成人高等教育自学辅导丛书

常微分方程自学指导

胡 林 主编

谭 鼐 翟连林
史天勤 言 羽 编著

水利电力出版社

成人高等教育自学辅导丛书

常微分方程自学指导

胡　林　主编

谭　鼐　翟连林
史天勤　言　羽　编著

水利电力出版社

内 容 提 要

本书系“成人高等教育自学辅导丛书”之一《常微分方程自学指导》。

本书主要介绍微分方程的基本概念和如何利用初等积分法解一阶微分方程；对一阶微分方程、线性微分方程以及线性微分方程组在理论上作了一些探讨，并介绍了一些求解方法。

本书可作理工、财经类电视大学，职工大学、业余大学、函授大学的教材或辅导书，也可作参加自学高考的自学读本。

成人高等教育自学辅导丛书
常微分方程自学指导
胡 林 主编
谭 鼐 翟连林 史天勤 吉 羽 编著
*
水利电力出版社出版
（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
北京顺义北方印刷厂印刷
*
787×1092毫米 32开本 7.875印张 174千字
1986年6月第一版 1986年6月北京第一次印刷
印数00001—17500册 定价1.70元
书号 7143·6041

前　言

当前，在经济体制改革和新技术革命挑战的形势下，智力开发的重要性更加突出了．我们迫切需要有一支高水平的职工队伍，以加速实现技术现代化、管理现代化，提高经济效益．这就要求在普遍提高职工的政治、文化、技术、业务素质的同时，尽快从现有职工中培养造就大批的专业技术干部和管理干部，形成一支在数量上能基本满足要求，质量上能掌握现代科学技术和经营管理知识，专业配套的职工队伍．可以说，大力加强职工教育，培养各类人才，是摆在我们面前的一项十分重要而又急迫的任务．

这套“成人高等教育自学辅导丛书”就是根据当前加强职工教育的形势和需要而专门组织编写的．

“丛书”以“面向实际，面向生产，为提高职工队伍素质，提高经济效益服务”作为编写指导思想；内容紧密结合成人高等教育理工类（或财经类）部分课程的教学大纲和电视大学及一些函授大学、职工大学、业余大学的教材；在布局、选材、体例和编写形式上尽量适应成人自学的特点．所以，非常适用于理工、财经类电视大学、职工大学、业余大学学员作为学习辅导书，或函授大学作为函授教材；对于广大自学读者，则是帮助他们通过自学高等考试的一种自学读本．

为了切合读者的实际需要，提高学习效果，“丛书”中的每一册都包括基本概念、重点和难点解释、典型例题分

析、总结或提示以及思考与练习等几部分内容，并配有适量的作业测验题（附答案）和电大试题选解.

这套丛书共包括十一门课程，十三册：

高等数学自学指导（上、下册）

线性规划自学指导

线性代数自学指导

概率论与数理统计自学指导

常微分方程自学指导

逻辑代数与BASIC语言自学指导

复变函数自学指导

微积分自学指导（财经类）

普通物理自学指导（上、下册）

普通化学自学指导

物理化学自学指导

本书系《常微分方程自学指导》，共分四章. 第一章给出了微分方程的基本概念，并介绍了如何用初等积分法解一阶微分方程；第二、三、四章对一阶微分方程、线性微分方程和线性微分方程组进行了讨论，并介绍了一些求解方法.

参加这套丛书编写工作的都是有经验的高等学校教师或成人教育工作者，其中有些同志还讲授过电视大学的有关课程或担任过电大辅导课主讲教师. “丛书”融汇了他们多年的教学经验和心德体会，更鲜明地具有电视教学及自学、辅导、函授多用的特色.

在编写过程中，我们得到各课程的有关教授、专家的关怀和指导，有些同志直接参予了审阅、整理等工作，在此一并表示深切的谢意.

组织编写这类面向成人读者，自学、辅导、电教、函授

多用的大专读本还是第一次，欢迎读者对"丛书的内容、布局、结构、形式等提出宝贵意见，以帮助我们改进工作，提高"丛书"质量。

胡林

1985年7月

序

这是一本难得的好教材，它对没有机会进大学或者在电大、函大、职大、夜大学习而缺乏辅导教师的数学爱好者及理工科学员特别适合．本书的编者一直从事数学基础课教学，具有丰富的教学经验，这本书充分反映了编者们这些宝贵的经验．

一般教材需要经过教师在课堂上的再创造才能很好地发挥作用，而本书则体现出教师讲课时的这种创造，使读者感到好象是在课堂上亲聆教师的讲授．

经验告诉我们，学生感到困难、深入不下去的主要原因是缺乏自学能力，不善于给自己提出问题，本书在这一方面也下了很大功夫、编者在展开教材内容的同时，引导读者去提出问题、探讨问题、解决问题，提供了一条怎样深入学习的途径．

本书也是很好的教学参考书，它不仅在内容上涉及面广，而且更重要的是提供了一种可取的教学方法，这对于教师，特别是刚从事教学工作的青年教师具有很好的借鉴作用．

由于本书切合学员的学习实际，虽然增加了一定篇幅，但并不显得繁琐．相反，在日益蓬勃发展的成人教育事业中，本书必将发挥积极的作用，为广大读者所欢迎．特代为作序．

王湘浩

1985.4.长春

注　王湘浩教授是中国科学院学部委员、吉林大学副校长。

目　　录

第一章　初等积分法

在初等数学中论述过方程和方程组的概念，它们是一个或一组含有未知量的等式．比如一元二次方程、二元一次方程组以及三角方程就是这样的例子．到了学习高等数学，我们又遇到过隐函数方程，它是含有自变量和未知函数的关系式．所求的对象已不再象代数方程或超越方程那样是未知量了，而是未知函数．现在我们要研究的方程又不同于隐函数方程，它是含有未知函数导数的方程，即所谓微分方程．我们只讨论未知函数是一元函数的微分方程，通常称为常微分方程．今后，我们说到微分方程都是指常微分方程．本章首先通过一些简单的实际例子引出微分方程的基本概念，然后着重讨论某些类型的所谓一阶微分方程，将它们的求解问题化为积分问题，并将它们的解用初等函数或它的积分表示出来，即采用初等积分法或初等解法解一阶微分方程．

§1.1　基本概念

在许多实际问题中，常常会遇到含有未知函数的导数的关系式．我们先看几个简单的例子．

例 1　已知一曲线上任一点的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程．

解：根据导数的几何意义，我们知道所求曲线应满足方程

$$\frac{dy}{dx}=2x \tag{1.1}$$

将上式两边积分，得到

$$y=\int 2x dx$$

即

$$y=x^2+C, \qquad (1.2)$$

其中C是任意常数.

这样，我们得到曲线族（1.2），它们都满足题目的要求.

如果在这族曲线中要求过某点（x_0，y_0）的曲线，那末，只需要利用（x_0，y_0）满足（1.2），便可确定常数C，即由

$$y_0=x_0^2+C$$

得

$$C=x_0^2-y_0,$$

代回（1.2），就得到过点（x_0，y_0）的曲线方程

$$y=x^2+(y_0-x_0^2).$$

例 2 质量为m的物体只受重力的作用而自由降落，试求物体所经过的路程S与时间t的关系.

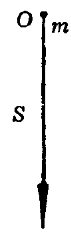

图 1.1

解：把物体降落的铅垂线取作S轴，其指向朝下（朝向地心）（图1.1）. 设物体在时刻t的位置为$S=S(t)$，物体受力$F=mg$的作用而以等加速自由下落，加速度$a=\frac{d^2s}{dt^2}$，由牛顿第二定律$F=ma$，便得到物体在下落过程中满足的关系式

$$m\frac{d^2S}{dt^2}=mg,$$

即

$$\frac{d^2S}{dt^2}=g. \tag{1.3}$$

积分一次，得

$$\frac{dS}{dt}=gt+C_1 \tag{1.4}$$

再积分一次，得到

$$S=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{1.5}$$

C_1，C_2是两个任意常数．这个等式便是所求的路程S与时间t的关系．

如果当$t=t_0$时，$S=S_0$，$\frac{dS}{dt}=v_0$，则由式（1.4）和式（1.5）有

$$v_0=gt_0+C_1,$$

$$S_0=\frac{1}{2}gt_0^2+C_1t_0+C_2,$$

联立解出C_1与C_2：

$$C_1=v_0-gt_0,$$

$$C_2=S_0-\frac{1}{2}gt_0^2-(v_0-gt_0)t_0=S_0-v_0t_0+\frac{1}{2}gt_0^2.$$

代回（1.5）．便得到当$t=t_0$时，$S=S_0$，$\frac{dS}{dt}=v_0$的关系式

$$S=\frac{1}{2}gt^2+(v_0-gt_0)t+S_0-v_0t_0+\frac{1}{2}gt_0^2.$$

上述两个例子中的方程（1.1）和（1.3）都是微分方程．一般地说，凡表示未知函数与未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程，叫做微分方程．

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数，叫

做微分方程的阶. 如果微分方程的阶数是n，则称为n阶微分方程. 如方程(1.1)是一阶微分方程，方程(1.3)是二阶微分方程.

如果把某个函数以及它的导数代入微分方程，能使该方程成为恒等式，这个函数就叫做该微分方程的解，或者说，满足微分方程的函数叫做该微分方程的解.

如例1中，$y=x^2+C$和$y=x^2+(y_0-x_0^2)$都是微分方程$\frac{dy}{dx}=2x$的解；例2中$S=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$和$S=\frac{1}{2}gt^2+(v_0-gt_0)t+S_0-v_0t_0+\frac{1}{2}gt_0^2$都是微分方程$\frac{d^2S}{dt^2}=g$的解.

在这两个例子中，我们一开始得到的解中都含有任意常数，例1的解中含一个任意常数，例2中则含两个任意常数. 一般来说，方程的解中所含任意常数个数与对应的微分方程的阶数相同，不同的任意常数之间是互相独立的. 我们把具有这种性质的解，叫做微分方程的通解.

根据要求，有时需确定通解中的任意常数. 设微分方程的未知函数为$y=y(x)$，如果微分方程是一阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$\text{当} x=x_0 \text{时}, \ y=y_0$$

或写成

$$y|_{x=x_0}=y_0,$$

其中x_0，y_0都是给定的值；如果微分方程是二阶的，通常用来确定任意常数的条件是

$$\text{当} x=x_0 \text{时}, \ y=y_0, \ y'=y'_0$$

或写成

$$y|_{x=x_0}=y_0, \ y'|_{x=x_0}=y'_0,$$

其中x_0，y_0和y'_0都是给定的值，这样的条件叫做初始条件.

由初始条件，可以确定通解中的任意常数，从而得到不含任意常数的解，这种解叫做微分方程的特解.

如例1，给定平面上的点（x_0，y_0）就相当于给定了初始条件：当$x=x_0$时，$y=y_0$，即$y|_{x=x_0}=y_0$，满足这个初始条件的特解就是

$$y=x^2+(y_0-x_0^2).$$

例 2 中当$t=t_0$时，$S=S_0$，$\frac{dS}{dt}=v_0$，即$S|_{t=t_0}=S_0$，$S'|_{t=t_0}=v_0$就是所给的初始条件，满足这个初始条件的特解为

$$S=\frac{1}{2}gt^2+(v_0-gt_0)t+s_0-v_0t_0+\frac{1}{2}gt_0^2.$$

为了加深对这些概念的理解，我们来讨论如下几个问题.

问题 1：如何正确理解微分方程的定义？换句话说，怎样才算是含有自变量，未知函数以及未知函数的导数的关系式？

我们来看如下几个方程：

方程 1　$\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=e^x$.

方程 2　$xdy+ydx=0$.

方程 3　$y''-2y'+y=0$.

方程 4　$y'=2x$.

方程 5　$y'=1$.

方程 6　$(e^x\sin x)'+y^2+3x=0$.

容易看出

方程1中含有自变量x，未知函数$y=y(x)$以及未知函数

的导数$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$，所以它是微分方程.

方程2中，两边除以dx,便化为$x\frac{dy}{dx}+y=0$，所以它是一个微分方程；也可以两边同除以dy,化为$x+y\frac{dx}{dy}=0$.同样是一个微分方程. 只不过前者把x视为自变量，y视为x的函数，而后者把y视为自变量，x视为y的函数. 我们把方程 2 称为微分形式的微分方程.

方程 3 表面上不含自变量，但是y'意味着y对某自变量求导. 至于自变量的符号是x，还是t，或其它，都是无关紧要的，可以任意取，所以它实际上还是含有自变量的，因此它是微分方程.

方程 4 中形式上只含自变量和未知函数的导数，实际上由于含有未知函数的导数，也就表明它是含未知函数的，因此是微分方程.

与方程 3 和方程 4 的理由相同，方程 5 也是微分方程.

方程 6 虽然出现导数，但是，它是已知函数的导数，所以它不是微分方程.

综上，我们可以把微分方程理解为含有未知函数导数的关系式.

顺便指出，对于一般的n阶微分方程

$$F(x,\ y,\ y',\cdots,\ y^{(n)})=0, \qquad (1.5)$$

它是含有未知函数的n阶导数的关系式，而x，y，$y',\cdots$，$y^{(n-1)}$则不必全含，甚至可不含，但一定含$y^{(n)}$. 例如

$$y''+x=1,$$

$$y^{(4)}=x^2$$

分别是 2 阶和 4 阶微分方程.

问题 2：既然n阶方程的通解含有n个独立的（即相互无关的）常数，那末，如何知道这些常数是独立的呢？比如，$y=x^2+A_1+B_1$，$y=A_2e^{X+B_2}$，$y=A_3e^X+B_3xe^X$分别是方程$y'=2x$，$y'=y$，$y''-2y'+y=0$的解，其中常数A_i和$B_i(i=1,2,3)$是否独立？

判别所含任意常数是否独立，可以有专门的办法，但使用起来并不方便，这里不作介绍．在实际问题中是可以通过观察来确定的．方程$y'=2x$的解$y=x^2+A_1+B_1$中，A_1+B_1可用一个字母C_1代替，方程$y'=y$的$y=A_2e^{X+B_2}$中，由于$A_2e^{X+B_2}=A_2e^{B_2}e^X$，故$A_2e^{B_2}$可用一个字母$C_2$代替，这样都不失“任意性”，作此替代后

$$y=x^2+A_1+B_1\text{和}y=x^2+C_1,$$

$$y=A_2e^{X+B_2}\text{和}y=C_2e^X$$

分别表示相同的一族函数，其中A_i，B_i，C_i（$i=1$，2）都是任意常数，故在$y=x^2+A_1+B_1$与$y=A_2e^{X+B_2}$中，A_i和B_i不独立．而$y=A_3e^X+B_3xe^X$中，A_3和B_3是独立的．这是因为找不到一个函数族，使其中只含有一个任意常数，而又与$A_3e^X+B_3xe^X$一致.

对于A_1与B_1，A_2与B_2的不独立性比较容易掌握，这是因为含它们的解的方程都是一阶的，根据通解定义，应含一个任意常数，所以由此观点出发，也可知它们是不独立的．值得注意的是二阶以上方程，解的表达式中所含常数个数与方程阶数相同，这些常数未必就是独立的．例如，对于二阶方程$y''-2y'+y=0$，Ae^{X+B}也是它的解，但A、B不是独立的，因而不是方程的通解.

但是，在方程阶数较高时，观察解中所含的任意常数是

否独立较为困难的．为此，我们给出其判别方法．

假定$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_n)$是$n$阶微分方程(1.5)的解，其中$C_1$，$C_2$，…，$C_n$是任意常数．如果在某一小区间（$\alpha$，$\beta$）内，恒有

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \dfrac{\partial}{\partial C_1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial C_2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial C_n}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial}{\partial C_1}\left(\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}\right) & \dfrac{\partial}{\partial C_2}\left(\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}\right) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial C_n}\left(\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}\right) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.6}$$

那末，常数C_1，C_2，…，C_n是独立的．

例如，对$\varphi(x,C_1,C_2)=C_1e^x+C_2xe^x$，由于

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial C_1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial C_2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}$$

$$=e^x\neq 0.$$

所以，$y=C_1e^x+C_2xe^x$是方程$y''-2y'+y=0$的通解．

而对$\varphi(x,C_1,C_2)=C_1e^{x+C_2}$，由于

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial C_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial C_1}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial C_2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{C_2+x} & C_1e^{C_2+x} \\ e^{C_2+x} & C_1e^{C_3+x} \end{vmatrix}$$

$$=0.$$

所以，$y=C_1e^{x+C_2}$不是方程$y''-2y'+y=0$的通解．