigma\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}&&\Sigma\end{array}\\ \begin{pmatrix}8&37&\vdots&45\\9&92&\vdots&101\\15&87&\vdots&102\\ \hdashline 32&216&\vdots&248\end{pmatrix}\end{array} \tag{1.10}$$

多重乘积

若 $m\times n$ 阶矩阵 C（方程 1.6）再左乘一个 $r\times m$ 阶的矩阵 D，则乘积 F 可表示为

$$\underset{r\times n}{[F]}=\underset{r\times m}{[D]}\left(\underset{m\times p}{[A]}\ \underset{p\times n}{[B]}\right) \tag{1.11}$$

可以验证，如果先计算 DA，再右乘以 B，也会得到同样的结果。因此多重相乘时括号可以省去，结果方程（1.11）写作

$$F=DAB \tag{1.12}$$

D(AB)与（DA)B 的值相同，这是很重要的。因为在数值计算中乘法的计算顺序有时具有举足轻重的作用。例如，若 D 和 A 的阶是 100×100，而 B 的阶是 100×1，则（DA）B 的乘法总次数是 1,010,000，而 D（AB)却只有 20,000。所以先计算 AB 相乘大约要快 50 倍！如果用手算的话，在计算者意识到要花费更多的计算时间之后，就会先去计算 AB。但是使用计算机来计算时，如果程序中没有这方面的检测，就仍然可能采用不好的方法。表面上看起来，这似乎只是延长了计算时间，但实际上它还很可能使计算结果的精度由于较大的舍入误差积累而变差（见 3.2 节）。

若 A 和 B 如方程（1.9），D=[1 1 1]，则

$$F=[1\ \ 1\ \ 1]\begin{pmatrix}2&0&5&1&0\\1&3&1&3&1\\3&2&4&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&5\\1&10\\1&50\end{pmatrix}=[32\quad 216] \tag{1.13}$$

它的第一个元素 $f_{11}=32$，表示这些孩子一共有 32 枚硬币，第二个元素 $f_{12}=216$，表示它们的总值是 216 便士。

1.4 某些特殊的矩阵

行和列矩阵

通常把行矩阵称为行向量，列矩阵称为列向量。为方便起见，一个列向量经常采用横写而不用竖写方法，这时，就不使用方括号而使用花括号 { }。

零矩阵

符号 0 表示全部元素都是零的矩阵，使用它的一个例子是方程

$$A-B-\mu C+D=0 \tag{1.14}$$

它恰好是方程（1.4）的另一种形式。

对角矩阵

一个方阵的非零元素只出现在主对角线上，即在 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，则称该矩阵是对角矩阵。对角矩阵的重要性质是它能用来对行或列进行变换。用一可相乘对角阵左乘一个矩阵，其结果就是用对角阵中的相应元素去乘该矩阵的每一行

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \\ a_{33}b_{31} & a_{33}b_{32} \end{pmatrix}
\tag{1.15}
$$

类似地，矩阵右乘一个可相乘对角阵，是用该对角阵中的相应元素去乘该矩阵的每一列。作为规定，对角阵中非对角的零元素可以不写。有时也把对角矩阵写作 $\lceil a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \rfloor$。

单位矩阵

如果一个对角矩阵的全部对角元都是 1，就称为单位矩阵，用 $\mathbf{I}$ 表示。单位矩阵的阶数假定与原矩阵或与它所关联的矩阵可相乘。由对角矩阵的性质立刻可知，单位矩阵左乘或右乘某一矩阵，该矩阵不变。即

$$
\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{1.16}
$$

三角矩阵

三角矩阵分为下三角矩阵和上三角矩阵。下三角矩阵是主对角元以上的元素都为零的方阵。类似地，上三角矩阵中主对角元以下的元素都为零。三角矩阵的一个性质是两个相同三角矩阵之积仍是同样的三角矩阵，即

$$
\begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 2 & & \\ 1 & -1 & \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 2 & & \\ 5 & -1 & \\ -5 & -2 & -1 \end{pmatrix}
\tag{1.17}
$$

满矩阵和稀疏矩阵

如果一个矩阵的元素都是非零元，就叫它是满矩阵；若只有少量的非零元，则称它是稀疏矩阵。

1.5 矩阵的转置和对称性

一个矩阵的转置矩阵由对换原矩阵的行和列而得到，即第 i 行变成第 i 列，第 j 列变成第 j 行。如果矩阵是矩形的，其转置矩阵的阶数就颠倒过来。矩阵（1.1）的转置是

$$
\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\tag{1.18}
$$

若一个方阵对于主对角线对称，即对所有的 i 和 j，都有 $a_{ij} = a_{ji}$，就称该方阵为对称矩阵。对称矩阵的转置仍是它自身。在守恒系统和最小二乘问题的分析时经常出现对称矩阵，在数值计算时也常常利用对称性质。

如果矩阵 $\mathbf{A}$ 中 $a_{ij} = -a_{ji}$，且主对角元 $a_{ii} = 0$，就称它是反（或斜）对称矩阵，因此 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$。任何方阵都可以分为一个对称的和一个反对称的矩阵之和，于是

$$\mathbf{A}=1/2(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)+1/2(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T) \tag{1.19}$$

这里 $1/2(\mathbf{A}+\mathbf{A}^T)$是对称的，$1/2(\mathbf{A}-\mathbf{A}^T)$是反对称的。

当矩阵中某些元素是复数时，Hermite 转置是一个重要概念。它是将原矩阵中每个元素取其共轭复数，然后再与普通矩阵一样转置。例如若

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5+i & 2-i & 1\\ 6i & 4 & 9-i\end{bmatrix} \tag{1.20}$$

则

$$\mathbf{A}^H=\begin{pmatrix}5-i & -6i\\ 2+i & 4\\ 1 & 9+i\end{pmatrix} \tag{1.21}$$

如果是一个方阵有 $\mathbf{A}^H=\mathbf{A}$，则叫它是 Hermite 矩阵。若将它写成 $\mathbf{A}=\mathbf{C}+i\mathbf{D}$ 的形式，则必定 $\mathbf{C}$ 是对称的，$\mathbf{D}$ 是反对称的。

内积

两个列向量 $\mathbf{x}=\{x_1\ x_2\ \cdots\ x_n\}$，$\mathbf{y}=\{y_1\ y_2\ \cdots\ y_n\}$，在 $\mathbf{x}$ 转置后进行相乘时，结果为一个数量

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{1.22}$$

称之为内积。一个列向量同它自身的内积，即

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i{}^2 \tag{1.23}$$

当 $\mathbf{x}$ 是实向量时它必定是正数（对复向量 $\mathbf{x}$，只要 $\mathbf{x}$ 非零，$\mathbf{x}^H\mathbf{x}$ 就一定是正的）。

1.6 矩阵的行列式

一个方阵有它的行列式值，它由下面的逆归公式得到

$$|\mathbf{A}|=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}-\cdots-(-1)^n a_{1n}M_{1n} \tag{1.24}$$

其中 M_{11} 是该矩阵去掉第一行第一列后的行列式，M_{12} 是去掉第一行第二列后的行列式，等等（注意 1×1 阶矩阵的行列式值正好等于该元素）。因此

$$\left.\begin{aligned}&\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\\ &\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})\\ &\qquad\qquad\qquad +a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

（1.24）式是按第一行展开的，如果不用第一行，而用其它任意的行或列，按不同的次序重新整理各项也可以展开该行列式。这里不再给出行列式的若干重要性质，但是要强调一

下，若矩阵行列式中有一行（或列）的元素全为零或者它是其余某些行（或列）的线性组合，则该行列式的值为零。例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

存在着线性关系(第三行) = -(第一行) + 2(第二行)或(第三列) = 4(第一列) - 8(第二列)，因此该行列式的值为零。

1.7 线性方程组的求解

n 个线性方程

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

可以写成矩阵形式

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 阶的系数矩阵，$\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{b}$ 分别是变元和右端项的列向量。求解这种类型方程组是解决大量问题的关键运算。

Cramer（克莱姆）法则以行列式的形式给出了线性方程组的解。例如对三个线性方程的集合，有

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \\ x_3&=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

不过和消去法比较起来，用 Cramer 法则求解方程组不但计算量大，而且难于在计算机上实现，但它指出了对任意方程组，当 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 时它有唯一解。我们把行列式值为零的方阵叫做奇异矩阵，求解具有奇异的或接近奇异的系数矩阵方程组，还要专门进行讨论。

1.8 高斯消去法和主元消去法

不论用手算还是用计算机计算，消去法都是求解线性方程组最重要的方法，当然它要求方程数目不能很大，最基本的消去法是 Gauss（高斯）提出的。考虑方程组

$$
\left.\begin{aligned}
10x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\
-20x_1 + 3x_2 + 20x_3 &= 2 \\
5x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 6
\end{aligned}\right\} \tag{1.28}
$$

可以用另一个方程组来取代它，其中某些方程已进行了数乘运算或线性组合。比如第一个方程乘以 20/10 加到第二个方程上，便消去了第二个方程 x_1 的系数。类似地，第三个方程减去第一个方程的 5/10 倍，也消去了它的 x_1 的系数。方程组修改为

$$
\left.\begin{aligned}
10x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\
5x_2 + 10x_3 &= 4 \\
2.5x_2 + 7.5x_3 &= 5.5
\end{aligned}\right\} \tag{1.29}
$$

这时第三个方程再减去第二个方程的 2.5/5 倍，便消去了它 x_2 的系数

$$
\left.\begin{aligned}
10x_1 + x_2 - 5x_3 &= 1 \\
5x_2 + 10x_3 &= 4 \\
2.5x_3 &= 3.5
\end{aligned}\right\} \tag{1.30}
$$

至此方程组已变换为其系数矩阵是三角矩阵的形式。用相反的次序回代就可以求得诸变量的值。即

$$
\left.\begin{aligned}
x_3 &= \frac{3.5}{2.5} = 1.4 \\
x_2 &= \frac{4 - 10x_3}{5} = -2 \\
x_1 &= \frac{1 - x_2 + 5x_3}{10} = 1
\end{aligned}\right\} \tag{1.31}
$$

计算过程中虽然出现了许多新的方程，但如果确定的“主元”都是非零的话，则它完全是自动的。在方程组（1.28），(1.29)及（1.30）中，主元都用斜体字来表示，在进行数乘以及回代时它们都作为分母出现。除了事先已经知道主元不会是零以外，在其它情况下都要依据选取的主元一定非零的原则来修改消去过程。在所有元素都可以当作主元时，则每一步约简中我们选择绝对值最大的元素作为主元。它不但确保主元非零（除非系数矩阵是奇异的），而且使数乘因子的模小于等于 1 。

如果用主元消去法解方程（1.28），那么头一个主元必是第二个方程 x_1 或 x_3 的系数。假定选中 x_3 的系数，则消去其余方程 x_3 的系数后得到

$$
\left.\begin{aligned}
5x_1 + 1.75x_2 \qquad\qquad &= 1.5 \\
-20x_1 + 3x_2 + 20x_3 &= 2 \\
10x_1 + 2.25x_2 \qquad\qquad &= 5.5
\end{aligned}\right\} \tag{1.32}
$$

下一个主元必须从（1.32）的第一个或第三个方程中去选择，因此选中第三个方程中 x_1 的系数，产生约简了的方程组

$$\left.\begin{aligned} 0.625x_2 \qquad\qquad &= -1.25 \\ -20x_1 + \quad 3x_2 \quad + 20x_3 &= 2 \\ 10x_1 + 2.25x_2 \qquad\qquad &= 5.5 \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

现在按 x_2，x_1，x_3 的顺序可完成回代。

主元选择的另一个做法是在选择主元时与前面一样，但是在选好之后就将它们移到主对角线位置，使得约简后的方程组保持为三角形形式。为了使（1.28）中第二个方程的 x_3 放到主对角位置，就要把第一个和第二个方程对调，同时把 x_1 和 x_3 对换，得到

$$\left.\begin{aligned} 20x_3 + 3x_2 - 20x_1 &= 2 \\ -5x_3 + x_2 + 10x_1 &= 1 \\ 5x_3 + 3x_2 + 5x_1 &= 6 \end{aligned}\right\} \tag{1.34}$$

它约简为

$$\left.\begin{aligned} 20x_3 + 3x_2 - 20x_1 &= 2 \\ 1.75x_2 + 5x_1 &= 1.5 \\ 2.25x_2 + 10x_1 &= 5.5 \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

因为第三个方程中 x_1 的系数是下一个主元，所以第二个和第三个方程以及 x_1 和 x_2 也要对调，得到

$$\left.\begin{aligned} 20x_3 - 20x_1 \quad + 3x_2 &= 2 \\ 10x_1 + 2.25x_2 &= 5 \\ 5x_1 + 1.75x_2 &= 1.5 \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

这样可以消去第三个方程中 x_1 的系数，得到一个便于回代的三角形方程组。

1.9 多重右端项的方程组

两个线性方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} &= b_{11} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} &= b_{21} \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} &= b_{31} \end{aligned}\right.$$

和

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} + a_{13}x_{32} &= b_{12} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{32} &= b_{22} \\ a_{31}x_{12} + a_{32}x_{22} + a_{33}x_{32} &= b_{32} \end{aligned}\right\} \tag{1.37}$$

它们有相同的系数矩阵，但右端项不一样。其不同的解集可记为 $\{x_{11}\ \ x_{21}\ \ x_{31}\}$ 和 $\{x_{12}\ \ x_{22}\ \ x_{32}\}$，它们可以很方便地用一个矩阵方程来表示

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

一般，矩阵方程

$$\mathbf{AX}=\mathbf{B} \tag{1.39}$$

可表示m个线性方程组的集合，其中每一个方程组都以$\mathbf{A}(n\times n)$作为其系数矩阵。右端项$\mathbf{B}$是由列向量组成的$n\times m$阶矩阵。联合求解这个方程组的集合是合算的，因为虽然它包含了许多方程组，但是把系数矩阵约简为三角矩阵的运算只需要一次。经过一系列高斯消去运算，方程（1.39）能约简为

$$\mathbf{UX}=\mathbf{Y} \tag{1.40}$$

其中$\mathbf{U}$是上三角阵，$\mathbf{Y}$是修改了的右端矩阵。然后经过一系列的运算（与回代过程相对应），得到如下形式

$$\mathbf{IX}=\mathbf{X} \tag{1.41}$$

比如方程组（1.28）还有另一个右端项{1 7 6}，可以用一系列的行运算约简到方程（1.41)形式，该过程如表 1.3 所示。表中还包括了一列本行的和，如果对该列与其它列同样地进行计算，那么它起到了算术检查的作用。当左端已变换为单位矩阵时，右端的诸列就是方程组的解。

求解所有系数均为非零的多重方程组时，所需的乘除法运算次数如表 1.4 所示。当$\mathbf{A}$为对称矩阵时，如果不需要主元选择，则左端项的运算可以节省。由于计算量与n的的立方成正比，因此用消去法求解高阶满矩阵在实际上是不可行的。对于手算来说，其限度是 10～20 个方程，对计算机来说，大致在 100～2000 个方程左右，这要取决于机器的类型。

表 1.3 两个右端项的三元一次方程组的高斯消去法

步骤	行运算	左端项	右端项	Σ
初始方程组		$\begin{pmatrix}10 & 1 & -5\\ -20 & 3 & 20\\ 5 & 3 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 7\\ 6 & 6\end{pmatrix}$	8 12 25
消去第一列	第一行不变 （第二行）+2（第一行） （第三行）−0.5(第一行）	$\begin{pmatrix}10 & 1 & -5\\ & 5 & 10\\ & 2.5 & 7.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 9\\ 5.5 & 5.5\end{pmatrix}$	8 28 21
三角形式	第一行不变 第二行不变 （第三行）−0.5（第二行）	$\begin{pmatrix}10 & 1 & -5\\ & 5 & 10\\ & & 2.5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 9\\ 3.5 & 1\end{pmatrix}$	8 28 7
按 3，2，1 行次序回代	0.1{(第一行)−(新第二行)+5(新第三行)} 0.2(第二行)−10(新第三行) 0.4（第三行）	$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0.2\\ -2 & 1\\ 1.4 & 0.4\end{pmatrix}$	2.2 0 2.8