北京大学数学丛书

# 无限元方法

应隆安 著



北京大学出版社

新登字（京）159号

北京大学数学丛书
**无 限 元 方 法**
应隆安　著
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168 毫米　32 开本　6.125印张　150千字
1992年6月第一版　1992年6月第一次印刷
印数：0001—3,500册
ISBN 7-301-01779-0/O·278
定价：5.20元

## 内 容 简 介

无限元方法是无限剖分的思想与有限元方法的结合，它打破了"有限"的限制，因而比有限元方法更加灵活。本书从Laplace方程入手，介绍了无限元方法的基本理论与应用。内容包括：基本算法、算法基础、收敛性及一些利用无限元方法解决问题的实例。本书简单扼要地概括、总结了国内外关于无限元方法的主要研究成果，同时也包括了作者本人从未公开过的一些工作成果。

本书可作大学、师范院校及工科院校数学系高年级学生选修课教材及研究生教材，也可供数学工作者及科技工作者参考。

## 说　明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖，力图反映现代数学的新成就；叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望：广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

# 序　言

无限元方法是无限剖分的思想与有限元方法的结合。无限剖分的思想最早见于 Silvester-Cermak 1969 年的文章，它是在差分方法的范畴内提出的。将无限剖分与有限元方法结合的文献则首推Thatcher 1975年发表在《J.Inst.Math.Appl.》上的文章“Singularities in the solution of Laplace's equation in two dimensions”。非常凑巧的是，笔者的论文“计算应力强度因子的无限相似单元法”也于1974年在南宁全国断裂力学学术会议上宣读，后来此文全文发表于1977年《中国科学》。在此之后，有不少人对此方法作了深入的研究，例如韩厚德同志关于迭代法，邵秀民同志关于傅里叶解法，潘灏同志关于无限元方法在断裂力学中的应用，许进超同志关于收敛性，等等。没有这些同志的共同努力，无限元方法不可能发展成今天的规模。

无限元方法的文献散见于各处，符号很不统一，现在看来，有些命题的叙述与证明尚有缺陷，有些方法的叙述过于偏重形式逻辑。这些缺点增加了读者阅读的困难，不利于推广应用。多年以来，笔者一直有愿望将无限元方法的理论、方法与应用汇集成一书，但由于日常事务繁忙，直到今天才能交稿。

无限元方法的基本思想是十分简单的：在有限元方法的计算过程中，人们总是将所要计算的物体分割为有限个单元，并且，受计算机的容量和运算速度所限，这有限个单元的数目也是很“有限”的。这样的限制给一些问题的求解带来了很大的困难。例如在无限大的地基上计算某一结构，无限大的地基就很不容易剖分，未知量少则不准确，多则无法计算或者白白地耗费了很多人力物力。又如在结构的某些部位产生了应力集中，力学量变化

很激烈，单元不能分得太细，计算起来就很不准确。无限元方法打破了这个限制，它允许人们在需要的时候使用无穷多个单元。这种做法比有限元方法灵活得多。对于一个待计算的问题，如果使用有限个单元已经足够，那末就按常规的办法处理，如果不够，就用无穷多个，区别对待。

因此，无限元方法的核心问题是如何求解无穷多个单元。在数学上，对于“无穷”已经积累了十分丰富的材料与研究方法，只要适当利用这些成果，问题是可以解决的。读者将会发现，如果采用一些特殊的办法，在使用了无穷多个单元以后，不仅不需要一台“无穷大的计算机”，反而用一台不大的计算机，化不多的机时，就足以应付，这正是无限元方法的吸引人之处。

当然，对于上述问题，还有很多解决办法，如边界元方法，半解析方法等。与这些方法相比，无限元方法有一个突出的优点，就是它不涉及解的解析表达式。这不仅使它可以对很多问题给出统一的求解格式，而且当解析解无法求出，或者解析解非常复杂，不便于应用时，它照样可以用。唯一的例外情况是应力强度因子的计算。读者将会发现，在奇点附近解的展开式对于应力强度因子的计算是有帮助的。

考虑到不同读者的需要，本书的材料是这样编排的：第一章介绍算法，这里涉及的数学知识很少，如果读者只对无限元方法的应用感兴趣，那末他可以不读下面的第二章与第三章；我们将算法的理论基础放在第二章，阅读这一章需要多一点的数学知识，例如索伯列夫空间论，矩阵论等；第三章讨论收敛性，这一章用到的数学知识更多一些，特别是用到了有限元方法的数学理论；在第四章，我们提供一些算例供使用者参考。笔者力争使本书能概括国内外已经发表的无限元方法的主要成果，同时本书也包括了一些笔者没有发表的工作成果。

借此机会，笔者对段学复教授和冯康教授表示特殊的感谢。在动乱的年代，段先生将上述笔者关于无限元方法的第一篇论文

推荐发表，此文经冯先生仔细地审查，提出了中肯的修改意见，后来正式发表的文章中有一节几乎是完全按照冯先生的意见修改的。冯先生还多次将无限元方法介绍给国内外同行。两位老师的帮助，不仅使无限元方法得以推广，而且对于笔者是一个极大的鼓舞。

本书是将无限元方法成书的首次尝试，它还需要不断地补充与完善，欢迎广大读者提出宝贵的意见。

应隆安

1989年3月于北大

# 目　录

# 第一章 算　法

## §1 二维Laplace方程外问题

设 $\Gamma_0$ 是平面上的一个凸多边形，它的外部区域是 $\Omega$(图1)。我们在 $\Omega$ 上求解 Laplace 方程的 Dirichlet 问题

$$\Delta u=0,\quad (x,y)\in\Omega,\qquad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma_0}=f。\qquad (1.2)$$

或者将边界条件(1.2)换成

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=f。\qquad (1.3)$$

(1.1),(1.3)是一个 Neumann问题，以后我们永远以 $\nu$ 表示外法线方向. 与(1.1)联系的应变能是

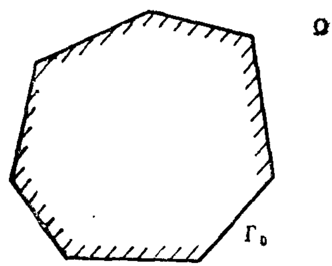


图 1

$$W=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}dxdy。\qquad (1.4)$$

为求解问题(1.1),(1.2)或者(1.1),(1.3)，我们将$\Omega$剖分为无限多个三角形单元. 不妨设坐标原点$O$在 $\Gamma_0$ 内部，取一个常数 $\xi>1$，以$O$点为相似中心，以 $\xi,\xi^2,\cdots,\xi^k,\cdots$为比例常数，作 $\Gamma_0$ 的相似形，它们分别记作 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_k,\cdots$，每两个多边形之间的区域称为一"层"(图2). 然后，我们将每一层进一步剖分成单元，可以采用如下方式：在 $\Gamma_0$ 上选取若干点作为节点，其中顶点必须是节点，在每条边上还可以按需要适当地再选一些节点，从$O$点出发作射线与各节点相连，这样就将每一层剖分成相似的若干个四边形，再将每个四边形剖分成两个三角形.需要注意

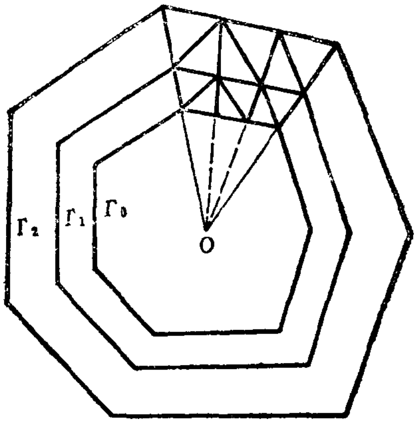


图 2

的是，每层的剖分方式必须一致(图2)。

边界 $\Gamma_0$ 的形状可能不是一个凸多边形，而是非常复杂的形状。这时我们可以将 $\Gamma_0$ 的外部区域分解成一个形状规则的无界区域与一个形状复杂的有界区域。无界区域仍记作 $\Omega$，它可以按照上述办法作剖分。对于有界区域，则可以按照常规的办法作有限单元剖分(图3)。我们还使这两种剖分互相协调一致，即在交界处，三角形单元的节点与边互相吻合。在这种情况下，我们仍然先分析区域 $\Omega$，我们将给出 $\Omega$ 上的组合刚度矩阵 $K_z$ 的算法。

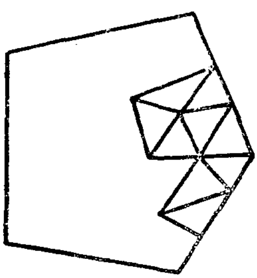


图 3

$K_z$ 是一个有限阶的矩阵，在使用的时候，或者用它直接求解边值问题，或者将它与其它单元的刚度矩阵叠加，以求解形状复杂的区域的边值问题。对于后者，$\Omega$ 是当作一个单元来处理的。

现在考虑多边形 $\Gamma_k$。从某一点开始，按逆时针方向，将 $\Gamma_k$

上的各节点排一个次序。设节点共有 $n$ 个。(1.1)的解 $u$ 在节点上的值也排了一个次序，记作 $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \cdots, y_k^{(n)}$，我们将它们排列成一个列向量 $(y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \cdots, y_k^{(n)})^{\mathrm{T}}$，记作 $y_k$，这里T表示矩阵或者向量的转置。

考虑多边形 $\Gamma_{k-1}$ 与 $\Gamma_k$ 之间的第 $k$ 层。对于每个三角形单元，在节点上的值给定以后，作线性插值，可以按常规的方法求单元刚度矩阵(例如参看[52])。将第 $k$ 层上的各单元刚度矩阵按节点叠加，可以得到一层上的刚度矩阵。我们将这个刚度矩阵记作

$$\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

即如果第 $k$ 层上的应变能是 $W_k$，则

$$W_k = \frac{1}{2}(y_{k-1}^{\mathrm{T}}, y_k^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix} K_0 & -A^{\mathrm{T}} \\ -A & K_0' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{k-1} \\ y_k \end{pmatrix},$$

其中 $K_0, K_0', A$ 都是 $n$ 阶矩阵。从有限元方法的基本理论可知(1.5)是对称矩阵，因此 $A^{\mathrm{T}}$ 与 $A$ 互为转置，$K_0, K_0'$ 都是对称的。

从(1.4)和剖分的相似性，不难判断，各层的刚度矩阵是相同的。将各层的刚度矩阵按节点叠加，可以得到一个无穷阶的总刚度矩阵。考虑到方程与边界条件，可以给出一个无穷阶的代数方程组。令 $K = K_0 + K_0'$，则有

$$K_0 y_0 - A^{\mathrm{T}} y_1 = f_0, \tag*{$(1.6)_0$}$$

$$-Ay_0 + Ky_1 - A^{\mathrm{T}} y_2 = 0, \tag*{$(1.6)_1$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-Ay_{k-1} + Ky_k - A^{\mathrm{T}} y_{k+1} = 0, \tag*{$(1.6)_k$}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

当考虑问题(1.1),(1.2)时，在 $\Gamma_0$ 上不要列出方程，因此不要方程$(1.6)_0$，而 $y_0$ 是已知的。当考虑问题(1.1),(1.3)时，在 $\Gamma_0$上

要列出方程，即方程$(1.6)_0$，其中 $f_0$ 是“等效节点力”，用常规的有限元方法，它是可以从边界值 $f$ 求出来的。目前，我们的目的是给出 $\Omega$ 上组合刚度矩阵的算法，因此可以暂且不管上述边界条件的差别。

我们将在下章证明，存在一个 $n$ 阶实矩阵$X$，使

$$y_{k+1}=Xy_k,\qquad k=0,1,\cdots. \tag{1.7}$$

$X$ 称为转移矩阵。以(1.7)式代入$(1.6)_1$ 得

$$(-A+KX-A^{\mathrm T}X^2)y_0=0,$$

但是 $y_0$ 可以是任意向量，所以$X$ 满足方程

$$A^{\mathrm T}X^2-KX+A=0. \tag{1.8}$$

令

$$R_1=\begin{pmatrix} K & -A\\ I & 0\end{pmatrix},\qquad R_2=\begin{pmatrix} A^{\mathrm T} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

其中 $I$ 是单位阵。方程$(1.6)_k$ 可以写成如下形式：

$$R_1\begin{pmatrix} y_k\\ y_{k-1}\end{pmatrix}=R_2\begin{pmatrix} y_{k+1}\\ y_k\end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

设 $\lambda,g$ 分别是矩阵$X$的特征值和特征向量，则有

$$Xg=\lambda g. \tag{1.11}$$

在(1.10)中取 $k=1$，令 $y_0=g$，并且注意到(1.7)，(1.11)得

$$R_1\begin{pmatrix} \lambda g\\ g\end{pmatrix}=\lambda R_2\begin{pmatrix} \lambda g\\ g\end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

因此 $\lambda$ 与$\begin{pmatrix} \lambda g\\ g\end{pmatrix}$分别是矩阵束 $R_1-\lambda R_2$ 的广义特征值与广义特征向量[33]。为了求矩阵$X$，我们先解上述广义特征值问题，求出它的全部 $2n$ 个特征值与特征向量，然后从中选出 $X$ 的 $n$ 个特征值与特征向量。

以后，我们总是以 det 表示一个矩阵的行列式。我们计算

$$\det(R_1-\lambda R_2)=\det\begin{pmatrix} K-\lambda A^{\mathrm T} & -A \\ I & -\lambda I \end{pmatrix}。$$

在以上分块矩阵中，以 $\lambda$ 乘第一列并加到第二列上得

$$\det(R_1-\lambda R_2)=\det\begin{pmatrix} K-\lambda A^{\mathrm T} & -A+\lambda K-\lambda^2 A^{\mathrm T} \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$=(-1)^n\det(-A+\lambda K-\lambda^2 A^{\mathrm T}).$$

由 $K$ 的对称性，上式是一个 $\lambda$ 的对称多项式。因此，如果 $\lambda\neq0$ 是一个特征值，$1/\lambda$ 也是一个特征值。我们将在下章中证明：$X$ 的特征值满足 $|\lambda|\leqslant1$，而且当 $|\lambda|=1$ 时，必然有 $\lambda=1$，其对应的特征向量 $g_1=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$。因此，我们只需将矩阵束 $R_1-\lambda R_2$ 的特征值中满足 $|\lambda|<1$ 的选出，再添上 $\lambda=1$。设特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，对应的特征向量是 $g_1,g_2,\cdots,g_n$，令

$$T=(g_1,g_2,\cdots,g_n),\qquad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 diag 表示对角矩阵或者块对角矩阵。由(1.11)得

$$XT=T\Lambda,$$

即

$$X=T\Lambda T^{-1}. \tag{1.13}$$

(1.13)就是计算转移矩阵 $X$ 的公式。以(1.7)代入$(1.6)_0$得

$$K_z y_0=f_0, \tag{1.14}$$

其中 $K_z=K_0-A^{\mathrm T}X$，它称为组合刚度矩阵。我们将在下一章中证明 $K_z$ 是一个对称半正定矩阵。

组合刚度矩阵与总刚度矩阵是有区别的。在现在的情况下，总刚度矩阵是一个无穷阶矩阵，通过它可以得到任意节点值产生的应变能，而组合刚度矩阵仅是一个 $n$ 阶矩阵，通过它只能得到当节点值 $y_0,y_1,\cdots$ 满足方程$(1.6)_1$，$(1.6)_2$，…时的应变能。从总刚度矩阵到组合刚度矩阵的过程可以看作是一个消元过程。通过这个过程，$y_1,y_2,\cdots$ 都消去了。

利用无限元方法求解的过程是这样的：先求出转移矩阵与组

合刚度矩阵，然后用与有限元方法完全同样的方式解一个代数方程组，得到 $y_0$，其余节点值可以由(1.7)确定。

如果 $A$ 是一个可逆矩阵，上述广义特征值问题可以化为普通特征值问题，以 $R_2^{-1}$ 左乘(1.12)式得

$$\begin{pmatrix} (A^{\mathrm{T}})^{-1}K & -(A^{\mathrm{T}})^{-1}A \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda g \\ g \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \lambda g \\ g \end{pmatrix},$$

它就是一个普通特征值问题.

特征值 $\lambda$ 可能是复数，这就需要作复数运算。为避免这一点，我们可以将公式(1.13)略作变形。特征值与特征向量必定是成对共轭地出现的，设 $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$，$g = p \pm \mathrm{i}q$ 是一对特征值与特征向量，由(1.11)得

$$X(p \pm \mathrm{i}q) = (\alpha \pm \mathrm{i}\beta)(p \pm \mathrm{i}q).$$

分离实部与虚部得

$$Xp = \alpha p - \beta q, \qquad Xq = \beta p + \alpha q,$$

即

$$X(p, q) = (p, q)\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

我们替换矩阵 $T$ 与 $\Lambda$ 中对应的两列，令

$$T_1 = (\cdots, p, q, \cdots),$$

$$\Lambda_1 = \mathrm{diag}\left(\cdots, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \cdots\right).$$

不难看出

$$X = T_1 \Lambda_1 T_1^{-1}.$$

将各对复特征值一一作了以上替换以后，求转移矩阵$X$的运算就是实的了。

## §2 Fourier 方法

上节中给出的方法可适用于任何的相似剖分，其运算量为解

一个 $2n$ 阶特征值问题。在本节我们对一种特殊的相似剖分使用 Fourier 变换，使得求矩阵 $X, K_2$ 时，只需极少量的计算。

我们要求图 2 中的剖分具有下面的性质：当图 2 绕 $O$ 点旋转 $2\pi/n$ 弧度时，它在这个旋转下不变。这时 $\Gamma_0$ 是一个正多边形，以 $O$ 点为中心，并且每个小四边形的剖分是一致的，如图 4 所示。

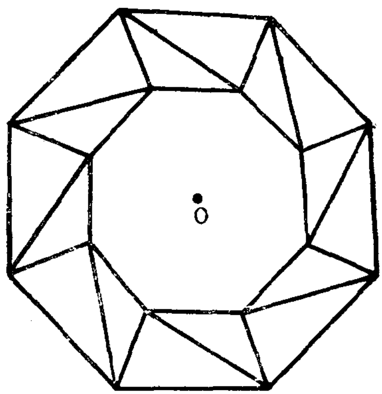


图 4

我们将在下章证明，对于这样的特殊剖分，矩阵 $K_0, K_0', A$ 都是循环矩阵，即它们都是如下形状：

$$B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & & b_n \\ b_n & b_1 & \cdots & & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ b_2 & \cdots & & b_n & b_1 \end{pmatrix}.$$

作单位根 $\omega=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}$ 以及酉矩阵

$$F=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

则可以对 $B$ 施行 Fourier 变换，以 $\bar{F}$ 记 $F$ 的共轭矩阵，通过计算可以直接验证

$$\bar{F}BF=\mathrm{diag}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i,\sum_{i=1}^{n}\omega^{i-1}b_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}\omega^{(i-1)(n-1)}b_i\right).$$

令 $y_k=Fz_k$，$k=0,1,\cdots$。以 $\bar{F}$ 左乘(1.6)的诸方程，得

$$P_0z_0-\bar{Q}z_1=\bar{F}f_0, \qquad (2.1)_0$$

$$-Qz_0+Pz_1-\bar{Q}z_2=0, \qquad (2.1)_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-Qz_{k-1}+Pz_k-\bar{Q}z_{k+1}=0, \qquad (2.1)_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中

$$P_0=\bar{F}K_0F, \qquad Q=\bar{F}AF, \qquad P=\bar{F}KF,$$

它们都是对角矩阵。我们将它们记作

$$P_0=\mathrm{diag}(p_0^{(1)},p_0^{(2)},\cdots,p_0^{(n)}),$$

$$P=\mathrm{diag}(p^{(1)},p^{(2)},\cdots,p^{(n)}),$$

$$Q=\mathrm{diag}(q^{(1)},q^{(2)},\cdots,q^{(n)}).$$

令

$$z_k=(z_k^{(1)},z_k^{(2)},\cdots,z_k^{(n)})^{\mathrm{T}}, \qquad \bar{F}f_0=(\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},\cdots,\varphi^{(n)})^{\mathrm{T}}.$$

将(2.1)写成分量的形式，得到 $n$ 个无穷阶代数方程组($i=1,2,\cdots,n$)

$$p_0^{(i)}z_0^{(i)}-\bar{q}^{(i)}z_1^{(i)}=\varphi^{(i)},$$

$$-q^{(i)}z_0^{(i)}+p^{(i)}z_1^{(i)}-\bar{q}^{(i)}z_2^{(i)}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$-q^{(i)}z_{k-1}^{(i)}+p^{(i)}z_k^{(i)}-\bar{q}^{(i)}z_{k+1}^{(i)}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

下面象§1一样地作推导。存在常数 $x^{(i)}$，使

$$z_{k+1}^{(i)}=x^{(i)}z_k^{(i)}, \qquad k=0,1,\cdots.$$

得到 $x^{(i)}$ 满足的方程

$$\bar{q}^{(i)}(x^{(i)})^2-p^{(i)}x^{(i)}+q^{(i)}=0. \qquad (2.2)$$

(2.2)的两个根的绝对值互为倒数。我们将在下章证明 $|x^{(i)}|\leqslant 1$,