

振动与噪声的 阻尼控制

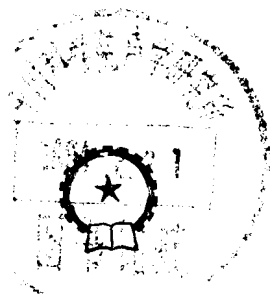
孙庆鸿 张启军 姚慧珠 编著

机械工业出版社

06-11-15

振动与噪声的阻尼控制

孙庆鸿 张启军 姚慧珠 编著



机械工业出版社

1015029

(京)新登字054号

内 容 简 介

这是一本专门介绍应用阻尼原理和技术解决工程中振动和噪声问题的书籍。书中简明的介绍了结构振动、声辐射与机械噪声的基本原理和相互关系,阻尼特性的描述和阻尼材料及其特性,详细的叙述了表面阻尼处理、调谐阻尼器和振动隔离等的理论分析和优化设计以及在工程中应用的实例分析,最后用各种工业行业中62个减振降噪结构设计的例子供参考应用。本书辑录了编者和这方面学者近年研究的最新成果,理论分析和实际应用密切结合、深入浅出,通俗易懂、实用性强。

本书可供高等院校师生和工程技术人员参考。

振动与噪声的阻尼控制

孙庆鸿 张启军 姚慧珠 编著

*

责任编辑:檀庆华

封面设计:郭景云

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

北京昌平环球科技印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $787 \times 1092^{1/16}$ ·印张 $18^{1/8}$ ·字数443千字

1993年8月北京第1版·1993年8月北京第1次印刷

印数 0 001—2 100·定价:18.70元

*

ISBN 7-111-03780-4/TB·184



前 言

生产力的发展使机器设备的性能日益提高,人们对于工作和生活环境的要求也愈来愈高,各工业部门机器设备向高速、高效、高精度和自动化方向的发展趋势已成为当今的必然。航空航天、远洋船舶和建筑桥梁等发展也是突飞猛进。但伴随这些发展而来的就是振动和噪声问题,它严重的破坏了机器设备运行的稳定性和可靠性,限制了机器性能的提高,污染环境、危害人们的健康,有的甚至会产生严重的后果。为之很多学者和科技工作者孜孜不倦地进行研究和探索解决工程中振动和噪声问题的理论、方法和技术途径。其中有一个最为人们所瞩目,在解决工程中的振动和噪声问题时十分有效的技术,就是阻尼技术。

阻尼技术在50年代首先应用在航空航天器上,用它来控制结构的振动和噪声,并取得了很好的效果,它具有重量轻、结构简单、应用方便、效果显著、价钱也不贵等优点。因此,阻尼技术很快的扩展应用到机械电气、交通运输、电子仪器、轻工纺织、军事国防、建筑桥梁和家用电器等各个工业部门,并受到了各方面的重视。至今在阻尼技术应用的理论、技术、方法和材料上都已日臻完善和成熟,并且还继续在向更高的方向发展。

本书兼顾了深入的理论分析和工程上便于应用这两个方面。在表面阻尼处理、调谐阻尼器和机械振动隔离等实际应用技术方面,本书在设计原理、建模方法和优化方法等作了全面深入的理论分析,反映了部分新的理论研究成果,可供读者向更高层次的发展作参考,并列出了部分近年开发的软件供工程设计中参考应用。同时书中列出了大量在工程中卓有成效的应用实例,以结构图和说明的形式奉献给读者,使用时无需高深的振动和噪声理论,也不要作很多的分析计算,便可供工程技术人员在工作中参考应用,以解决常见的工程中的振动和噪声问题。

全书分八章,由孙庆鸿担任主编,张思主审。各章的编者为:第一、二、五章,张启军;第七章,姚慧珠;第三、四、六、八章,孙庆鸿。

本书可供工程技术人员、高等院校师生、科研工作者参考应用。

作者水平有限,书中难免会有错误,希望读者不吝指正。

编 者

1992.10.

譯 者 的 話

这里只对翻譯和校对过程中的几个問題,作一点說明如下:

(1) 本书所用的专业名詞,声学方面以中国科学院編譯出版委员会名詞室(現为中国科学院自然科学名詞編訂室)和电子学研究所声学室合編的“声学术語”为准;属于其他学科方面的专业名詞,尽量采用中国科学院編譯出版委员会或其他有关机构已审定或已出版的为准。有少数沒有現成名詞的,則按原义譯出。

原书中有关“名詞和定义”几节,考虑到已由“声学术語”出版,因此均已删去,讀者要参考时,可查閱該书。

(2) 原书使用单位混淆,基础部分多用厘米·克·秒制或米·公斤·秒制,振动和机械工程方面多用英制,有时公制和英制并列。为适合我国情况并求得統一見,已一律改为米·公斤·秒制,必要的图表也重新作了繪制。

(3) 全书譯文以尽量忠实原著为主,但某些显然不合我国条件的部分內容,已删去或改写。

为更便于讀者查找需要閱讀的內容,本书每章中的节都編了号,并且把节、小节的标题都編入了目录。

(4) 本书分四分册出版,第一分册为噪声控制学基础,第二分册为控制原理和測量技术,第三分册为机械零件和部件以及运载工具的噪声控制,第四分册为城市噪声和噪声控制的其它方面問題。很多同志参加了本书的翻譯工作(見各分册目录)。翻譯过程中,中国科学院声学研究所馬大猷教授給了多方指导,并校訂了部分稿件。担任本书校訂工作的还有:同济大学数理系章启馥教授、王季卿先生,中国科学院心理学研究所龙叔修教授和本人等。全书最后由我作了一次总的校訂和統一。

呂 如 榆

1964. 10. 8. 于北京

目 录

前言

第一章 结构振动分析基础	1
第一节 概述	1
第二节 单自由度系统	1
第三节 两自由度系统	6
第四节 多自由度系统	8
第五节 连续弹性体系统	11
参考文献	20
第二章 振动结构的声辐射与机械噪声	21
第一节 波动方程	21
第二节 球体、活塞的声辐射	22
第三节 平板弯曲振动的声辐射	24
第四节 机械噪声原理	31
参考文献	37
第三章 阻尼特性的描述	38
第一节 阻尼的影响及阻尼特征值的数学表示	38
第二节 材料阻尼	41
第三节 阻尼材料的特性表示	44
第四节 非材料阻尼	48
参考文献	57
第四章 阻尼材料及其特性	58
第一节 概述	58
第二节 阻尼材料的性能指标和环境因素对阻尼特性的影响	58
第三节 阻尼材料特性的数学模型表示	61
第四节 阻尼材料	67
第五节 阻尼材料动态性能的测定	77
参考文献	83
第五章 表面阻尼处理结构设计	84
第一节 概述	84
第二节 自由阻尼处理的理论分析与设计	86
第三节 约束阻尼处理的理论分析与设计	102
第四节 表面阻尼处理结构应用实例分析	132
参考文献	144
第六章 调谐阻尼器	145
第一节 概述	145
第二节 调谐阻尼器的动力特性分析	145
第三节 控制梁振动的调谐阻尼器	148

第四节	应用实例.....	159
参考文献		183
第七章	机械振动隔离技术	185
第一节	概述.....	185
第二节	阻尼隔振技术.....	186
第三节	隔振器和隔振垫.....	213
参考文献		228
第八章	减振降噪结构设计	230
第一节	概述.....	230
第二节	控制振动和噪声的产生.....	233
第三节	控制振动和噪声的传递.....	246
第四节	控制噪声辐射.....	255
第五节	应用综合措施减振降噪.....	261
参考文献		282

第一章 结构振动分析基础

第一节 概 述

所谓机械振动,是指物体或质点在平衡位置附近来回往复的一种运动。在日常生活中随处可见,例如钟弦的振荡,树枝的摇摆等等。在工程上则更加普遍,例如桥梁的振动,飞机、船舶的振动,机床及各种动力机械的振动等等。

通常振动是有害的,它会影响机床的加工精度和表面粗糙度,加速结构的疲劳损坏和失效,缩短机器寿命。有时振动还会引起严重事故,如飞机机翼的颤振造成的飞行事故,桥梁共振所造成的断桥事件等。此外,振动还会产生噪声,造成环境污染。

另一方面,振动也有其可利用的一面,如振动送料,振动筛选,振动沉柱,振动切削,振动压路,以及利用振动消除零件内应力等。随着对振动研究的不断深入,振动的应用必将日益广泛。

我们研究振动的目的,就是要认识它,掌握它,从而可以有效地控制振动,减轻或消除它所造成的危害,同时,扩大它为人类造福的应用范围。

第二节 单自由度系统

工程中许多振动问题可以简化为单自由度系统,如图1-1a表示的安装在弹性底座上的机器,仅考虑垂向低频振动,这时可用图1-1b所示的力学模型来表示。这里忽略机器本身的弹性和阻尼,用质量块 m 代表机器的质量;忽略底座的质量,用弹簧 k 和阻尼器 c 表示底座的弹性和阻尼。

用 x 表示质量块的位移, $f(t)$ 为作用在质量块上的激振力。根据牛顿定律可知系统运动微分方程式为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1-1)$$

一、自由振动

当外力 $f(t) \equiv 0$ 时,式(1-1)成为二阶常系数线性齐次微分方程。设

$$x(t) = Xe^{st} \quad (1-2)$$

代入式(1-1) ($f(t) \equiv 0$) 有

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (1-3)$$

令 $\omega_n^2 = k/m$, $\xi = c/(2\sqrt{mk})$, 这里 ω_n , ξ 分别称为系统的固有频率和阻尼比,代入式(1-3)有

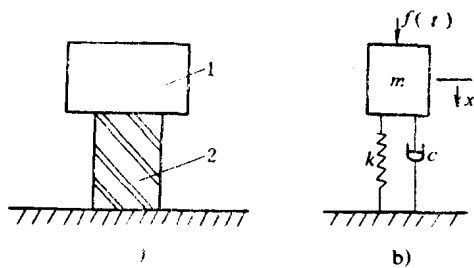


图1-1 单自由度系统
1—机器 2—底座

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (1-4)$$

式 (1-4) 有两个根

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (1-5)$$

当 $\xi > 1$ 时, 称为过阻尼。方程式 (1-4) 只有两个负实根, 则由式 (1-2) 表示的解将不是振动解, 这说明此时系统不可能作自由振动。当 $\xi < 1$ 时, 称为欠阻尼, 一般工程结构几乎无一例外地属于这种情况, 此时, 式 (1-4) 有一对共轭复根, 其实部为负值, 式 (1-2) 表示的解将是一衰减振动。 $\xi = 1$ 时, $c = c_c = 2\sqrt{mk}$ 称为临界阻尼, 取义为过阻尼与欠阻尼之间的分界点。此时, 式 (1-1) 的自由振动解为

$$x(t) = (A + Bt)e^{st} \quad (1-6)$$

其中, A 、 B 由初始条件决定。显然这也不是振动解。

因此, 只有欠阻尼的情形下才能存在自由振动解, 由式 (1-2)、(1-5) 知, 其一般形式为

$$x(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \quad (1-7)$$

其中, A 、 B 由初始条件决定。若

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

则

$$x(t) = \frac{x_0 s_2 - \dot{x}_0}{s_2 - s_1} e^{s_1 t} + \frac{x_0 s_1 - \dot{x}_0}{s_1 - s_2} e^{s_2 t} \quad (1-8)$$

将式 (1-5) 代入上式, 得

$$x(t) = \left[x_0 \left(\cos \omega_d t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \omega_d t \right) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right] e^{-\xi\omega_n t} \quad (1-9)$$

其中 $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \omega_n$ 称为有阻尼固有频率。

式 (1-9) 表示了一个衰减振动, 其振动频率为 ω_d , 幅值随时间呈指数下降, 如图 1-2 所示。在轻阻尼系统中, $\xi \ll 1$, 阻尼对振动固有频率的影响可忽略不计, 即 $\omega_d \approx \omega_n$ 。但阻尼对振幅的影响却很大。相邻两次振动的振幅比

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\xi\omega_n \tau} \quad (1-10)$$

其中 $\tau = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$, 为振动周期。

例如, 当 $\xi = 0.05$ 时, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{0.73}$, 即一个周期内振幅下降 27%, 经过 10 个周期后, 振幅将减小 96%, 而对无阻尼系统, 自由振动的振幅是不衰减的, 由此可见阻尼系统的自由振动衰减很快。

二、受迫振动

当式 (1-1) 的外力不为零时, 该方程成为非

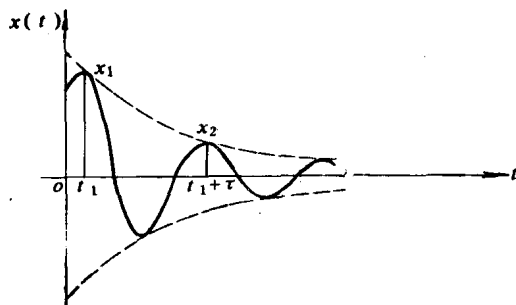


图 1-2 衰减自由振动

齐次方程, 其解由两部分组成, 其一是对应于齐次方程的通解, 即如前所述的自由振动解, 其二是对应于外力的特解。由于阻尼系统的自由振动很快就衰减掉了, 因此, 这里仅讨论对

应于外力的特解，即受迫振动解。

1. 简谐激振力作用下的振动

令 $f(t) = F e^{i\omega t}$, ω 为激振频率。设此时的强迫振动解为 $x(t) = X e^{i\omega t}$, 代入式 (1-1) 得

$$X = \frac{F}{k - m\omega^2 + j\omega c} \quad (1-11)$$

$$H(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\omega c} = \frac{1}{k} \frac{1}{1 - \lambda^2 + j2\xi\lambda} \quad (1-12)$$

式中 λ ——频率比, $\lambda = \omega/\omega_n$

$H(\omega)$ ——振动系统的传递函数。

由式(1-12)可见, 传递函数取决于系统的固有参数。

记 $X_{st} = F/k$ 表示与动态力幅相同大小的静力作用下系统的静变形, 则有

$$X/X_{st} = \frac{1}{1 - \lambda^2 + j2\xi\lambda} = \left| \frac{X}{X_{st}} \right| e^{-j\phi} \quad (1-13)$$

其中

$$\left| \frac{X}{X_{st}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\xi\lambda)^2}} \quad (1-14)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi\lambda}{1 - \lambda^2} \quad (1-15)$$

式中 $\left| \frac{X}{X_{st}} \right|$ ——动态放大系数;

ϕ ——振动响应与激振力的相位差。

图 1-3 表示了 $\left| \frac{X}{X_{st}} \right|$ 与 λ 的关系, 图 1-4 表示了 ϕ 与 λ 的关系。前者称为幅频响应曲线, 而

后者称为相频响应曲线。

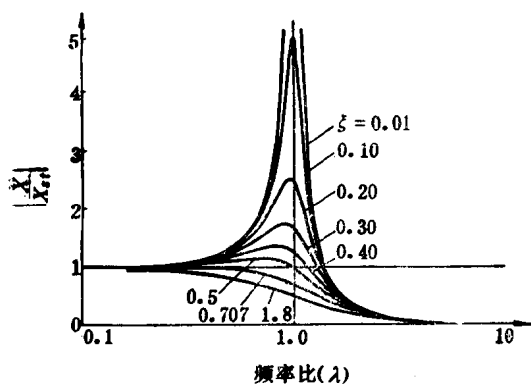


图1-3 幅频响应曲线

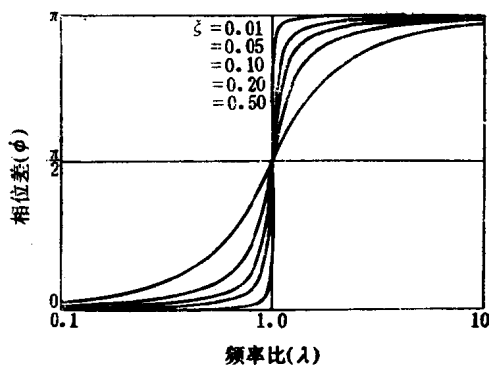


图1-4 相频响应曲线

从图中可以看出

(1) 当激振频率很低时, $\lambda \ll 1$, 有 $\left| \frac{X}{X_{st}} \right| \approx 1, \phi \approx 0^\circ$ 。这就是说, 当激振力变化十分缓慢时, 振幅值大小接近相同力幅的静态力作用下的静变形, 相位与激振力的相位相近。我们将这一频率区域称为准静态区 (即 $\omega < 0.67\omega_n$ 的频率区)。此时系统动特性主要取决于弹簧刚度。

(2) 当激振力频率很高, 即 $\lambda \gg 1$ 时, 有 $\left| \frac{X}{X_{st}} \right| \approx 0, \phi \approx 180^\circ$ 。这就是说, 高频激振时, 振幅很小, 相位与激振力相反。这是因为激振力变化太快时, 质量块由于惯性而很难跟随, 故呈现很大的动阻抗, 此时, 动阻抗 $(-m\omega^2 + j\omega c + k)$ 中含质量的项与 ω^2 成正比, 因此高频时, 主要是质量的惯性起作用, 称高频区为惯性区 (即 $\omega > 1.67\omega_n$ 的频率区域)。

(3) 当激振频率接近于固有频率, 即 $\lambda \approx 1$ 时, $\left| \frac{X}{X_{st}} \right|$ 远大于 1, 即振动幅值远大于静变形。而相位接近 90° 。

1) $\left| \frac{X}{X_{st}} \right|$ 的最大值 由式 (1-14) 可知, 当

$$\lambda = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (1-16)$$

时, 即 $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ 时, $\left| \frac{X}{X_{st}} \right|$ 取得最大值

$$\left| \frac{X}{X_{st}} \right| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \quad (1-17)$$

称此频率 $\omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ 为共振频率。对轻阻尼系统而言, $\xi \ll 1$, 故共振频率 $\omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ 与有阻尼固有频率 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ 及无阻尼固有频率 ω_n 近似地认为是一致的。

2) $\lambda = 1$ 时 $\phi = 90^\circ$, 与阻尼无关, 这一点很重要。对于一未知阻尼值的结构进行慢扫描简谐激振, 当观察到激振力与振动位移相位差 90° 时, 激振力的频率一定就是结构的固有频率, 而不必关心阻尼的大小。

2. 周期激振力作用下的响应

若 $f(t)$ 为一周期以 T 表示的干扰力, 即

$$f(t) = f(t + T)$$

则根据富氏变换, 可将它展开成

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t) \quad (1-18)$$

式中 ω_1 ——称为基频; $\omega_1 = 2\pi/T$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_1 t \, dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_1 t \, dt \quad n = 1, 2, \dots$$

也可将式 (1-18) 改写为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad (1-19)$$

其中 $C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-i n \omega_d t} dt \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

由式 (1-11) 可写出式 (1-19) 中各次谐波分量 $C_n e^{i n \omega_d t}$ 的响应, 根据叠加原理, 这些响应的总和就是 $f(t)$ 的响应。

3. 任意激振力作用下的响应

(1) 单位脉冲响应对振动系统作用一单位脉冲力, 相当于作用一单位冲量, 根据牛顿定律, $F \Delta t = m \Delta v = 1$, 该单位脉冲力将使质量获得一初速度:

$$\dot{x}_0 = \Delta v = \frac{1}{m}$$

这里假设在作用脉冲力之前的振动系统是静止的。将 $x_0 = 0, \dot{x}_0 = \frac{1}{m}$ 代入式 (1-9), 则得系统的单位脉冲力作用下的响应为

$$h(t) = \frac{1}{m \omega_d} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_d t \quad (1-20)$$

称之为系统的单位脉冲响应。

值得注意的是, $h(t)$ 与式 (1-12) 表示的传递函数 $H(\omega)$ 之间成一富氏变换对。

(2) 任意激振力作用下的响应 任意激振力可以看成不同时刻的脉冲力的叠加。由于所研究的振动系统的线性特征, 系统的响应应该是各脉冲力的脉冲响应的线性迭加。如图 1-5 所示,

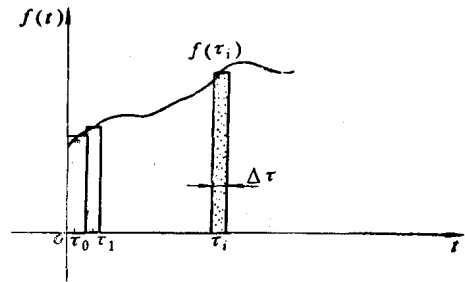


图1-5 任意激振力

在 τ_i 时刻力幅为 $f(\tau_i)$, 在时间间隔 $\tau_i \pm \frac{1}{2} \Delta \tau$ 内的冲量近似为 $f(\tau_i) \Delta \tau$, 在这段时间内的激振力可看成是脉冲函数 $f(\tau_i) \Delta \tau \delta(t - \tau_i)$, 这里 $\delta(t)$

为单位脉冲函数。相应的系统响应为 $f(\tau_i) \Delta \tau h(t - \tau_i)$, 则激振力在 $0 \sim \tau_n$ 时间间隔内连续作用下所产生的响应为

$$x(t) = \sum_{i=0}^n f(\tau_i) \Delta \tau h(t - \tau_i)$$

当 $\Delta \tau \rightarrow 0$ 时, 上式成为积分形式

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (1-21)$$

上式表明, 在任意激振力作用下系统的响应等于力与系统脉冲响应的卷积。

将式 (1-20) 代入上式

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi \omega_n (t - \tau)} \sin \omega_d (t - \tau) d\tau \quad (1-22)$$

上式也称为杜哈梅积分。

记 $F(\omega)$, $X(\omega)$ 分别为 $f(t)$, $x(t)$ 的富氏变换, 则由式 (1-21) 知

$$X(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad (1-23)$$

即系统的动态响应的富氏变换等于激振力的富氏变换与系统传递函数的富氏变换的乘积。这与式(1-12)是一致的。

第三节 两自由度系统

前面讨论了最简单的单自由度系统，而在实际工程中，许多问题用单自由度系统来描述是远远不够的。

所谓振动系统的自由度是指描述系统运动所必需的坐标个数。

最简单的两自由度系统如图 1-6 所示。质量 m_1 、 m_2 只限于弹簧轴线上的直线运动，这样只需 x_1 、 x_2 两个坐标便可完全确定系统任时刻的位置。因此该系统具有两个自由度。

假设作用在 m_1 、 m_2 上的外力为 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ ，根据牛顿定律

$$k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) + c_1 \dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - f_1(t) = -m_1 \ddot{x}_1$$

$$k_2(x_2 - x_1) + k_3 x_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_3 \dot{x}_2 - f_2(t) = -m_2 \ddot{x}_2$$

上式整理后写成矩阵形式

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (1-24)$$

式中 $[M]$ ——质量矩阵； $[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$

$[C]$ ——阻尼矩阵； $[C] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}$

$[K]$ ——刚度矩阵； $[K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$

$[X]$ ——位移向量和力向量， $\{X\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ ， $\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$

式中 $[M]$ ——对称正定矩阵； $[K]$ ——对称半正定矩阵； $[C]$ ——对称矩阵。

一、无阻尼两自由度系统的自由振动

当外力为零且无阻尼时，(1-24)式变为

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (1-25)$$

令 $\{X\} = \{X\}e^{i\omega t}$ 代入上式

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = 0 \quad (1-26)$$

为了由上式得到非平凡解，必须有

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (1-27)$$

上式称为系统的频率方程，由它可解出关于 ω^2 的两个正实根

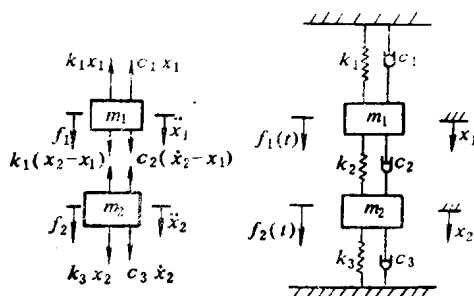


图1-6 两自由度系统

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(a+e) \mp \frac{1}{2}\sqrt{(a-e)^2 + 4bd} \quad (1-28)$$

其中

$$a = (k_1 + k_2)/m_1, \quad b = k_2/m_1 \\ d = k_2/m_2, \quad e = (k_2 + k_3)/m_2$$

将式 (1-28) 代入式 (1-26)，由于系数行列式值为零，只能确定 $\{X\}$ 中 X_1 与 X_2 的比值

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{a - \omega^2}{b} \quad (1-29)$$

将式 (1-28) 代入得

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_1 &= \frac{a - \omega_1^2}{b} = \mu_1 \\ \left(\frac{X_2}{X_1}\right)_2 &= \frac{a - \omega_2^2}{b} = \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (1-30)$$

$\begin{Bmatrix} A \\ \mu_1 A \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} B \\ \mu_2 B \end{Bmatrix}$ 分别称为对应于 ω_1, ω_2 的振型。则振动系统的自由振动解的—

$$\{X\} = A \begin{Bmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + B \begin{Bmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t} \quad (1-31)$$

其中， A, B 由初始条件决定。

如果 μ_1 (或 μ_2) 为 ∞ ，则相应的振型可写为 $A \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ (或 $B \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$)。

二、无阻尼两自由度系统的受迫振动与动力吸振器

设作用在 m_1, m_2 上的外力为 $\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$ ，响应为 $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$ ，代入 (1-24) 式

($[C] \equiv 0$) 得

$$([K] - \omega^2[M])\{X\} = \{F\} \quad (1-32)$$

则

$$\{X\} = ([K] - \omega^2[M])^{-1}\{F\} = [D]\{F\} \quad (1-33)$$

其中

$$[D] = ([K] - \omega^2[M])^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

$$D_{11} = \frac{(k_1 + k_2) - m_2 \omega^2}{\Delta}$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{k_2}{\Delta}$$

$$D_{22} = \frac{(k_1 + k_2) - m_1 \omega^2}{\Delta}$$

$$\Delta = [(k_1 + k_2) - m_1 \omega^2][(k_2 + k_3) - m_2 \omega^2] - k_2^2$$

当 $F_2 = 0$ ，且 $k_3 = 0$ 时，图1-6所示的系统变为图1-7所示的系统，由式 (1-33) (1-34) 知

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_1}{X_{11}} &= \frac{1 - \omega^2/\omega_{n2}^2}{(1 + k_2/k_1 - \omega^2/\omega_{n1}^2)(1 - \omega^2/\omega_{n2}^2) - k_2/k_1} \\ \frac{X_2}{X_{11}} &= \frac{1}{(1 + k_2/k_1 - \omega^2/\omega_{n1}^2)(1 - \omega^2/\omega_{n2}^2) - k_2/k_1} \end{aligned} \right\}$$

(1-35)

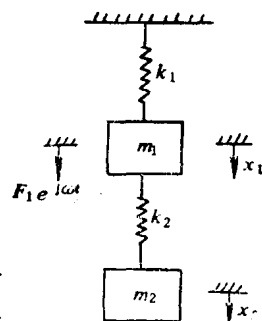


图1-7 动力吸振器

其中 $X_{11} = F_1/k_1$, $\omega_{n1}^2 = k_1/m_1$, $\omega_{n2}^2 = k_2/m_2$ 。

由上式可知, 当 $\omega_{n2} = \omega$ 时, $X_1 = 0$ 。这说明当 $m_2 - k_2$ 系统的固有频率等于激振频率时, 在激振力作用下的质量 m_1 将保持静止。这样在原系统 $m_1 - k_1$ 上加上 $m_2 - k_2$ 系统, 便可吸收原系统的振动, 这便是动力吸振器的基本原理, 附加的 $m_2 - k_2$ 系统称为动力吸振器。

第四节 多自由度系统

多自由度系统的分析方法本质上与二自由度系统没有区别, 只是由于自由度数增加, 计算工作量增加, 因此需借助于更有力的数学工具, 本节将介绍模态分析法。

一般多自由度系统的运动微分方程与式 (1-24) 相同, 只是这里的矩阵为 $n \times n$ 阶, 向量为 n 元。

一、无阻尼系统的自由振动

此时, 式 (1-27)

$$[\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}] = 0$$

成为关于 ω^2 的 n 次方程式, 它有 n 个正实根, 与之对应的有 n 个振型 $\{\mathbf{X}\}_i$ 。则自由振动解为

$$\{\mathbf{x}\} = \sum_{k=1}^n A_k \{\mathbf{X}\}_k e^{i\omega_k t} \quad (1-36)$$

其中 A_k 由初始条件决定。

二、主振型的正交性

设 ω_k , $\{\mathbf{X}\}_k$ 与 ω_j , $\{\mathbf{X}\}_j$ 分别表示系统第 k 、 j 阶固有频率与振型, 则它们都满足式 (1-26)

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{X}\}_k = \omega_k^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{X}\}_k$$

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{X}\}_j = \omega_j^2[\mathbf{M}]\{\mathbf{X}\}_j$$

将前式左乘 $\{\mathbf{X}\}_j^T$, 后式左乘 $\{\mathbf{X}\}_k^T$, 两式相减, 考虑到 $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{K}]$ 的对称性有

$$(\omega_k^2 - \omega_j^2)\{\mathbf{X}\}_j^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{X}\}_k = 0$$

因此有

$$\{\mathbf{X}\}_j^T[\mathbf{M}]\{\mathbf{X}\}_k = M_k \delta_{jk} \quad (1-37)$$

这里 $\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$

类似地有

$$\{\mathbf{X}\}_j^T[\mathbf{K}]\{\mathbf{X}\}_k = K_k \delta_{jk} \quad (1-38)$$

M_k , K_k 称为系统 k 阶模态质量与刚度, 有

$$K_k/M_k = \omega_k^2 \quad (1-39)$$

而 n 个振型向量构成的振型矩阵

$$[\Phi] = [\langle X \rangle_1 \cdots \langle X \rangle_n] \quad (1-40)$$

可用来对多自由度系统运动微分方程进行解耦。令

$$\langle x \rangle = [\Phi] \langle q \rangle \quad (1-41)$$

代入式 (1.26)

$$[M][\Phi]\{\ddot{q}\} + [K][\Phi]\langle q \rangle = 0$$

上式两边左乘 $[\Phi]^T$, 根据主振型的正交性, 式 (1-37)、(1-38) 有

$$\text{diag}(M_i)\{\ddot{q}\} + \text{diag}(K_i)\langle q \rangle = 0 \quad (1-42)$$

上式中, 各模态坐标 q_i 之间已完全解除耦合, 从而成为 n 个相互独立的单自由度系统的运动微分方程式, 可以单独求解, 再利用式 (1-41) 求出原坐标下的响应。

三、无阻尼系统的受迫振动

设作用于各坐标上的力 $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$, 无阻尼系统受迫振动解为 $\langle x \rangle = \langle X \rangle e^{i\omega t}$, 代入式 (1-24) ($[C] \equiv 0$) 得

$$([K] - \omega^2[M])\langle X \rangle e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t}$$

令 $\langle X \rangle = [\Phi]\langle Y \rangle$, 代入上式后, 两边左乘 $[\Phi]^T$ 得

$$([\Phi]^T[K][\Phi] - \omega^2[\Phi]^T[M][\Phi])\langle Y \rangle = [\Phi]^T\{F\}$$

根据主振型的正交性有

$$(\text{diag}(K_i) - \omega^2\text{diag}(M_i))\langle Y \rangle = \langle Q \rangle \quad (1-43)$$

其中

$$\langle Q \rangle = [\Phi]^T\{F\} \quad (1-44)$$

式 (1-43) 可作为 n 个独立的方程求解

$$Y_i = \frac{1}{K_i - \omega^2 M_i} Q_i$$

写成矩阵形式

$$\langle Y \rangle = \left[\frac{1}{K_i - \omega^2 M_i} \right] \langle Q \rangle \quad (1-45)$$

则原坐标下的响应为

$$\langle X \rangle = [\Phi]\langle Y \rangle$$

$$\langle X \rangle = [\Phi] \left[\frac{1}{K_i - \omega^2 M_i} \right] [\Phi]^T \{F\} \quad (1-46)$$

若仅在坐标 p 上作用有力, 则 $F_p = F$, $F_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $i \neq p$) 则任意坐标 i 上的响应为

$$X_i = F \sum_{j=1}^n \frac{X_{ij} X_{pj}}{K_j - \omega^2 M_j} \quad (1-47)$$

则坐标 i 与 p 之间的传递函数为

$$H_{ip} = \frac{X_i}{F_p} = \sum_{j=1}^n \frac{X_{ij} X_{pj}}{K_j - \omega^2 M_j} \quad (1-48)$$

或写成矩阵形式

$$[H] = [\Phi] \left[\frac{1}{K_i - \omega^2 M_i} \right] [\Phi]^T \quad (1-49)$$

由式 (1-46) 知

$$\{X\} = [H]\{F\} \quad (1-50)$$

(试比较式 (1-23) 与式 (1-50))。

四、一般粘性阻尼系统

当阻尼 $[C] \neq 0$ 时, 式 (1-26) 一般不能在实数空间进行解耦, 只有当

$$[K]^{-1}[C][M]^{-1} = [M]^{-1}[C][K]^{-1} \quad (1-51)$$

时, 式 (1-40) 表示的实振型矩阵才对 $[C]$ 具有正交性, 从而可以在实数空间实现解耦。而对于一般的阻尼系统, 需寻找新的坐标变换。

将式 (1-26) 与下列恒等式联立

$$[M]\{\ddot{X}\} - [M]\{\dot{X}\} = 0$$

得

$$[A]\{\dot{z}\} + [B]\{z\} = \{g\} \quad (1-52)$$

其中

$$[A] = \begin{bmatrix} C & M \\ M & O \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} K & O \\ O & -M \end{bmatrix}$$

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad \{g\} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

设式 (1-52) 的自由振动解 ($\{g\} = 0$) 为

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \{\Psi\} e^{i\lambda t} = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \lambda \varphi \end{Bmatrix} e^{i\lambda t} \quad (1-53)$$

代入式 (1-52) ($\{g\} = 0$) 得

$$(\lambda[A] + [B])\{\Psi\} = 0 \quad (1-54)$$

显然, 这是一个关于 $[A]$ 、 $[B]$ 的广义特征值问题。对于欠阻尼系统, 上式存在 n 对共轭复根: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ 及 $\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \varphi_1 \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \lambda_n \varphi_n \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \varphi_1^* \\ \lambda_1^* \varphi_1^* \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} \varphi_n^* \\ \lambda_n^* \varphi_n^* \end{Bmatrix}$, 则特征向量矩阵为

$$\begin{aligned} [\Psi] &= \left[\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \varphi_1 \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} \varphi_n \\ \lambda_n \varphi_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1^* \\ \lambda_1^* \varphi_1^* \end{Bmatrix} \dots \begin{Bmatrix} \varphi_n^* \\ \lambda_n^* \varphi_n^* \end{Bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Lambda \Phi & \Lambda^* \Phi^* \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-55)$$

其中 $[\Phi] = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n]$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 。同样可以证明 $[\Psi]$ 具有关于 $[A]$ 、 $[B]$ 的正交性^[5]

$$\begin{aligned} [\Psi]^T [A] [\Psi] &= \text{diag}(a_1 \dots a_n a_1^* \dots a_n^*) \\ [\Psi]^T [B] [\Psi] &= \text{diag}(b_1 \dots b_n b_1^* \dots b_n^*) \end{aligned} \quad (1-56)$$

且有

$$a_i + \lambda_i b_i = 0; \quad a_i^* + \lambda_i^* b_i^* = 0 \quad (1-57)$$

利用式 (1-56) 的正交性, 可对式 (1-52) 解耦。令

$$\{z\} = [\Psi]\{q\}$$