交流电机磁场的有限元分析

陈世元　编著

哈尔滨工程大学出版社

交流电机磁场的有限元分析

陈世元　　编著

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

全书共分五章，主要包括电磁场基本方程，有限元方法的实施，凸极同步电机气隙磁场的计算，水轮发电机稳态运行性能和参数的计算，感应电机空载和起动性能的计算，有关向量分析的一些数学公式等内容。可作为高等院校电机及其控制专业的研究生教材，也可供有关电机工程的技术人员及教学科研人员作为参考用书。

交流电机磁场的有限元分析
JIAOLIU DIANJI CICHANG DE YOUXIANYUAN FENXI
陈世元 编著
汤蕴璆 审
郜殿英 责任编辑
*
哈尔滨工程大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
哈尔滨理工大学东区印刷厂印刷
*
开本787mm×1092mm 1/32 印张8.25 插页5 字数180千字
1998年3月第1版 1998年3月第1次印刷
印数：1～1000册
ISBN 7－81007－841－0
TM·13 定价：15.00元

前　　言

本书是作者根据多年的教学实践和科研成果编写而成，可作为高等院校电机及其控制专业的研究生教材，也可供有关电机工程的技术人员及教学科研人员作为参考用书。

全书共分五章，主要包括电磁场基本方程，有限元方法的实施，凸极同步电机气隙磁场的计算，水轮发电机稳态运行性能和参数的计算，感应电机空载和起动性能的计算等，附录中列出了有关向量分析的一些数学公式。

汤蕴璆教授对本书作了仔细审阅。

本书在出版中得到哈尔滨理工大学电机教研室的大力支持，高宝兰、于滋润和李伟力、周封、迟立明、刘伟等同志的热心帮助。作者在此表示深切的谢意。

由于作者水平有限，书中难免存在缺点和错误，敬请读者提出批评指正。

作　者

1998年3月1日于哈尔滨

目　　录

绪　论

电机是一种电磁机械能量转换装置。在电机中，无论是电能转换成机械能，还是机械能转换成电能，都必须要有磁场（或电场）作为耦合场。因此，要研究旋转电机内能量转换的机制，必须对电机内的磁场分布有清楚的了解。研究电机内的电磁场对设计一台性能良好的电机具有重要的意义，尤其是大型同步发电机。

现有的电机设计程序都是按路的观点进行计算的，就是把复杂分布的电磁场简化为磁路，然后进行计算。这种方法并不是任何情况下都可以得出满意的结果。例如异步电机的主磁场和槽漏磁场等可以简化成磁路进行计算；而端部磁场、齿顶漏磁场等则不能实行简化处理。这是因为前者磁通比较集中，方向一致，分布较为均匀；后者则比较分散，分布很不均匀。前者简化成磁路来处理时，与实际情况仍有一定的差别。如主磁通通过定、转子轭部时，分布往往不是很均匀。又如槽漏磁场，通常假定磁场平行于槽底，这对开口矩形槽比较接近，但对梯形槽和圆形槽则有差异，对凸形槽和刀形槽相差更大。因此，往往要加以修正。

自从电机这门学科建立以来，过去一直用路的方法来设计电机。60年代后期，科学技术迅速发展，对电机的质量、生产周期要求日益提高，这就要求电机设计的精度越来越高。在力学的计算上出现了有限元等先进的数值计算法，在计算

手段上出现了电子计算机后，就可以不用简化成路，而用场的方法来直接计算和设计电机。此外也有采用场路结合的方法，即用场的有限元等数值计算来修正以前的曲线，使之提高精度；或局部参数采用场的观点来计算，其它部分还是采用路的方法建立的公式。

本书主要通过大型凸极同步发电机和鼠笼型感应电动机性能的有限元计算来阐明如何用场的方法计算电机的各种性能和参数。

1 电磁场基本理论

随时间而变化的电磁场称为时变电磁场，不随时间变化时称为恒定磁场（或静电场）。如同步电机的主极磁场、极间漏磁场等属于恒定磁场；交流电机定子槽内导体的涡流损耗、实芯转子异步电机内的电磁场问题均属于时变电磁场问题。由于电机中时变电磁场的变化频率很低，电机的线性尺寸比电磁波的波长要小的多，因此位移电流可以忽略不计，这种场称为准稳电磁场。电机中的电磁场问题一般为恒定磁场和准稳电磁场问题。本章主要介绍时变电磁场的基本定律，而恒定磁场则是其特殊情况。

1.1 基本方程

磁场的分布可用磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 或磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 来描述，电场的分布可用电位移 $\boldsymbol{D}$ 或电场强度 $\boldsymbol{E}$ 来描述；它们都是空间的函数。当电磁场随时间变化时，它们既是空间函数又是时间函数；且电场和磁场之间不是彼此独立、而有一定联系。

1.1.1 安培环路定律和麦克斯韦第一方程

在恒定磁场中，磁场强度$\boldsymbol{H}$沿任意闭合回线C的线积分值，恰好等于通过以回线C作为边缘的曲面S上的全电流值，这个定律就称为安培环路定律，如图1-1所示。用数学

形式表示为，

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-1}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 为通过面积 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 处的电流密度向量，面积分表示通过曲面 S 的全电流值；回线 C 的正方向与曲面 S 的正方向之间符合右手螺旋关系。

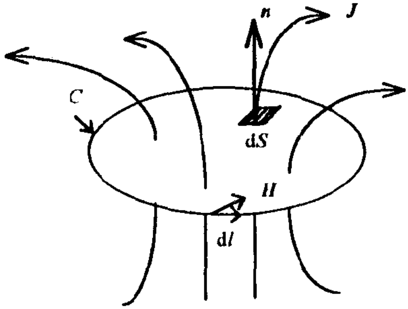

图1-1　安培环路定律

式(1-1)是安培环路定律的积分形式。在研究磁场问题时，常需知道磁场中任意一点的$\boldsymbol{H}$值，因此应设法找出与式(1-1)相当的微分形式。

利用向量分析中的斯托克斯(Stokes)定理，即

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可得

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-2}$$

由于上式对任意闭合回线C以及把C作为边缘的任意曲面S都成立，所以等式左、右积分号内的被积函数应该相等；即

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{1-3}$$

此式就是安培环路定律的微分形式，与式(1-1)相当。式(1-3)说明磁场强度的旋度就等于该点的电流密度。

对式(1-3)取散度，可得

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{H})=\operatorname{div}\boldsymbol{J}$$

由向量分析可知，旋度场的散度恒等于零。在恒定电流下，电流密度$\boldsymbol{J}$的散度亦等于零，所以式(1-3)在恒定电流情况下成立。

若电流密度随时间而变化，根据电荷守恒定律

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1-4}$$

式中ρ为自由电荷密度。式(1-4)表明，此时电流密度$\boldsymbol{J}$的散度一般不再等于零。由于电荷守恒定律是实验验证的普遍规律，所以在电流非恒定的情况下，式(1-3)应加以修改。

根据高斯通量定理$\rho=\operatorname{div}\boldsymbol{D}$，故有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{J}=-\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\boldsymbol{D})$$

或

$$\operatorname{div}\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=0 \tag{1-5}$$

式中电位移随时间的变化率称为位移电流密度。

式(1-5)说明，当电流密度为非恒定时，电流密度与位移电流密度之和的散度总等于零。于是可以把式(1-3)修改成以下形式：

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{1-6}$$

这样修改是否符合客观实际，要由实践来验证。麦克斯韦(Maxwell)引入位移电流的概念以后，推得电磁场的运动具有波动性，并断定电磁波的传播速度等于光速，由此建立了光的电磁说；这些预言后来均被实验所证实。

式(1-6)就称为麦克斯韦第一方程，它是安培环路定律的推广；它告诉我们：不仅电流能激发磁场，随时间变化的电场亦能激发磁场。

1.1.2 电磁感应定律和麦克斯韦第二方程

在静电场的情况下，电场强度$\boldsymbol{E}$沿任意闭合回线C的线积分值等于零，即

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \tag{1-7}$$

利用向量分析中的斯托克斯定理

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

可得

$$\int_S (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

于是

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=0 \tag{1-8}$$

即$\boldsymbol{E}$是一个无旋场。

当磁场随时间变化时，式(1-7)和(1-8)就不再成立，变化的磁场将会引起感应电势。法拉第(Faraday)从实验中总结出：当通过闭合电路中的磁通量$\varPhi$随时间变化时，电路中就会产生感应电流i，如图1-2所示。回路的感应电势为

$$Ri=-\frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1-9}$$

式中R为回路的电阻。由于

$$Ri = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

于是式(1-9)可改写为

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (1\text{-}10)$$

这就是电磁感应定律，也称法拉第定律。

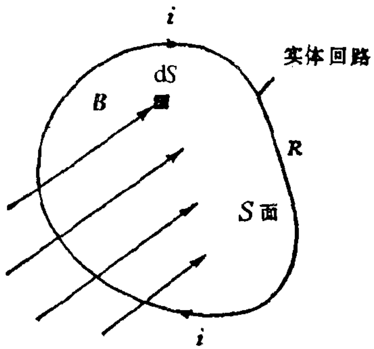

图1-2 法拉第定律

式(1-10)说明，当通过闭合电路中的磁通量发生变化时，回路内就会产生感应电势。根据楞茨定则，感应电流的方向恒为抵制磁通变化的方向；如果感应电势和磁通量的正方向符合右手螺旋关系，则式中有一个负号。

电磁感应定律是从一个具有电阻R的实体回路中总结出来的。实验证明，当所研究的区域内没有实体回路时，式(1-10)仍然成立；即沿任意闭合回线C内$\boldsymbol{E}$的线积分值仍然等于通过以回线C作为边缘的曲面S上的磁通量随时间的变化率。这样就可以把式(1-10)化成微分形式。

在静止媒介质中，磁通量的变化只能由磁感强度$\boldsymbol{B}$的变

化引起的，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_{S}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

于是式(1-10)可写成

$$\oint_{C}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{S}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \qquad (1\text{-}11)$$

再利用向量分析中的斯托克斯定理，可得

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad (1\text{-}12)$$

此式说明，磁场变化时会激发电场；此式就是麦克斯韦第二方程。

1.1.3 磁通连续性定律和麦克斯韦第三方程

分析和实验表明，在恒定磁场中，对空间任意区域，进入闭合曲面S的磁通量与穿出的磁通量恒等；即磁感强度$\boldsymbol{B}$对闭合曲面S的面积分恒等于零，如图1-3所示。

$$\oint_{S}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0 \qquad (1\text{-}13)$$

上式说明，磁通量是处处连续的，无头无尾的。这个定律就称为磁通连续性定律。

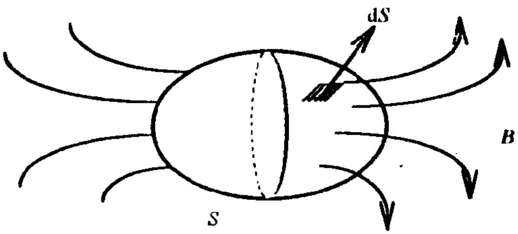

图1-3　磁通连续性定律

式(1-13)是磁通连续性定律的积分形式。利用向量分析中的高斯(Gauss)定理

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\mathrm{div}\ \boldsymbol{B}) \mathrm{d}V$$

可得

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = 0 \tag{1-14}$$

此式就是式(1-13)的微分形式。上式说明磁感强度的散度恒等于零，即$\boldsymbol{B}$是一个无源场。

当电磁场随时间变化时，磁通连续性定律仍然成立。式(1-14)即为麦克斯韦第三方程。

1.1.4 高斯通量定理和麦克斯韦第四方程

在静电场中，对空间任意区域，由闭合曲面S穿出的电位移通量$\boldsymbol{D}$等于该闭合曲面内的自由电荷q，即

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = q \tag{1-15}$$

利用向量分析中的高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V (\mathrm{div}\ \boldsymbol{D}) \cdot \mathrm{d}V$$

可得

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{D} = \rho \tag{1-16}$$

上式与式(1-15)相当，其中ρ为闭合曲面内的自由电荷密度。式(1-16)说明静电场是有源场。

当电磁场随时间变化时，上式仍然成立。式(1-16)称为麦克斯韦第四方程。

1.1.5 麦克斯韦方程组

这样，时变电磁场的变化规律就可以用以下四个方程式表达出来：

$$
\left.\begin{aligned}
\operatorname{rot}\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\operatorname{rot}\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\operatorname{div}\boldsymbol{B} &= 0 \\
\operatorname{div}\boldsymbol{D} &= \rho
\end{aligned}\right\} \tag{1-17}
$$

这四个式子合起来，就称为麦克斯韦方程组。其中第一式和第三式规定了磁场的旋度和散度，第二式和第四式规定了电场的旋度和散度；并且通过第一式和第二式这两个公式把电场和磁场联系了起来，这种联系是电磁场以波动形式运动所必不可少的因素，即所谓“电变生磁，磁变生电”。

1.1.6 成分方程

对于各向同性的媒介质，有关场量之间的关系可表示成

$$
\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} &= \mu \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{J} &= \sigma\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{(e)}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1-18}
$$

上式称为媒介质的成分方程。式中：ε为媒介质的介电常数，σ为导电系数，μ为导磁系数，它们取决于介质的成分和性质；$\boldsymbol{E}^{(e)}$为局外力所产生的电场强度，仅在蓄电池、发电机、电动机内存在。对不存在局外电场强度的区域$\boldsymbol{E}^{(e)}=0$。

磁介质的情况比较复杂。对于各向同性的磁介质，磁感强度$\boldsymbol{B}$与磁场强度$\boldsymbol{H}$为同方向，此时介质的导磁系数μ为一标量。当μ为一常值时，介质为线性；当μ为磁感强度$\boldsymbol{B}$的函数时，介质为非线性。对于各向异性的磁介质，一个方向的磁